

В. С. ПОПОВ

Теоретическая
=====
электро-
=====
техника



В. С. ПОПОВ

Теоретическая электро- техника

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Допущено Министерством высшего и
среднего специального образования
СССР в качестве учебника для
учащихся техникумов*



«ЭНЕРГИЯ» • МОСКВА 1975

6П2.1

П 58

УДК 621.30.1(02)

Попов В. С.

П 58 Теоретическая электротехника. Учебник для техникумов. Изд. 2-е, перераб. М., «Энергия», 1975.

560 с. с ил.

В книге рассматриваются физические явления и процессы, происходящие в электрическом и магнитном полях. Приводятся расчеты электрических цепей постоянного и переменного тока, электрических и магнитных полей. Описываются простейшие методы измерений основных электрических и магнитных величин.

Первое издание книги вышло в свет в 1970 г.

Книга предназначена для учащихся техникумов электротехнических специальностей и может быть полезна для инженерно-технических работников.

П 30306-045
П 051[01]-75 149-75

6П2.1

© Издательство «Энергия», 1975 г.

ПОПОВ ВИКТОР СТЕПАНОВИЧ

Теоретическая электротехника

Редактор Б. Я. Жуховицкий

Редактор издательства Л. А. Решмина

Переплет художника А. А. Иванова

Технический редактор О. Д. Кузнецова

Корректор З. Б. Драновская

Сдано в набор 2/IX 1974 г. Подписано к печати 22/I 1975 г.
Т-03340. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага типографская № 3. Усл.
печ. л. 29,4. Уч.-изд. л. 31,34. Тираж 100 000 экз, Зак. № 1626.
Цена 1 р. 13 к.

Издательство «Энергия», Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.

Предисловие

Настоящая книга является учебником по теоретическим основам электротехники (ТОЭ).

По сравнению с предыдущим изданием (1970 г.) материал книги переработан в соответствии с новой программой, утвержденной в 1973 г. Министерством высшего и среднего специального образования СССР.

В книге не даны описания лабораторных работ, но рассмотрены простейшие методы измерений основных электрических и магнитных величин, которые применяются при выполнении лабораторных работ. Рассмотрение этих методов обеспечивает более высокий уровень выполнения лабораторных работ.

В книге частично учтены замечания и пожелания, которые были высказаны в рецензиях, на методическом совещании по ТОЭ, состоявшемся в научно-методическом кабинете МВ и ССО СССР, а также в письмах, полученных издательством «Энергия».

Автор благодарит рецензентов и всех товарищей, принявших участие в обсуждении книги.

Автор глубоко признателен преподавателю Московского энергетического техникума, заслуженному учителю школы В. И. Константинову за рецензию и многочисленные указания и рекомендации, использованные при работе над книгой.

Автор выражает глубокую благодарность доценту, канд. техн. наук Б. Я. Жуховицкому за ряд ценных советов, позволивших улучшить книгу, и за большую творческую работу по ее редактированию.

Все замечания по книге автор просит направлять в издательство «Энергия» по адресу: 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

Автор

Введение

Электрификацией называется широкое применение электрической энергии во всех областях промышленности, сельского хозяйства, транспорта, связи и быта. Электрификация сопровождается внедрением передовой техники и технологии, автоматизацией и механизацией, обеспечивающими повышение производительности труда.

Электрическая энергия обладает ценными свойствами: она относительно несложно получается путем преобразования других видов энергии (механической, тепловой, атомной, химической и др.), передается с малыми потерями на большие расстояния (сотни километров), просто дробится и преобразуется в нужный вид энергии (механическую, тепловую, световую, химическую и т. д.). Таким образом, электричество позволяет использовать и транспортировать энергию, накопленную в природе (энергию падающей воды, угля, торфа и т. д.).

В СССР электрификация проводится в грандиозных все возрастающих масштабах. Замечательный лозунг В. И. Ленина, сформулированный им в 1920 г., «Коммунизм — это есть Советская власть плюс электрификация всей страны» успешно воплощается в жизнь. Еще в трудных условиях гражданской войны Советское правительство и Коммунистическая партия неустанно заботились о строительстве новых электростанций, прежде всего на базе использования местных энергетических ресурсов (Волховская гидроэлектростанция 1918 г., Каширская электростанция на подмосковном угле 1919 г., Шатур-

ская электростанция на торфе 1920 г.). По инициативе В. И. Ленина был разработан план электрификации нашей Родины — план ГОЭЛРО (Государственной комиссии по электрификации России), который он назвал второй программой партии. По этому плану намечалось за 10—15 лет построить 30 электрических станций общей мощностью 1,75 млн. кВт.

Под руководством Коммунистической партии и Советского правительства этот исторический план был выполнен в кратчайший срок — за 10 лет.

Успешное выполнение плана ГОЭЛРО, выполнение и перевыполнение пятилетних планов развития народного хозяйства СССР позволило достигнуть в 1950 г. выработки электроэнергии 91 млрд. кВт·ч при мощности электростанций 19,6 млн. кВт., а в 1970 г. соответственно 740 млрд. кВт·ч и 166 млн. кВт.

Директивы XXIV съезда КПСС по пятилетнему плану развития народного хозяйства за 1971—1975 гг. предусматривают объем производства электроэнергии в последний год пятилетки 1030—1070 млрд. кВт·ч, что означает прирост производства электроэнергии за девятую пятилетку на 290—330 млрд. кВт·ч. За годы девятой пятилетки будут введены в действие новые мощности электростанций в размере 65—67 млн. кВт, из которых около 8 млн. кВт придется на атомные электростанции. Программа строительства атомных электростанций предусматривает в течение 10—12 лет ввести в действие атомные электростанции общей мощностью 30 млн. кВт. Другой характерной особенностью развития энергетики в девятой пятилетке является строительство крупных тепловых электростанций мощностью 500, 800 и 1200 кВт, обеспечивающих значительную экономию топлива и резкое повышение производительности труда.

В текущей пятилетке будет продолжаться создание единой энергосистемы СССР, что позволит передавать электроэнергию из Сибири и Казахстана в европейскую часть страны.

Рост установленной мощности и производства электроэнергии увеличивает электровооруженность предприятий, что влечет за собой увеличение производительности труда, которая, как неоднократно отмечал В. И. Ленин, является самым главным, самым важным условием, обеспечивающим победу нашего советского строя.

Выполнение исторических решений, поставленных XXIV съездом КПСС, требует развития и внедрения новейшей техники во всех областях народного хозяйства. Для решения этих грандиозных задач инженерно-технический персонал должен получить широкую теоретическую подготовку и научиться применять теорию на практике. Курс теоретической электротехники, в котором теоретические вопросы рассматриваются в неразрывной связи с практическими задачами, дает учащимся знания качественных и количественных соотношений в различных электромагнитных процессах. Курс теоретической электротехники подготавливает учащихся к изучению специальных электротехнических дисциплин и поэтому является одним из важнейших звеньев подготовки техников-электриков.

Физические процессы в электрических цепях постоянного тока

1-1

Основные понятия, относящиеся к электрическому полю

Электрические заряды и их электрическое поле. Всякое тело содержит большое количество элементарных частиц вещества, обладающих электрическими зарядами. Одни из элементарных заряженных частиц входят в состав атомов и молекул вещества, другие не входят, т. е. находятся в свободном состоянии. Элементарная частица протон имеет элементарный электрический заряд, которому приписан (условно) положительный знак, элементарная частица электрон имеет элементарный заряд противоположного — отрицательного знака *.

В заряженном теле преобладают положительные или отрицательные заряды, в электрически нейтральном теле число тех и других зарядов одинаково. Разноименно заряженные частицы или тела притягиваются друг к другу, одноименно заряженные — отталкиваются.

Движущиеся электрические заряды неразрывно связаны с окружающим их электромагнитным полем, которое пред-

* Электрический заряд — это свойство частиц вещества, характеризующее их взаимосвязь с собственным электромагнитным полем и их взаимодействие с внешним электромагнитным полем. Так как электрический заряд — это свойство частиц вещества, а также тел, то он немалым в отрыве от материи, но при рассмотрении электромагнитных явлений часто коротко говорят «заряд», понимая, что речь идет о заряженных частицах или теле. Синонимом «заряда» при его количественном определении является термин «количество электричества».

ставляет собой один из видов материи. Электромагнитное поле характеризуется двумя взаимно связанными сторонами — составляющими: магнитным полем и электрическим полем, которые выявляются по силовому действию на заряженные частицы или тела. Каждый движущийся или неподвижный заряд неразрывно связан с окружающим его электрическим полем. Электрическое поле неподвижных зарядов называется **э л е к т р о с т а т и ч е с к и м**.

Так как электрическое поле оказывает силовое действие на электрически заряженные тела или заряженные частицы, то оно способно совершать работу. Следовательно, электрическое поле обладает энергией, которую называют **э л е к т р и ч е с к о й э н е р г и е й**. Для оценки силового действия электрического поля каждую его точку¹ характеризуют напряженностью поля.

Н а п р я ж е н н о с т ь э л е к т р и ч е с к о г о п о л я $\mathcal{E}$ определяется отношением силы F , с которой поле заряженных частиц или тел действует на точечный пробный заряд q , находящийся в данной точке поля, к величине этого заряда; следовательно, можно написать:

$$\mathcal{E} = F/q. \quad (1-1)$$

Пробный заряд должен быть настолько мал, чтобы его внесение в исследуемое поле не приводило к перераспределению зарядов, поле которых рассматривается.

Заряд называют **т о ч е ч н ы м**, если его линейные размеры весьма малы по сравнению с расстоянием до тех точек, в которых определяется его поле.

При q , равном единице, $\mathcal{E}$ численно равно F , т. е. напряженность электрического поля численно равна силе поля, действующей на единичный заряд.

Напряженность поля характеризуется не только величиной, но и направлением, которое совпадает с направлением силы, действующей на положительный точечный заряд, находящийся в данной точке поля. Следовательно, **н а п р я ж е н н о с т ь п о л я** — вектор. Так, на рис. 1-1 показаны в двух точках векторы напряженности¹ $\mathcal{E}$ электрического поля между двумя параллельными плоскими пластинами с зарядами $+Q$ и $-Q$.

Электрическое поле графически изображается **л и н и я м и н а п р я ж е н н о с т и э л е к т р и ч е с к о г о п о л я**. Линия напряженности проводится так, чтобы в каждой ее точке вектор напряженности поля был направлен по касательной к ней. Линия напряженности электро-

статического поля начинается на положительном заряде и оканчивается на отрицательном; таким образом, она является не замкнутой.

Если через каждую единичную площадку, перпендикулярную к направлению вектора напряженности, провести число линий, равное или пропорциональное напряженности поля в пределах этой площадки, то плотность линий напряженности будет оценивать величину напряженности поля.

Поле называется однородным, если во всех его точках векторы напряженности равны друг другу, в противном случае поле будет неоднородным. Примером однородного поля может служить электрическое поле

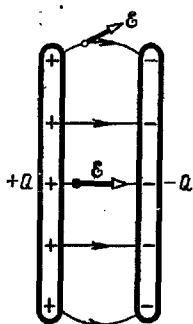


Рис. 1-1. Электрическое поле между двумя заряженными плоскими параллельными пластинами.

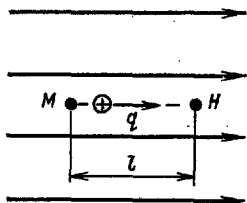


Рис. 1-2. Перемещение электрического заряда $+q$ в однородном поле.

между параллельными пластинами (рис. 1-1) в области, достаточно удаленной от краев пластин.

Электрическое напряжение. Допустим, что положительный точечный заряд q переместился в однородном электрическом поле под действием сил этого поля из точки M в точку N на расстояние l (рис. 1-2) в направлении поля.

Совершенная при этом силами поля за счет энергии поля работа $A = Fl$, или с учетом (1-1)

$$A = Fl = \mathcal{E}ql. \quad (1-2)$$

Величина, определяемая отношением работы по перемещению точечного положительного заряда q между двумя точками поля к величине заряда, называется электрическим напряжением между указанными точками M и N :

$$U = U_{MN} = A/q. \quad (1-3)$$

Численно напряжение между двумя точками равно работе сил поля при перемещении между этими точками положительного единичного заряда.

В однородном поле по (1-2) $A = \mathcal{E}ql$ и напряжение

$$U = A/q = \mathcal{E}ql/q = \mathcal{E}l. \quad (1-3a)$$

В Международной системе единиц СИ (SI) приняты единицы: длина — метр (м); масса — килограмм (кг); время — секунда (с); сила — ньютон (Н); работа — джоуль (Дж); электрический заряд — кулон (Кл); электрическое напряжение — вольт (В).

Из выражения (1-3a) следует, что

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/1 Кл.}$$

Напряженность электрического поля согласно (1-3a) определяется выражением

$$\mathcal{E} = U/l \quad (1-4)$$

и измеряется в вольтах на метр: $[\mathcal{E}] = \text{В/м}$.

Здесь и далее прямоугольные скобки указывают, какова размерность величины, заключенной в скобки.

Допустим, что положительный точечный заряд q находится в точке M электрического поля, созданного другими зарядами. Если под действием сил поля заряд q удалится за пределы поля, то силами поля будет совершена работа, равная потенциальной энергии W_M , которой обладал заряд q , находясь в точке M . Потенциальная энергия, отнесенная к величине заряда, находящегося в какой-либо точке электрического поля, является одной из характеристик электрического поля всех других зарядов в данной точке (например M) и называется потенциалом φ этой точки поля. Итак, по определению потенциалы электрического поля в точках M и N : $\varphi_M = W_M/q$ и $\varphi_N = W_N/q$.

При перемещении силами поля заряда q из точки M в точку N независимо от формы пути производится работа, равная изменению запаса потенциальной энергии поля, $A = W_M - W_N$. Так как $W_M = \varphi_M q$ и $W_N = \varphi_N q$, то $A = q(\varphi_M - \varphi_N)$, откуда, учитывая (1-3), получаем:

$$U_{MN} = \frac{A}{q} = \frac{q(\varphi_M - \varphi_N)}{q} = \varphi_M - \varphi_N, \quad (1-5)$$

т. е. напряжение между двумя точками электрического поля равно разности потенциалов этих точек.

Если потенциал одной из точек, например H , принять равным нулю, то согласно (1-5)

$$U_{MH} = \varphi_M - \varphi_H = \varphi_M - 0 = \varphi_M,$$

т. е. напряжение между данной точкой (M) электрического поля и другой, произвольно выбранной точкой, потенциал которой принят равным нулю, является потенциалом φ данной точки поля. Особенно часто принимают равным нулю потенциал земли. Потенциал измеряется в вольтах, т. е. в тех же единицах, что и напряжение.

Поверхность, все точки которой имеют одинаковые потенциалы, называется эквипотенциальной (равнопотенциальной).

1-2

Проводники, изоляторы, полупроводники

Все вещества (тела) состоят из атомов и молекул. Атом имеет положительно заряженное ядро и отрицательно заряженные электроны, совершающие орбитальное движение вокруг ядра. Если суммарный отрицательный заряд электронов равен положительному заряду, то атом электрически нейтрален. Порядковый номер элемента в периодической таблице Менделеева определяется числом электронов нейтрального атома. Электрический заряд электрона (элементарный заряд) равен $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Заряд ядра по абсолютной величине равен заряду электрона, умноженному на число электронов нейтрального атома.

Электроны атомов обычно находятся на определенных орбитах. Электроны, находящиеся на внутренних орбитах, относительно прочно связаны с ядром атома. Электроны, находящиеся на внешних орбитах (валентные электроны), сравнительно легко могут отделяться от атома, после чего становятся «свободными» или присоединяются к другому атому или молекуле. Атом, потерявший один или несколько электронов, называется положительным ионом, а атом, присоединивший электроны, — отрицательным ионом. Процесс образования ионов называется ионизацией. Количество носителей заряда — свободных электронов или ионов в единице объема вещества принято называть концентрацией носителей заряда (n).

Электрический ток (проводимости) — это явление упорядоченного (направленного) движения заряженных частиц. Свойство вещества проводить электрический ток под действием электрического поля называется **электропроводностью**. Электропроводность вещества зависит от концентрации носителей заряда: чем выше концентрация, тем больше электропроводность. Все вещества в зависимости от электропроводности делятся на проводники, диэлектрики и полупроводники.

Основным свойством проводящих веществ или **проводников** является их высокая электропроводность. Проводники делятся на два рода. В проводниках первого рода, к которым преимущественно относятся все металлы и их сплавы, электрический ток создается перемещением только электронов — это проводники с **электронной проводимостью**. Прохождение тока в них не сопровождается химическими изменениями материала проводника. Лучшими проводниками являются серебро, медь, алюминий.

Согласно классической электронной теории высокая электропроводность металлов объясняется наличием в них огромного количества свободных электронов — электронов проводимости, находящихся в состоянии беспорядочного движения и заполняющих объем проводника наподобие газа — **электронного газа**. При движении электроны сталкиваются с ионами кристаллической решетки, направление их движения, скорость, кинетическая энергия при этом изменяются.

Если в таком проводнике существует электрическое поле, то на заряды проводника действуют силы этого поля. Направление сил, действующих на положительные заряды, совпадает с направлением поля, а действующих на отрицательные заряды, — противоположно направлению поля. Таким образом, электроны проводимости получают слагающую скорости, вследствие чего наступает упорядоченное движение электронов в одном направлении, т. е. в проводнике возникает ток проводимости.

Проводники второго рода, или проводники с **ионной проводимостью**, представляют собой расплавы некоторых солей и водные растворы кислот, солей, щелочей и др. В расплавах и растворах независимо от прохождения тока происходит распад их нейтральных молекул на положительные и отрицательные ионы (электролитическая диссоциация). Положительными ионами являются ионы металлов и водород, отрицательными — кислотные остатки и гидрок-

сильная группа (ОН). Расплавы и растворы веществ, состоящие частично или полностью из ионов, называются еще электролитами. При отсутствии внешнего электрического поля ионы и молекулы находятся в состоянии хаотичного теплового движения.

Если в таком проводнике создать электрическое поле, то силы поля вызовут движение положительных ионов в направлении поля, а отрицательных — в противоположном направлении. Их упорядоченное движение и представляет собой ток проводимости в электролите.

Изоляторами (диэлектриками) называются вещества, в которых при нормальных условиях (невысокие температуры и отсутствие сильных электрических полей) имеется ничтожное количество свободных электрически заряженных частиц; вследствие этого они обладают ничтожной электропроводностью, которой во многих случаях можно пренебречь. К числу изоляторов относятся некоторые газы и жидкости — минеральные масла, лаки, а также большое число твердых материалов за исключением металлов, их сплавов и угля.

В диэлектриках возможно длительное существование электростатического поля. Однако при некоторых условиях, например при действии высоких температур или сильных электрических полей, в диэлектриках возможны расщепление молекул на ионы и потеря ими изолирующих свойств.

Полупроводники (полупроводящие вещества) по своей электропроводности занимают промежуточное место между проводниками и изоляторами. К полупроводникам относятся кремний, германий, теллур, селен, окислы металлов, соединения металлов с серой и т. д.

Полупроводники обладают рядом характерных свойств: электропроводность их и концентрация носителей заряда в сильной степени зависят от температуры, освещенности, электрических полей, примесей и др. Отличительные особенности полупроводников объясняются тем, что кроме электронной электропроводности, вызываемой электронами проводимости, они обладают еще так называемой «дырочной» электропроводностью. Последняя вызвана перемещением под действием электрического поля «дырок», т. е. незанятых валентными электронами мест в атомах, что равноценно перемещению положительно заряженных частиц, заряды которых по абсолютной величине равны зарядам электронов.

В настоящее время свойства полупроводников используются в большом количестве весьма разнообразных приборов и устройств (полупроводниковые диоды и триоды, фоторезисторы и т. п.).

1-3

Электрический ток

Из сказанного в § 1-2 следует, что для возникновения и прохождения электрического тока в проводнике необходимо: 1) наличие в проводнике носителей зарядов, которые могут перемещаться — свободных электронов в металлах, ионов и свободных электронов в электролитах; 2) наличие в проводнике электрического поля.

Электростатическое поле (поле неподвижных зарядов) не может существовать в проводнике, так как под действием поля свободные заряды проводника могут перемещаться. В заряженном проводящем теле все заряды расположатся на поверхности так, чтобы их суммарное поле внутри проводника равнялось нулю. Для поддержания направленного движения зарядов в проводнике необходимо поддерживать электрическое поле в проводнике, подключив к нему два зажима (электрода) источника электрической энергии, например аккумулятора. Таким образом, электрический ток проходит в проводнике, если проводник вместе с источником электрической энергии образует хотя бы простейшую электрическую цепь. Поле в проводнике создается зарядами, накапливающимися на электродах источника под действием химических, механических или других сил, действующих в источнике. В электротехнике говорят, что между электродами, к которым подключен источник энергии, приложено напряжение этого источника. Положительно заряженный электрод (анод) обозначают знаком плюс, а отрицательно заряженный (катод) знаком минус.

Электрическое поле в проводнике при постоянном (т. е. не изменяющемся с течением времени) токе называется **стационарным электрическим полем**.

Стационарное электрическое поле в проводнике, как и электрическое поле неподвижных зарядов, характеризуется напряженностью электрического поля $\mathcal{E}$, которая неизменна по времени в любой из точек проводника. Направление тока I в проводнике считают совпадающим с направлением напряженности поля, т. е. с направлением силы, действующей на положительный заряд, и направлением

движения положительных (рис. 1-3) зарядов. Не изменяющийся во времени ток называют постоянным.

Приложим электрическое напряжение к двум металлическим электродам, погруженным в электролит (рис. 1-4). Под действием электрического поля положительные ионы будут перемещаться к отрицательному электроду — катоду, а отрицательные ионы — к положительному электроду — аноду. Таким образом, два встречных потока ионов противоположного знака, обусловленных наличием электрического поля, представляют собой электрический ток. Достигнув электродов, ионы или оседают на них, или вступают с ними в химическую реакцию. Отрицательные ионы электролита отдают аноду свои электроны, которые и будут двигаться дальше

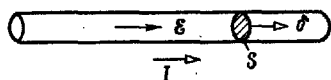


Рис. 1-3. Стационарное электрическое поле проводника с током.

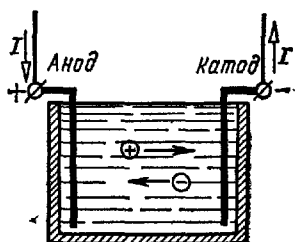


Рис. 1-4. Электрический ток в электролите.

к источнику. Положительные ионы электролита соединяются со свободными электронами катода, поступающими от источника. Таким образом, в проводах, идущих от источника питания, возникает движение свободных электронов в направлении к катоду.

Прохождение электрического тока через электролит связано с перемещением вещества электролита, составные части которого выделяются на электродах. Согласно закону Фарадея количество выделенного на катоде вещества G пропорционально количеству электричества Q , прошедшего через электролит:

$$G = cQ;$$

здесь c — коэффициент пропорциональности, называемый электрохимическим эквивалентом и равный числу миллиграмм вещества, которое выделяется на катоде при прохождении заряда, равного одному кулону. Для различных веществ он имеет разные значения: например для серебра 1,118 мг/Кл, для меди 0,329 мг/Кл.

Процесс выделения вещества из электролита называется электролизом. Он применяется для получения чистых металлов (медь, алюминий).

Интенсивность электрического тока характеризуется силой тока, хотя часто термин «электрический ток» или просто «ток» применяется в качестве синонима термина сила электрического тока. При постоянном токе сила тока I определяется количеством электричества (зарядом), проходящим через выделенную поверхность проводника (в частности, для проводов через поперечное сечение) в единицу времени.

Обозначив буквой Q заряд, проходящий через поперечное сечение за время t , получим:

$$I = Q/t. \quad (1-6)$$

Изменяющийся с течением времени (переменный) ток в отличие от постоянного обозначается буквой i . Если за бесконечно малый промежуток времени dt через поперечное сечение проходит бесконечно малый заряд dQ , то сила тока определяется по аналогичной формуле:

$$i = dQ/dt. \quad (1-7)$$

Единицей силы тока является ампер (А). Сила постоянного тока в проводнике равна 1 А, если через поперечное сечение за 1 с проходит электрический заряд, равный 1 Кл, т. е. $1 \text{ А} = 1 \text{ Кл/с}$. Наряду с ампером часто применяются долинные и кратные единицы: микроампер ($1 \text{ мкА} = 10^{-6} \text{ А}$), миллиампер ($1 \text{ мА} = 10^{-3} \text{ А}$) и килоампер ($1 \text{ кА} = 10^3 \text{ А}$).

За направление тока принимают направление, в котором перемещаются положительно заряженные частицы, или направление, противоположное движению электронов. Направление тока в цепи указывается стрелкой на схемах (рис. 1-4).

Мы не можем непосредственно наблюдать электрический ток и количественное представление о токе получаем только по показаниям электроизмерительных приборов (амперметров), работа которых основана на явлениях, сопровождающих прохождение тока: тепловом, магнитном и химическом действиях тока.

1-4

Плотность тока

При равномерном распределении тока по выделенной поверхности проводника отношение силы тока I к площади S этой поверхности определяет плотность тока:

$$\delta = I/S. \quad (1-8)$$

Плотность тока в проводах обычно измеряется в А/мм². Вектор плотности тока в проводе постоянного сечения направлен нормально к плоскости его поперечного сечения (рис. 1-3).

Сила тока в проводе, поперечное сечение которого на различных участках неодинаково, остается неизменной. Предположив, что сила постоянного тока в двух произ-

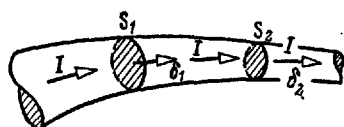


Рис. 1-5. Электрический ток в различных сечениях провода.

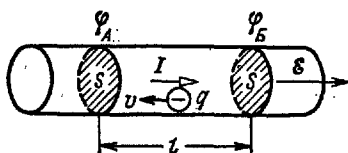


Рис. 1-6. Проводник с неизменным поперечным сечением.

вольно выбранных сечениях провода S_1 и S_2 (рис. 1-5) различна, придем к выводу, что за каждую единицу времени через сечения S_1 и S_2 проходят различные по величине электрические заряды. Следовательно, в объеме провода, расположенного между указанными сечениями, должно происходить непрерывное накопление зарядов того или другого знака, и напряженность электрического поля будет изменяться, чего не может быть, так как при изменяющемся поле и ток должен изменяться. В проводах разного сечения при одном и том же токе или вдоль провода изменяющегося сечения плотность тока обратно пропорциональна площади поперечного сечения. Действительно, так как

$$I = \delta_1 S_1 = \delta_2 S_2,$$

то

$$\delta_1 / \delta_2 = S_2 / S_1. \quad (1-9)$$

Рассмотрим участок прямолинейного провода, имеющего по всей длине одинаковое поперечное сечение S , по которому проходит постоянный ток. Так как ток постоянный, то, следовательно, напряженность поля $\mathcal{E}$ не изменяется, а ее

величина и направление при одинаковом поперечном сечении провода одинаковы во всех точках провода. Поэтому в проводе существует однородное электрическое поле, которое направлено по оси провода (рис. 1-6). Так как вектор напряженности поля направлен вдоль провода, то потенциал изменяется также вдоль провода и напряжение (разность потенциалов) между двумя любыми точками заданного поперечного сечения равно нулю, т. е. поверхность поперечного сечения — эквипотенциальная поверхность в проводе.

Выделим в проводе две эквипотенциальные поверхности, потенциалы которых φ_A и φ_B и расстояние между которыми l (рис. 1-6).

Напряжение между эквипотенциальными поверхностями по определению равно разности потенциалов, т. е.

$$U = U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B,$$

а напряженность поля в проводе

$$\mathcal{E} = U/l. \quad (1-10)$$

Под действием электрического поля напряженностью $\mathcal{E}$ каждый свободный электрон приобретает ускорение a в направлении, противоположном направлению поля (так как его заряд отрицательный), и на его беспорядочное движение наложится равномерно ускоренное движение в указанном направлении. Ускоренное движение происходит до тех пор, пока электрон не столкнется с ионом кристаллической решетки металла провода, после чего процесс ускорения движения повторяется.

Обозначив абсолютную величину заряда электрона e , напишем выражение силы, с которой поле действует на электрон:

$$F = \mathcal{E}e.$$

Под действием этой силы F электрон, имеющий массу m , движется между двумя столкновениями с ускорением

$$a = F/m = \mathcal{E}e/m. \quad (1-11)$$

Примем, что непосредственно после столкновения продольная скорость электрона равна нулю. В конце пробега к моменту следующего столкновения, считая среднее время пробега электрона между двумя столкновениями τ , получаем максимальную скорость движения

$$v_{\text{макс}} = a\tau = \frac{\mathcal{E}e}{m} \tau.$$

Таким образом, среднее значение продольной скорости движения

$$v_{cp} = \frac{0 + v_{\max}}{2} = \frac{\mathcal{E}e}{2m} \tau. \quad (1-12)$$

В участке провода длиной l и сечением S при концентрации свободных электронов n их суммарный заряд

$$Q = neSl. \quad (1-13)$$

Силу тока можно определить как отношение заряда Q на участке провода к тому промежутку времени t , в течение которого заряд покидает этот участок, проходя через его концевое сечение, т. е.

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{neSl}{t} = neSv_{cp}, \quad (1-14)$$

а плотность тока с учетом (1-12)

$$\delta = \frac{I}{S} = nev_{cp} = \frac{ne^2\tau}{2m} \mathcal{E}. \quad (1-15)$$

При неизменной температуре концентрация электронов и время свободного пробега τ неизменны, следовательно, будет неизменной и величина

$$\frac{ne^2\tau}{2m} = \gamma, \quad (1-16)$$

называемая удельной проводимостью металла, из которого изготовлен провод.

Таким образом, из (1-15) и (1-16) следует, что

$$\delta = \gamma \mathcal{E}, \quad (1-17)$$

т. е. плотность тока в проводе пропорциональна напряженности поля. Формула (1-17) называется законом Ома для плотности тока.

1-5

Закон Ома

Установим теперь зависимость между током на участке провода и напряжением на концах участка.

Так как в однородном поле напряженность $\mathcal{E} = U/l$, то плотность тока в проводе

$$\delta = \gamma \mathcal{E} = \gamma U/l.$$

Умножив обе части последнего выражения на площадь поперечного сечения провода, получим:

$$I = \delta S = U\gamma S/l,$$

или

$$I = U/r, \quad (1-18)$$

где величина

$$r = l/\gamma S \quad (1-19)$$

называется электрическим сопротивлением участка провода. По той же формуле (1-19) определяется сопротивление всего провода постоянного поперечного сечения S при длине провода l . В этом случае U — напряжение между концами провода.

Таким образом, пользуясь классической электронной теорией, мы пришли к выводу, что ток в проводе прямо пропорционален напряжению между его концами (зажимами) и обратно пропорционален сопротивлению провода. Выражение (1-18) было найдено опытным путем в первой половине XIX в. и представляет собой закон Ома — один из основных законов электротехники.

1-6

Сопротивление

Сопротивление и удельное сопротивление. При прохождении тока по проводу свободные электроны, перемещаясь под действием сил электрического поля, сталкиваются с атомами и молекулами провода и тормозятся, т. е. они испытывают противодействие своему движению вдоль провода, которое и называется сопротивлением провода. Согласно закону Ома сопротивление провода (участка цепи) равно отношению напряжения на концах провода к силе тока в нем

$$r = U/I, \quad (1-20)$$

откуда единица сопротивления

$$[r] = \left[\frac{U}{I} \right] = \frac{B}{A} = \text{Ом}.$$

Единица сопротивления В/А называется ом (Ом). Сопротивление в 1 Ом имеет провод, в котором устанавливается ток 1 А при напряжении на его концах 1 В. Часто применяются кратные единицы: килоом (1 кОм = 10^3 Ом) и мегом (1 МОм = 10^6 Ом).

Величина, обратная сопротивлению, называется **проводимостью**:

$$g = 1/r. \quad (1-21)$$

Единица проводимости обратна ому и называется **сименс (См)** $[g] = 1/\text{Ом} = \text{См}$.

Величина, обратная удельной проводимости, называется **удельным сопротивлением**:

$$\rho = 1/\gamma. \quad (1-22)$$

Выразив в формуле (1-19) удельную проводимость γ через удельное сопротивление, получим:

$$r = \frac{l}{\gamma S} = \rho \frac{l}{S}. \quad (1-23)$$

Из (1-23) следует, что сопротивление провода зависит от его длины l , площади поперечного сечения S и от удельного сопротивления ρ , которое в свою очередь зависит от материала провода и его температуры.

Из уравнения (1-23) удельное сопротивление $\rho = rS/l$.

Удельное сопротивление численно равно сопротивлению провода r , если длина l и поперечное сечение его S имеют единичные значения, другими словами, удельное сопротивление представляет собой сопротивление проводника единичного объема.

Из выражений (1-18) и (1-23) следует, что $U = Ir = I\rho l/S$, таким образом, сопротивление проводника наряду с силой тока определяет работу перемещения по проводнику единичного заряда (1-3). Чем больше длина провода, чем меньше его сечение, или, что то же, чем больше плотность тока, тем больше работа по перемещению единичного заряда.

Единица удельного сопротивления в системе СИ $[\rho] = [rS/l] = \text{Ом} \cdot \text{м}^2/\text{м} = \text{Ом} \cdot \text{м}$. Значения удельного сопротивления при такой единице измерения для металлов выражаются очень малыми числами, что неудобно. Поэтому единицу удельного сопротивления определяют (при температуре 20°C), измеряя длину провода в метрах, а поперечное сечение — в квадратных миллиметрах. В этом случае единица удельного сопротивления $[\rho] = \text{Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$, причем $1 \text{ Ом} \cdot \text{м} = 10^6 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$. Соответственно единица удельной проводимости $[\gamma] = \text{м}/(\text{Ом} \cdot \text{мм}^2)$.

В обладающих огромным удельным сопротивлением диэлектриках ток, проходящий через толщу, или, как говорят, через объем материала, — **объемный ток** I_V соизмерим с то-

ком, который идет по поверхности диэлектрика — с поверхностным током I_S . В соответствии с этим имеются два понятия: объемное сопротивление и поверхностное сопротивление.

Объемный ток в диэлектрике

$$I_V = \frac{U}{r_V} = \frac{U}{\rho_V l / S}. \quad (1-24)$$

Под удельным объемным сопротивлением ρ_V понимают обычно величину, численно равную сопротивлению диэлектрика сечением $S = 1 \text{ см}^2$ и длиной $l = 1 \text{ см}$. Тогда единицей объемного удельного сопротивления служит Ом·см, что вытекает из выражения

$$[\rho_V] = [r_V S / l] = \text{Ом} \cdot \text{см}^2 / \text{см} = \text{Ом} \cdot \text{см},$$

причем $1 \text{ Ом} \cdot \text{м} = 100 \text{ Ом} \cdot \text{см}$. Для большинства диэлектриков объемное удельное сопротивление лежит в границах 10^{-10} — $10^{-20} \text{ Ом} \cdot \text{см}$. Поверхностный ток

$$I_S = \frac{U}{r_S} = \frac{U}{\rho_S l / d}.$$

Под удельным поверхностным сопротивлением диэлектрика понимают величину, численно равную сопротивлению поверхности шириной $d = 1 \text{ см}$ и длиной $l = 1 \text{ см}$. Единицей удельного поверхностного сопротивления служит Ом, что следует из выражения

$$[\rho_S] = [r_S d / l] = \text{Ом} \cdot \text{см} / \text{см} = \text{Ом}.$$

Резистор. Устройства, которые включаются в электрическую цепь для ограничения или регулирования тока, называются резисторами. Резисторы бывают регулируемые и нерегулируемые, проволочные и непроволочные.

Регулируемый проволочный резистор называют реостатом. Один из типов непроволочных резисторов (рис. 1-7, а) состоит из керамической трубки с нанесенным на ее поверхность слоем полупроводника. Проводящий слой покрывается водостойкой эмалью. На концах трубки укрепляются латунные хомутики — выводы.

Обмотки реостатов и нагревательных приборов изготавливаются из сплавов с большим удельным сопротивлением, например из нихрома, фехрала. Это дает возможность при малой длине получить нужное сопротивление. Более корот-

кий провод экономичней, его удобнее размещать в нагревателе.

Проволочный нерегулируемый резистор представляет собой одну или несколько спиралей из голой проволоки с большим удельным сопротивлением, укрепленных неподвижно на изолирующей конструкции, например на керамической трубке.

Реостаты изготавливаются с плавной и ступенчатой регулировкой. В первом случае реостат представляет собой проволочную спираль (рис. 1-7, б), укрепленную на отрезке трубы из непроводящего материала. Один зажим реостата 1

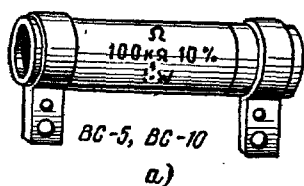
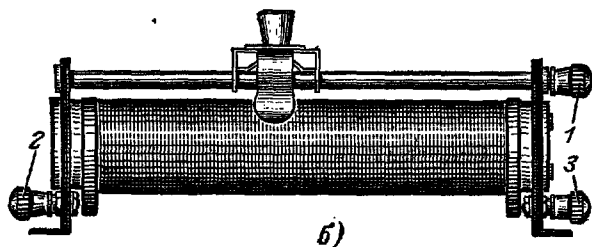


Рис. 1-7. Резисторы.

а — с постоянным сопротивлением; б — с переменным сопротивлением (реостат).



соединен с подвижным контактом, два других 2 и 3 — с концами спирали. Перемещая подвижный контакт, можно изменять сопротивление между зажимами 1 и 2.

Рассмотренные реостаты громоздки и изготавливаются на довольно значительные токи (до 10 А), они не пригодны для радиосхем и схем автоматики; в них применяют непроволочные переменные резисторы (рис. 1-8). В пластмассовом корпусе 1 укреплена дужка 2 из гетинакса, на поверхности которой нанесен тонкий проводящий слой. Концы слоя заклепками 3 соединены с выводами 4 и 5. Металлическая втулка 6 с гайкой служит для крепления резистора. Через втулку проходит ось 7 с укрепленной на ее конце гетинаксовой пластиной 8 и проволочной щеткой 9, соединенной с зажимом 10. При повороте оси сопротивление слоя между щеткой 9, т. е. зажимом 10 и зажимом 4, а также между за-

жимами 10 и 5 изменяется. Упор 11 ограничивает поворот оси.

Резисторы и реостаты изготавливаются на различные токи и сопротивления.

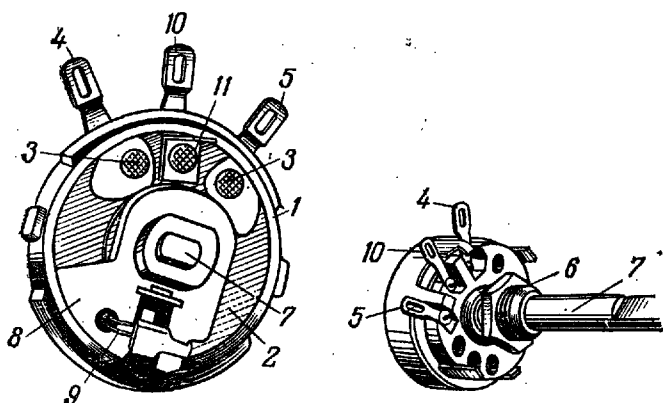


Рис. 1-8. Переменный непроволочный резистор.

Пример 1-1. Определить длину нихромовой ленты для обмотки нагревательного прибора с напряжением 130 В и током 4 А. Для нихромовой ленты допустима плотность тока 10 А/мм².

Решение. Сечение ленты

$$S = I/\delta = 4/10 = 0,4 \text{ мм}^2.$$

Сопротивление обмотки

$$r = U/I = 130/4 = 32,5 \text{ Ом}.$$

Длина ленты

$$l = rS/\rho = 32,5 \cdot 0,4/1,1 = 11,8 \text{ м}.$$

1-7

Зависимость сопротивления от температуры

Повышение температуры металлического провода вызывает увеличение скорости теплового движения частиц. Это приводит к увеличению числа столкновений свободных электронов и, следовательно, к уменьшению времени их свободного пробега τ . Уменьшение τ , как следует из (1-16), уменьшает удельную проводимость, или, что то же, увеличивает удельное сопротивление материала. При нагревании провода действительно наблюдается увеличение удельного сопротивления самого провода.

Нагревание электролитов и угля кроме уменьшения времени τ увеличивает концентрацию носителей зарядов n ; в результате удельное сопротивление их при повышении температуры уменьшается.

В узких границах изменения температуры $0-100^\circ\text{C}$ относительное приращение сопротивления Δr большинства металлических проводов пропорционально приращению температуры $\Delta\theta = (\theta_2 - \theta_1)$. Обозначив через r_1 и r_2 сопротивления при температурах θ_1 и θ_2 , можно написать:

$$\frac{\Delta r}{r_1} = \frac{r_2 - r_1}{r_1} = \alpha \Delta\theta = \alpha (\theta_2 - \theta_1), \quad (1-25)$$

откуда

$$r_2 = r_1 + r_1 \alpha (\theta_2 - \theta_1). \quad (1-26)$$

Коэффициент пропорциональности α , называемый температурным коэффициентом сопротивления, численно равен относительному приращению сопротивления при нагревании проводника на 1°C . Температурный коэффициент сопротивления чистых металлов равен приблизительно $0,004^\circ\text{C}^{-1}$, что означает увеличение их сопротивления на 4% при повышении температуры на 10°C . Ряд сплавов, в том числе манганин, константан (табл. 1-1), имеют большое удельное сопротивление и ничтожно малый температурный коэффициент сопротивления.

Таблица 1-1

Материал	Плотность, г/см ³	Предел прочности на разрыв, МПа	Температура плавления, $^\circ\text{C}$	Удельное сопротивление 10^{-8} Ом·м	Среднее значение температурного коэффициента от 0 до 100°C , $^\circ\text{C}^{-1}$
Алюминий	2,7	137—215	657	0,029	0,004
Бронза	8,8—8,9	49—588	900	0,021—0,4	0,004
Вольфрам	18,7	4067	3370	0,056	0,0044
Железо	7,7	—	1520	0,13—0,3	0,006
Константан	8,8	392	1200	0,4—0,51	0,000005
Латунь	8,1	392	900	0,07—0,08	0,002
Манганин	8,1	539	960	0,42	0,000006
Медь	8,9	245—392	1083	0,0175	0,004
Нихром	8,2	683	1360	1,1	0,00015
Сталь	7,8	784—1470	1400	0,13—0,25	0,006
Фехраль	7,6	—	1450	1,4	0,00028
Хромаль	7,1	784	1500	1,3	0,00004

Это объясняется неправильной структурой сплавов и малым временем свободного пробега электронов. Указанные сплавы широко применяются в электроизмерительной технике для изготовления образцовых катушек сопротивления и резисторов с постоянным (независимым от температуры) значением сопротивления. Отрицательным температурным коэффициентом сопротивления обладают уголь и электролиты, для которых $\alpha \approx -0,02$ на 1°C .

Пример 1-2. Определить сопротивление медного провода линии электропередачи сечением 50 мм^2 , длиной 100 км при температурах 20 и -5°C .

Решение. Сопротивление провода при температуре 20°C , для которой дано значение удельного сопротивления (табл. 1-1):

$$r_1 = \rho l / S = 0,0175 \cdot 100\,000 / 50 = 35 \text{ Ом.}$$

Сопротивление провода при температуре -5°C определим по (1-26)

$$r_2 = r_1 + r_1 \alpha \Delta \theta = 35 + 35 \cdot 0,004 (-25) = 31,5 \text{ Ом.}$$

Пример 1-3. Определить, на сколько процентов изменится сопротивление алюминиевого провода при повышении его температуры на 50°C .

Решение. Выраженное в процентах приращение сопротивления

$$\frac{\Delta r}{r} 100\% = \alpha \Delta \theta \cdot 100\% = 0,004 \cdot 50 \cdot 100\% = 20\%.$$

Пример 1-4. Определить температуру медной обмотки, если при начальной температуре 20°C ее сопротивление $r_1 = 1,20 \text{ Ом}$, а при искомой температуре $r_2 = 1,44 \text{ Ом}$.

Решение. Из уравнения (1-26) найдем:

$$\theta_2 = \frac{1}{\alpha} \frac{r_2 - r_1}{r_1} + \theta_1 = \frac{1}{0,004} \cdot \frac{1,44 - 1,20}{1,20} + 20 = 70^\circ \text{C.}$$

Сверхпроводимость. В ряде металлов и сплавов при понижении температуры до очень низких значений порядка единиц или десятка градусов Кельвина ($K \approx -273^\circ \text{C}$) возникает явление сверхпроводимости. Температура, при которой наступает это явление, называется критической ($T_{\text{кр}}$) или «точкой скачка».

При понижении температуры до критической по проводнику может проходить электрический ток при отсутствии напряжения между его концами, иначе говоря, электрическое сопротивление проводника падает практически до нуля. Проводник, находящийся в таком состоянии, называется **сверхпроводником**.

В сверхпроводнике даже при значительных плотностях тока совершенно не выделяется тепло. Это означает, что электроны в сверхпроводнике при своем направленном дви-

жении не встречаются никаких препятствий и не испытывают столкновений.

Второй особенностью сверхпроводника является невозможность существования в нем магнитного поля. Если магнитное поле имело место при температурах более высоких, чем критическая, то при переходе через критическую температуру оно исчезает. Отсутствие магнитного поля в сверхпроводнике объясняется тем, что в его поверхностном слое (10^{-5} см) появляются токи, магнитное поле которых компенсирует внешнее магнитное поле.

Сильное внешнее магнитное поле, так же как и сильное магнитное поле, вызванное большим электрическим током, проходящим по самому сверхпроводнику, разрушает состояние сверхпроводимости. Последнее обстоятельство затрудняет получение в сверхпроводнике больших токов и больших плотностей тока.

В настоящее время в Советском Союзе и за рубежом ведутся интенсивные работы по изучению и использованию явления сверхпроводимости в электроэнергетике и электронике и, в частности, по созданию сверхпроводящих установок.

1-8

Проводниковые материалы

Электротехнические проводниковые материалы делятся на две группы.

К первой группе относятся материалы с малым удельным сопротивлением. Они должны иметь малый температурный коэффициент сопротивления, достаточную механическую прочность и устойчивость в отношении коррозии.

Медь широко применяется вследствие малого удельного сопротивления (см. табл. 1-1), достаточной механической прочности, хорошей обрабатываемости и стойкости к коррозии. Она применяется в виде проволоки, проводов различного назначения, шин, полос. Электролитическая медь содержит не более 0,1% примесей.

Кроме чистой меди в электротехнике применяются ее сплавы с другими металлами (кадмий, бериллий, цинк) — бронза, латунь.

Алюминий, несмотря на худшие электрические и механические свойства (см. табл. 1-1), получил очень широкое распространение. При замене медных проводов алюминиевыми той же длины с одинаковыми сопротивлениями сечение последних на 60% больше, а масса на 52% меньше медных.

Для линий электропередачи применяют алюминиевые провода с внутренними стальными проволоками (сталеалюминиевые). Сталь вследствие большого удельного сопротивления применяется только для проводов линий небольшой мощности и некоторых линий связи.

Ко второй группе материалов с высоким удельным сопротивлением относятся сплавы: никель — хром — железо (нихром); железо —

хром — алюминий (фехраль) и др. Из-за стойкости к высоким температурам они применяются для изготовления нагревательных элементов, реостатов и т. д.

Манганин — сплав меди 86%, марганца 12% и никеля 2%. Малый температурный коэффициент сопротивления и большое удельное сопротивление манганина обеспечили применение его в измерительной технике (образцовые катушки сопротивлений и др.).

Электротехнический уголь в основном состоит из графита. Он применяется для щеток электрических машин, электродов, непроволочных резисторов.

1-9

Электропроводность и энергетические уровни

Каждый электрон в атоме может обладать только определенными значениями энергии, т. е. находиться только на разрешенных энергетических уровнях, поскольку изменение энергии электрона может происходить только определенными порциями — квантами. Электроны с близкими энергетическими уровнями составляют оболочку атома. Таких оболочек может быть несколько, а число электронов в каждой оболочке может быть различным, но не превышающим для каждой из них определенного количества.

Электроны, расположенные ближе к ядру, обладают меньшими энергиями, т. е. находятся на более низких энергетических уровнях. Переход электрона на более высокий уровень требует затраты энергии (на преодоление взаимного притяжения между электроном и ядром), т. е. более удаленные от ядра электроны обладают большими энергиями. Переход электрона на более низкий уровень сопровождается выделением избытка энергии в виде излучений. В веществе, состоящем из совокупности атомов, вследствие влияния соседних атомов энергетические уровни несколько изменяются, образуя энергетические зоны. Эти зоны отделяются областями, в которых электроны не могут находиться, поэтому они называются запрещенными зонами. Электроны атома стремятся занять ближайшие к ядру орбиты с наименьшими энергетическими уровнями. Если у атома не хватает электронов для заполнения всех уровней, то внешние орбиты могут оказаться частично или полностью не занятыми. Следовательно, и энергетические зоны, соответствующие разрешенным уровням, могут быть заполненными или свободными.

Валентная, наиболее удаленная от ядра оболочка имеет электроны, уровни которых находятся в валентной зоне. Электроны, попавшие из валентной оболочки в зону с боль-

шими энергетическими уровнями (в зону проводимости) становятся вследствие большой энергии свободными и могут перемещаться в межатомном пространстве. Между валентной зоной и зоной проводимости находится запрещенная зона, эквивалентная энергетическая ширина которой ΔW измеряется в электронвольтах (эВ).

Различие электрической проводимости проводников, диэлектриков и полупроводников вызывается особенностями их строения. Согласно зонной теории твердого тела у металлических проводников ширина запрещенной зоны ΔW равна нулю (рис. 1-9, а) или валентная зона и зона проводимости перекрывают друг друга. Вследствие этого в метал-

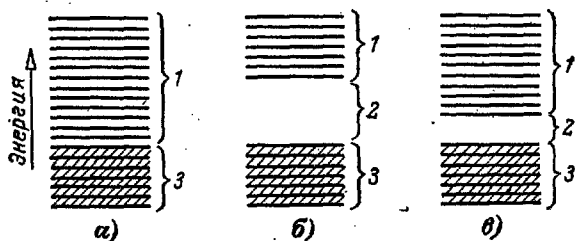


Рис. 1-9. Энергетические уровни.

а — проводников; б — диэлектриков; в — полупроводников;
1 — зона проводимости; 2 — запрещенная зона; 3 — валентная зона.

лических проводниках легко образуются свободные электроны, концентрация их очень велика (около 10^{22} в 1 см^3), велика и удельная проводимость проводников.

В металлическом проводнике под действием приложенного к нему электрического напряжения движение свободных электронов упорядочивается и они дрейфуют в направлении, противоположном направлению электрического поля, т. е. в проводнике возникает ток.

В диэлектриках (рис. 1-9, б) ширина запрещенной зоны ΔW равна 2—10 эВ, такая широкая зона делает практически невозможным переход валентных электронов в зону проводимости. Таким образом, концентрация свободных электронов, а значит, и удельная проводимость диэлектриков будут ничтожно малы.

В полупроводниках (рис. 1-9, в) ширина запрещенной зоны ΔW составляет 0,01—2 эВ. При низких температурах такие вещества представляют собой диэлектрики, а при нормальных температурах часть электронов валентной зоны

может переходить в зону проводимости; получается достаточная проводимость, которая с повышением температуры увеличивается. Кроме того, удельную проводимость полупроводников можно изменять в очень широких границах путем ничтожных добавок различных примесей.

1-10

Электрическая цепь и ее основные элементы

Совокупность устройств, предназначенных для создания и прохождения в них электрического тока, называется электрической цепью.

К основным элементам электрической цепи относятся источники электрической энергии, которые иногда называют источниками электродвижущей силы (э. д. с.) или источниками тока, приемники электрической энергии или потребители устройства для передачи энергии от источников к приемникам.

Источниками электрической энергии служат устройства, в которых происходит преобразование различных видов энергии в электромагнитную, или, как говорят сокращенно, в электрическую. В качестве источников энергии применяются преимущественно электрические генераторы, в которых механическая энергия преобразуется в электрическую, первичные (гальванические) элементы и аккумуляторы, в которых химическая энергия преобразуется в электрическую, термоэлементы и фотоэлементы, преобразующие соответственно тепловую и световую энергию в электрическую, наконец магнетогидродинамический генератор, в котором тепловая энергия превращается в энергию движения плазмы, а затем в электрическую.

Приемники электрической энергии преобразуют электрическую энергию в другие виды энергии, например, электродвигатели — в механическую, электрические печи и нагревательные приборы — в тепловую, электрические лампы — в световую и тепловую; электролитические ванны — в химическую.

Устройствами для передачи электрической энергии от источников к приемникам являются линии передачи, электрические сети и просто провода. Проводом называется металлическая проволока, изолированная или неизолированная (голая). Провода выполняются из меди, алюминия или стали.

Токопровод электрической цепи, т.е. путь, по которому проходит электрический ток, на всем протяжении должен иметь и з о л я ц и ю, устраняющую возможность прохождения тока по каким-либо побочным путям. Изоляция, кроме того, ограждает людей от прикосновения к участкам токопровода, находящимся под потенциалом, отличным от потенциала земли.

Таблица 1-2

Условные графические обозначения, применяемые в электрических схемах

Наименование	Условный знак	Наименование	Условный знак
Произвольный источник электрической энергии (источник э.д.с.)		Провод, кабель, шина электрической цепи	
Электрический генератор постоянного тока		Соединение элементов	
Химический источник энергии		Соединение разъёмное	
Электрический двигатель постоянного тока		Выключатели одноплюсный и двухполюсный	
Электрическая лампа		Предохранитель плавкий	
Произвольный приемник электрической энергии (резистор)		Амперметр	
Регулируемый резистор, реостат		Вольтметр	

При направленном движении заряженных частиц (электронов, ионов) в электрической цепи происходит столкновение их с ионами и молекулами проводников. Направленное движение частично превращается в беспорядочное, и кинетическая энергия частью идет на нагрев проводников, частично рассеивается в окружающую среду. По-

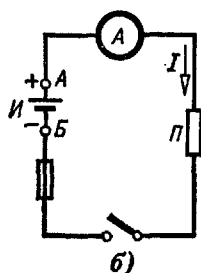
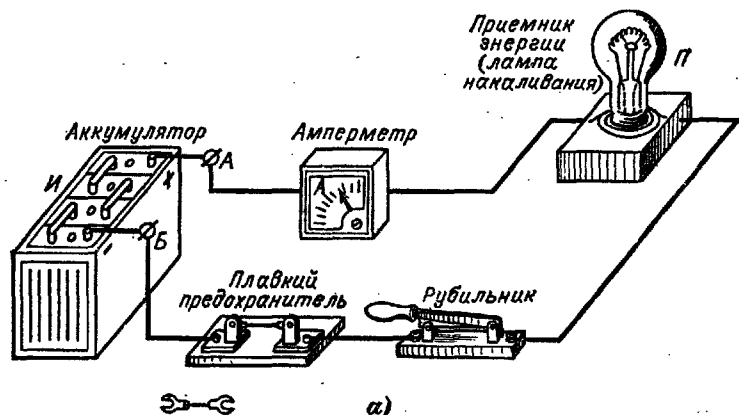


Рис. 1-10. Простейшая электрическая цепь (а) и ее схема (б).

этому все элементы цепи оказывают сопротивление электрическому току или, как обычно говорят, обладают сопротивлением.

Кроме рассмотренных основных элементов электрические цепи содержат и другие необходимые для их эксплуатации элементы; к ним относятся коммутационная аппаратура, предназначенная для включения и отключения (рубильники, выключатели, переключатели), аппаратура защиты (реле, плавкие предохранители) и, наконец, измерительные приборы (амперметры, вольтметры и т. п.).

Графическое изображение электрической цепи, показывающее последовательность соединения отдельных элементов и отображающее свойства электрической цепи, называется схемой электрической цепи.

Рассмотренные элементы электрической цепи на электрических схемах обозначаются условными знаками, приведенными в табл. 1-2.

На рис. 1-10, а показана одна из простейших электрических цепей. Источник энергии I (аккумулятор на рис. 1-10, а) представляет собой внутренний участок цепи; вся остальная часть цепи, состоящая из потребителя Π (лампа накаливания), соединительных проводов, предохранителя, рубильника, амперметра, является внешним участком цепи.

1-11

Электродвижущая сила

Большая часть электрической энергии вырабатывается электромеханическими генераторами.

Допустим, что прямолинейный провод AB (рис. 1-11), укрепленный на вращающейся части — роторе генератора, движется в магнитном поле (изображенном на рисунке магнитными линиями) с постоянной скоростью v в направлении, перпендикулярном магнитным линиям. При этом на каждый свободный электрон (заряд) провода AB действует сила, называемая силой электромагнитной индукции $F_{\text{и}}$ (подробнее см. § 6-1).

Отношение силы индукции, действующей на какую-либо заряженную частицу, к ее заряду q представляет напряженность поля индукции

$$\mathcal{E}_{\text{и}} = F_{\text{и}}/q. \quad (1-27)$$

Вектор напряженности поля индукции направлен перпендикулярно вектору скорости v и магнитным линиям (рис. 1-11), т. е. по оси провода. На рис. 1-11 векторы $F_{\text{и}}$ и $\mathcal{E}_{\text{и}}$ направлены противоположно, так как показана сила $F_{\text{и}}$, действующая на электрон (отрицательный заряд), а направление вектора $\mathcal{E}_{\text{и}}$ по определению показывает направление силы, действующей на положительный заряд.

Если векторы напряженности поля индукции во всех точках поля равны и направлены параллельно друг другу, то поле однородно. Такое поле и создается в проводнике в рассматриваемом случае.

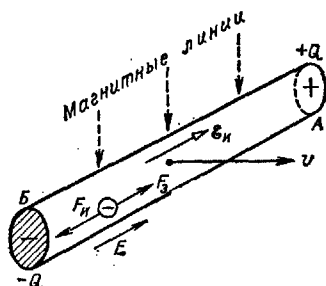


Рис. 1-11. Разделение электрических зарядов под действием сил электромагнитной индукции.

Произведение напряженности однородного поля индукции, вектор которого направлен по оси провода, и длины этого провода AB выражает э. д. с. индукции E , которая возникает при движении провода. Таким образом, э. д. с.

$$E = \mathcal{E}_n l. \quad (1-28)$$

Так как напряженность поля численно равна силе, с которой поле действует на единичный заряд, то э. д. с. численно равна работе, совершаемой силами индукции при переносе единицы заряда на участке AB . Электродвижущая сила измеряется в вольтах, т. е. в тех же единицах, что и электрическое напряжение.

В проводе AB (рис. 1-11) под действием сил поля индукции электроны перемещаются на конец B , создавая здесь избыточный отрицательный заряд. На другом конце провода A вследствие недостатка электронов возникнет положительный заряд. Эти заряды внутри провода создадут электрическое поле, и на каждый электрон, кроме силы индукции, будет действовать также сила электрического поля F_e (кулоновская), направленная противоположно F_n . Если напряженность кулоновского электрического поля $\mathcal{E}_e$ достигнет значения напряженности поля индукции $\mathcal{E}_n$, то силы, действующие на каждый заряд внутри провода, F_e и F_n уравновесят друг друга и движение зарядов прекратится.

Электрическое напряжение на концах разомкнутого провода, или, что то же, разность электрических потенциалов на разомкнутых зажимах генератора

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}_e l_{AB} = \mathcal{E}_n l_{AB} = E. \quad (1-29)$$

Таким образом, напряжение на разомкнутых зажимах генератора или источника питания равно его э. д. с.

Электродвижущая сила E направлена в источнике так же, как и сила F_n , действующая на положительный заряд, или как направлена напряженность поля индукции $\mathcal{E}_n$, т. е. от отрицательного зажима источника к положительному (в противоположную сторону силе F_n на рис. 1-11, действующей на отрицательный заряд.)

В качестве источников питания применяются и химические источники электрической энергии — гальванические элементы и аккумуляторы (§ 1-12), в которых э. д. с. возникает под действием неэлектрических (сторонних) сил.

Кроме электромеханических генераторов к источникам электрической энергии относятся: гальванические или первичные элементы, аккумуляторы, термогенераторы или термоэлементы, фотоэлементы (§ 3-7), магнитогидродинамические генераторы (§ 6-12), ламповые генераторы (§ 7-16) и др.

Гальванические (первичные) элементы. Между электродом и электролитом, в который он погружен, всегда возникает некоторая разность потенциалов, зависящая от материала электрода и состава электролита.

Появление разности потенциалов объясняется тем, что вещество электрода под действием химических сил растворяется в электролите (например, цинк в растворе серной кислоты) и положительные ионы его переходят в электролит. Преобладание отрицательных зарядов на электроде и положительных в прилегающем к нему пограничном слое электролита вызывает появление двойного электрического слоя, а следовательно, и электрического поля на границе электрода, направленного от электролита к электроду. Электрические силы этого поля противодействуют переходу положительных ионов с электрода в раствор. Когда силы электрического поля уравниваются химическими (сторонними по отношению к электрическому полю) силами, растворение цинка прекратится. Возникает разность потенциалов между электродом и электролитом, называемая электродным потенциалом.

Помещая в электролит два электрода из разных металлов, получим между ними разность электродных потенциалов — э. д. с. $E = \varphi_1 - \varphi_2$. Следовательно, устройство, состоящее из двух разнородных электродов, помещенных в электролит, является источником э. д. с. — гальваническим или первичным элементом, в котором происходит процесс преобразования (необратимый) химической энергии в электрическую.

Один из простейших гальванических элементов, элемент Вольта (рис. 1-12), состоит из погруженных в водный раствор серной кислоты H_2SO_4 , цинкового Zn и медного Cu электродов. Первый имеет отрицательный заряд (катод), так как при растворении положительные ионы цинка переходят в электролит, второй — положительный (анод) за счет положительного заряда электролита. При разомкнутой внешней цепи э. д. с. на зажимах элемента, равная раз-

ности электродных потенциалов меди и цинка, составляет около 1,1 В.

При подключении к элементу внешнего замкнутого участка цепи через элемент проходит ток. Свободные электроны по внешнему участку переходят на медный электрод, вследствие чего электрическое поле между цинком и электролитом становится слабее, так что нарушается равновесие электрических и сторонних сил. Под действием последних ионы цинка снова начинают переходить в электролит, а положительные ионы водорода перемещаются к медному электроду.

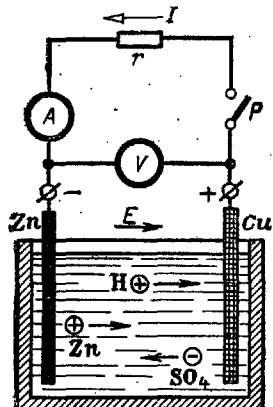


Рис. 1-12. Гальванический элемент Вольта и схема его включения.

Ионы водорода отнимают у анода электроны и превращаются в нейтральные атомы водорода. Они покрывают тонким слоем анод, вызывая увеличение внутреннего сопротивления элемента и уменьшение его э. д. с. Это явление называется поляризацией элемента. Водородный слой у анода устраняют, применяя деполяризаторы — вещества, легко отдающие кислород (например, перекись марганца), который, соединяясь с водородом, образует воду.

Большое распространение получили сухие и наливные марганцово-цинковые элементы. По конструкции они делятся на стаканчиковые и галетные. В элементе стаканчиковой конструкции цинковый электрод имеет форму стакана (рис. 1-13, а), внутри которого расположен положительный электрод — угольный стержень. Угольный электрод окружен деполяризатором из двуокиси марганца, графита и сажи. Цинковый стакан заполняется электролитом — водным раствором хлористого аммония (нашатыря) с добавлением крахмала в качестве загустителя. Электродвижущая сила элемента $E = 1,5$ В.

Номинальным разрядным током элемента называется наибольший длительный ток, допускаемый при его эксплуатации. Емкостью элемента называется количество электричества, выраженное в ампер-часах (А·ч), которое можно получить от элемента за весь период его работы. Как отдельные элементы, так и собранные из них батареи широко применяются в радиотехнике, аппаратуре

проводной связи, для карманных фонарей, слуховых аппаратов и т. д.

Последнее время большое распространение получили малогабаритные сухие герметичные ртутно-цинковые элементы. Активная масса положительного электрода ртутно-цинкового элемента (рис. 1-13, б) состоит из окиси ртути с добавлением графита, а активная масса отрицательного электрода — из порошкообразного цинка с добавлением ртути. Первая из них 1 запрессовывается в корпус элемента 3, а вторая 2 — в крышку 4. Между корпусом и

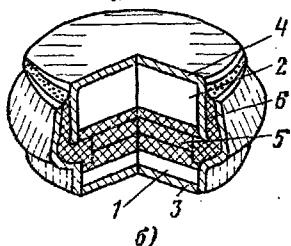
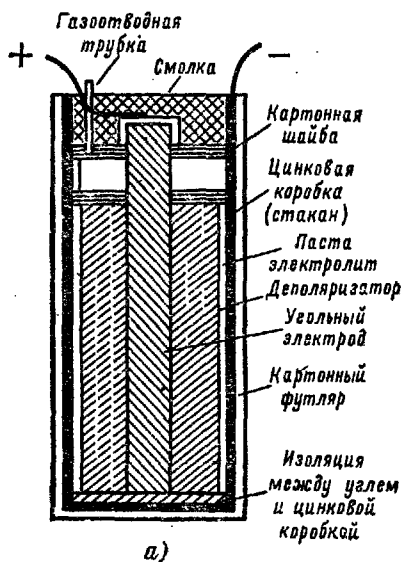
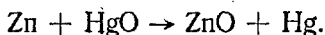


Рис. 1-13. Первичные элементы.

а — марганцево-цинковый, стаканчиккового типа (МЦЭ); б — ртутно-цинковый, малогабаритный, герметичный (РЦ).

крышкой расположена пористая бумага 5, пропитанная электролитом — раствором едкого кали с окисью цинка. Для изоляции крышки от корпуса и для герметизации элемента применяется резиновая прокладка 6.

Химическая реакция протекает по уравнению



Напряжение (э. д. с.) элемента (примерно 1,3 В при токе нагрузки в несколько десятков миллиампер) сохраняется стабильным в течение одного года и больше. Внутреннее сопротивление элемента типа РЦ-85 около 10 Ом, масса 40 г, диаметр 30 мм, высота 14 мм.

Вследствие малых размеров и массы, устойчивости к тряске и вибрациям, а также стабильности напряжения элементы нашли широкое применение в измерительной технике, как опорные (образцовые) элементы, а также в аппаратуре, собранной на транзисторах.

Аккумуляторы (вторичные элементы). Гальванические элементы, у которых после их разряда возможен обратный процесс заряда с преобразованием электрической энергии в химическую, называются аккумуляторами или вторичными элементами. Наибольшее распространение

получили аккумуляторы свинцовые (кислотные) и кадмиево-никелевые, железо-никелевые и серебряно-цинковые (щелочные).

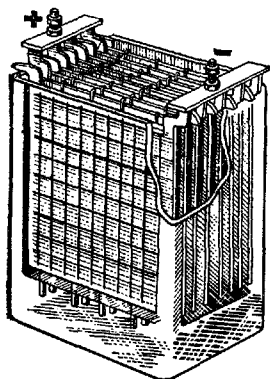


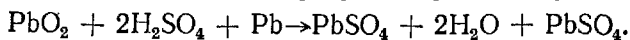
Рис. 1-14. Свинцовый аккумулятор.

Свинцовый аккумулятор состоит из двух блоков — пластин (рис. 1-14), погруженных в электролит (25—35 %-ный водный раствор серной кислоты). Положительные пластины из металлического свинца для увеличения поверхности соприкосновения с электролитом имеют ребристую поверхность или выполнены из свинцовых каркасов, заполненных активной массой (перекись свинца). Отрицательные пластины представляют собой свинцовые каркасы, заполненные активной

массой в виде губчатого свинца. Пластины после изготовления подвергаются электролитической обработке — формовке.

При разряде, т. е. в режиме, когда заряженный аккумулятор замкнут на внешнюю цепь, проходит разрядный ток и аккумулятор работает в режиме источника. При этом активная масса положительной пластины, состоящая из перекиси свинца PbO_2 , и активная масса отрицательной пластины — губчатый свинец Pb переходят в сернокислые соединения свинца $PbSO_4$ с выделением воды. Это приводит к уменьшению концентрации электролита, его проводимости и э. д. с. аккумулятора.

Химическая реакция при разряде выражается уравнением



Напряжение (э. д. с.) аккумулятора с 2,2 В сначала быстро падает до 2 В (рис. 1-15), а затем медленно до 1,8 В,

после чего необходимо прекратить разряд во избежание сульфатации пластин — образования на них нерастворимого сернокислого свинца.

При заряде аккумулятора через него должен проходить ток, имеющий направление, противоположное разрядному току, для чего зажимы источника, заряжающего аккумулятор, соединяют с одноименными зажимами аккумулятора.

При заряде аккумулятора происходит обратная химическая реакция и на электродах восстанавливаются перекись свинца и губчатый свинец. Напряжение сначала быстро увеличивается до 2,2 В, затем медленно до 2,3 В и, наконец, до 2,6—2,7 В, при котором следует прекращать заряд. При этом напряжении наблюдается интенсивное выделение водорода, пузырьки которого, поднимаясь на поверхность электролита, создают впечатление его кипения.

Внутреннее сопротивление свинцовых аккумуляторов мало, поэтому ток короткого замыкания недопустимо велик.

Емкость аккумулятора, так же как и первичного элемента, определяется в ампер-часах за время нормального разряда.

Емкость аккумулятора зависит от количества активного вещества аккумулятора и его использования, т. е. от конструкции и режима работы.

Коэффициентом отдачи аккумулятора называется отношение отданного им при разряде количества электричества к полученному им при заряде, т. е.

$$\eta_0 = Q_p / Q_z. \quad (1-30)$$

Коэффициент отдачи свинцового аккумулятора 0,9—0,96.

Коэффициентом полезного действия аккумулятора называется отношение полученной от него при разряде энергии W_p к затраченной при заряде W_z , т. е.

$$\eta = W_p / W_z. \quad (1-31)$$

Коэффициент полезного действия свинцового аккумулятора 0,75—0,8.

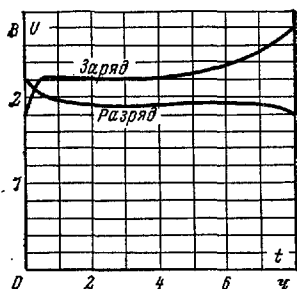


Рис. 1-15. Кривые заряда и разряда свинцового аккумулятора.

Во избежание сульфатации аккумулятора необходимо содержать его в заряженном состоянии и периодически проверять уровень и плотность электролита, напряжение под нагрузкой, а при необходимости дозаряжать. Эксплуатация аккумулятора, его заряд и разряд должны производиться согласно инструкции завода-изготовителя.

Щелочные аккумуляторы получили такое название по их электролиту — щелочи, а именно 21%-ному водному раствору едкого кали KOH или едкого натра NaOH. Аккумулятор состоит из двух блоков — пластин, расположенных в стальном сосуде с электролитом (рис. 1-16). Пластины —

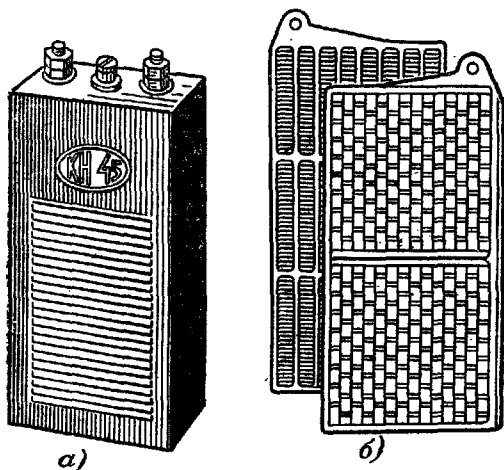


Рис. 1-16. Щелочной кадмиево-никелевый аккумулятор.

а — общий вид; б — пластины.

это стальные рамки с вставленными в них стальными корбочками, заполненными активной массой. Активная масса отрицательных пластин кадмиево-никелевых элементов состоит из губчатого кадмия, а железо-никелевых — из губчатого железа. Активная масса положительных пластин у обоих аккумуляторов состоит из гидрата окиси никеля Ni(OH)_2 .

При разряде гидрат окиси никеля переходит в гидрат закиси никеля, а губчатый кадмий (железо) — в гидрат его закиси.

Химическая реакция при разряде выражается уравнением



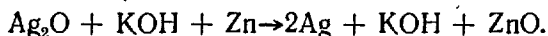
При заряде реакция идет в обратном направлении и, следовательно, происходит восстановление активной массы электродов. Концентрация электролита при разряде и заряде остается неизменной.

При разряде напряжение с 1,4 В сначала быстро уменьшается до 1,3 В, а затем медленно до 1,15 В (рис. 1-17); при этом напряжении разряд необходимо прекращать. При заряде напряжение с 1,15 В быстро увеличивается до 1,75 В, а затем после незначительного понижения медленно увеличивается до 1,85 В. Внутреннее сопротивление щелочных аккумуляторов больше, чем кислотных; поэтому они имеют более низкий к. п. д. $\eta = 0,5 \div 0,6$ и меньшую чувствительность к коротким замыканиям. Щелочные аккумуляторы имеют большую механическую прочность, больший срок службы и меньшую требовательность к уходу по сравнению с кислотными аккумуляторами.

Серебряно-цинковый аккумулятор состоит из двух блоков пластин, расположенных в пластмассовом баке с электролитом. Электроды аккумулятора представляют собой пористые пластины, положительная — из окиси серебра Ag_2O , а отрицательная — из цинка Zn . Электролит — водный раствор едкого кали (KOH) плотностью 1,4.

При разряде аккумулятора окись серебра переходит в металлическое серебро, а металлический цинк — в окись цинка.

Химическая реакция при этом выражается уравнением



При заряде имеет место обратный процесс. Напряжение вначале почти неизменно (1,65 В), а затем быстро повышается примерно до 1,9 В (рис. 1-18) и далее медленно до 2,1 В; при этом напряжении следует прекращать заряд. При разряде напряжение с 1,75 В медленно падает до 1,5 В и в конце разряда до 1,25 — 1 В; при этом напряжении разряд следует прекращать.

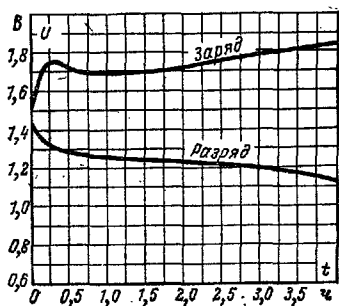


Рис. 1-17. Кривые заряда и разряда щелочного аккумулятора.

Из положительных свойств серебряно-цинковых аккумуляторов необходимо отметить: 1) значительно большие емкости и мощность на единицу массы по сравнению с другими типами аккумуляторов; 2) стабильное напряжение при разряде (1,5 В) и возможность получения очень больших токов при кратковременных разрядах; 3) высокий к. п. д. ($\eta = 0,85$).

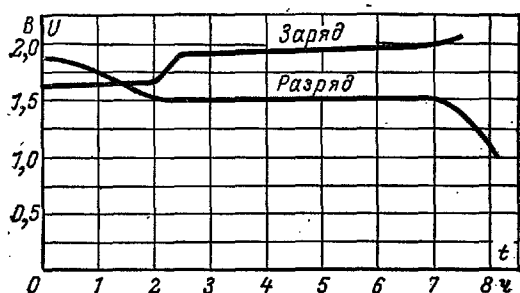


Рис. 1-18. Кривые заряда и разряда серебряно-цинкового аккумулятора.

Термогенераторы (термоэлементы). При соприкосновении двух различных металлов между ними возникает контактная э. д. с., которая зависит только от химического состава металлов, образующих пару, и температуры контакта.

Возникновение этой э. д. с. объясняется двумя причинами. Электроны проводимости в металле находятся в состоянии беспорядочного движения. Часть электронов, обладающих достаточно большой кинетической энергией, могут покинуть металл. При этом они совершают работу как против сил притяжения со стороны избыточного положительного заряда, возникающего в поверхностном слое металла в результате вылета электронов, так и против сил отталкивания со стороны ранее вылетевших электронов, образующих вблизи поверхности металла тонкий электронный слой. Работа, которая должна быть совершена при удалении электрона из металла, называется работой выхода. Она зависит от химической природы металла. Для чистых металлов она составляет несколько электронвольт, например: цезий 1,81 эВ; барий 2,1 эВ; вольфрам 4,4 эВ; ртуть 4,5 эВ; торий 3,35 эВ; никель 5,3 эВ.

Разность потенциалов $\Delta\varphi$ в пограничном слое металла равна отношению работы выхода A электрона из металла к абсолютной величине заряда электрона e , т. е.

$$\Delta\varphi = A/e, \quad (1-32)$$

и называется контактной разностью потенциалов между металлом и окружающей средой.

При соприкосновении двух различных металлов контактная разность потенциалов возникает между ними. Обозначим работу выхода электронов из первого металла A_1 , а из второго A_2 . Допустим, что $A_1 > A_2$. Электроны, обладающие большей кинетической энергией, будут переходить через поверхность раздела из первого металла во второй и из второго в первый. Но так как $A_1 > A_2$, то в первом металле появится избыток, а во втором недостаток электронов и возникнет контактная разность потенциалов, обусловленная различной величиной работы выхода. Контактная разность потенциалов между первым и вторым металлами

$$\varphi'_{12} = \varphi'_1 - \varphi'_2 = -\frac{A_1 - A_2}{e} = -\frac{A_{12}}{e}. \quad (1-33)$$

Знак минус объясняется тем, что при $A_1 > A_2$ получается $\varphi'_1 < \varphi'_2$, так как первый металл заряжается отрицательно, а второй положительно.

Второй причиной появления контактной разности потенциалов между двумя металлами является неодинаковая концентрация электронов проводимости (свободных электронов) в металлах, вследствие чего происходит диффузия электронов. Под действием сторонних сил электроны проводимости из металла с большей концентрацией переходят в металл с меньшей концентрацией электронов. В результате один металл заряжается положительно, а другой отрицательно. Между металлами возникает контактная разность потенциалов. Диффузия прекратится, когда сторонние силы уравновесятся электрическими.

Обозначив через n_1 и n_2 концентрацию электронов в первом и втором металлах, образующих пару, и через θ — абсолютную температуру стыка, контактную разность потенциалов можно выразить формулой

$$\varphi''_{12} = \varphi''_1 - \varphi''_2 = k\theta \ln n_1/n_2, \quad (1-34)$$

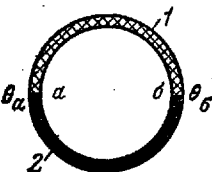
где $k = 2,87 \cdot 10^{-7}$ В на 1 К.

Полная контактная разность потенциалов

$$\begin{aligned}\varphi_{12} &= \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_{12}' + \varphi_{12}'' = \\ &= -\frac{A_1 - A_2}{e} + k\theta \ln \frac{n_1}{n_2}.\end{aligned}\quad (1-35)$$

Формула (1-35) показывает, что полная контактная разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ зависит только от температуры и химической природы металлов стыка.

Соединив два проводника 1 и 2 из разных металлов, создадим замкнутый контур (рис. 1-19) и определим суммарную контактную разность потенциалов двух стыков, которую можно рассматривать как возникающую в контуре э. д. с.; полагая, что температура стыков одинакова, получаем:



$$\begin{aligned}E = \varphi_{12} + \varphi_{21} &= -\frac{A_1 - A_2}{e} + k\theta \ln \frac{n_1}{n_2} - \\ &- \frac{A_2 - A_1}{e} + k\theta \ln \frac{n_2}{n_1} = 0.\end{aligned}$$

Рис. 1-19. Термопара.

Таким образом, в замкнутой цепи, состоящей из двух (или нескольких) металлических проводников, э. д. с. в контуре при одинаковой температуре стыков равна нулю и ток в контуре не возникает.

Нагревая один из стыков, например стык a (рис. 1-19), получим температуру $\theta_a > \theta_б$, и э. д. с. в контуре или, как ее еще называют, термо-э. д. с.

$$\begin{aligned}E = \varphi_{12} + \varphi_{21} &= -\frac{A_1 - A_2}{e} + k\theta_a \ln \frac{n_1}{n_2} - \frac{A_2 - A_1}{e} + \\ &+ k\theta_б \ln \frac{n_2}{n_1} = k(\theta_a - \theta_б) \ln \frac{n_1}{n_2} = E_0(\theta_a - \theta_б),\end{aligned}\quad (1-36)$$

где $E_0 = k \ln n_1/n_2$ — удельная термо-э. д. с.

Следовательно, термо-э. д. с. пропорциональна разности температур стыков металлов.

Термогенератор (термопара) представляет собой две проволоки из разных металлов, сваренных на одном конце (рис. 1-20), называемом рабочим концом термопары. При нагревании рабочего конца термопары на других концах ее, называемых свободными, или на зажимах термопары появится разность потенциалов, равная термо-э. д. с. Так как термо-э. д. с. пропорциональна разности температур рабочего конца и свободных концов, то при постоянной температуре последних термо-э. д. с. будет зависеть только от

температуры рабочего конца термопары. Милливольтметр, подключенный к зажимам термопары, измерит термо-э. д. с. или при соответствующей градуировке его шкалы будет измерителем *И* температуры рабочего конца термопары.

Применяемые главным образом для измерения температур термопары имеют ничтожную мощность, низкий к. п. д. (менее 1%) и очень малые удельные термо-э. д. с., например: медь — константан 53 мкВ/°С, серебро — платина 12 мкВ/°С, платина — платинородий 6,4 мкВ/°С. Малый термоэлектрический эффект в металлических термопарах объясняется слабой зависимостью числа носителей зарядов и величины их энергии от температуры.

В полупроводниках число носителей зарядов и их энергия в значительно большей степени зависят от температуры, поэтому удельная термо-э. д. с. их значительно больше (до 1 мВ/°С) и они могут применяться для непосредственного преобразования тепловой энергии в электрическую. Коэффициент полезного действия полупроводниковых термогенераторов значительно выше и достигает 10%. Простота устройства и компактность полупроводниковых термогенераторов, а также надежность работы делают их пригодными для применения в установках и приборах, в которых отсутствуют другие источники электрической энергии.

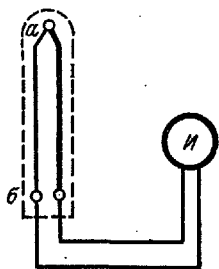


Рис. 1-20. Термопара с измерителем.

1-13

Электрическая энергия и мощность

В электрическом генераторе *Г*, к которому присоединен приемник *П* (рис. 1-21), под действием сил электромагнитной индукции непрерывно происходит разделение электрических зарядов. При этом работа, совершенная этими силами при перемещении заряда *Q* в полученной замкнутой цепи, или, как говорят, выработанная в генераторе энергии, определяется по формуле

$$A_r = EQ, \quad (1-37)$$

которая непосредственно вытекает из определения э. д. с. *E*, данного в § 1-11.

Учитывая, что при постоянном токе $Q = It$, формуле (1-37) можно придать такой вид:

$$A_r = EIt. \quad (1-38)$$

По закону сохранения энергии электрическая энергия, выработанная генератором за время t , в течение того же времени преобразуется в другие виды энергии во всех участках цепи (во внешнем — приемнике Π и внутреннем — самом генераторе Γ в цепи рис. 1-21).

Обозначим напряжение на зажимах AB приемника, равное напряжению на тех же зажимах генератора $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = U$; тогда энергия, затраченная во внешнем участке цепи,

$$A = UQ = UIt. \quad (1-39)$$

Вторая часть энергии затрачивается (теряется) внутри самого генератора на его нагревание:

$$A_b = A_r - A = (E - U)It = U_b It. \quad (1-40)$$

Рис. 1-21. Электрический генератор с присоединенным приемником.

Разность э. д. с. E генератора и напряжения U на его зажимах называется внутренним падением напряжения:

$$U_b = E - U. \quad (1-41)$$

Из (1-41) также следует, что

$$E = U + U_b. \quad (1-42)$$

Таким образом, э. д. с. генератора равна сумме напряжения на его зажимах и внутреннего падения напряжения в нем.

Внутреннее падение напряжения увеличивается с ростом тока в цепи

$$U_b = r_b I,$$

где коэффициент пропорциональности r_b называется внутренним сопротивлением.

Если электрическая цепь разомкнута, т. е. генератор работает без нагрузки, вхолостую, то ток в электрической цепи отсутствует и потерь энергии на нагрев генератора нет. Следовательно, внутреннее падение напряжения $U_b = 0$ и э. д. с. E равна напряжению на зажимах генератора U

[см. также (1-29)]. Из сказанного вытекает, что э. д. с. генератора можно измерить присоединенным к его зажимам вольтметром при работе генератора вхолостую.

Отношение работы A к промежутку времени t , в течение которого она выполняется, называется **мощностью**. Следовательно,

$$P = A/t, \quad (1-43)$$

т. е. мощность характеризует скорость, с которой совершается работа, или скорость, с которой происходит преобразование энергии. Если работа совершается неравномерно, то можно рассмотреть работу dA за бесконечно малый промежуток времени dt и получить мгновенную мощность

$$p = dA/dt.$$

Скорость, с которой механическая или другая энергия преобразуется в источнике в электрическую, называется **мощностью генератора**:

$$P_r = A_r/t = EIt/t = EI. \quad (1-44)$$

Скорость, с которой электрическая энергия преобразуется во внешнем участке цепи в другие виды энергии, называется **мощностью потребителей**:

$$P = A/t = UIt/t = UI. \quad (1-45)$$

Мощность, определяющая непроизводительный расход энергии, например на тепловые потери в генераторе, называется **мощностью потерь**:

$$P_v = A_v/t = U_v It/t = U_v I. \quad (1-46)$$

По закону сохранения энергии мощность генератора равна сумме мощностей потребителей и потерь:

$$P_r = P + P_v.$$

Это выражение представляет собой **баланс мощностей** электрической цепи.

В международной системе единиц (СИ) единицей мощности служит **ватт** (Вт) — мощность, при которой в каждую секунду совершается работа, равная 1 Дж, или мощность, при которой в каждую секунду 1 Дж электрической энергии преобразуется в другой вид энергии; таким образом:

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/1 с},$$

откуда $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Вт} \cdot 1 \text{ с} = 1 \text{ Вт} \cdot \text{с}$.

Из (1-42) — (1-44) видно также, что

$$[P] = [UI] = \text{В} \cdot \text{А},$$

т. е.

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ А}$$

— мощность, развиваемая постоянным током силой в 1 А при напряжении 1 В. Кратными единицами являются гектоватт ($1 \text{ гВт} = 10^2 \text{ Вт}$), киловатт ($1 \text{ кВт} = 10^3 \text{ Вт}$) и мегаватт ($1 \text{ МВт} = 10^6 \text{ Вт} = 10^3 \text{ кВт}$).

Электрическая энергия измеряется в ватт-часах ($\text{Вт} \cdot \text{ч}$) или кратных единицах: гектоватт-часах ($\text{гВт} \cdot \text{ч}$) или киловатт-часах ($\text{кВт} \cdot \text{ч}$). Один киловатт-час — это работа, совершаемая в течение 1 ч при мощности 1 кВт; $1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 1000 \text{ Вт} \cdot \text{ч}$; $1 \text{ Вт} \cdot \text{ч} = 3600 \text{ Дж}$.

Пример 1-5. В сеть с напряжением $U = 218 \text{ В}$ включен нагревательный прибор, сила тока которого $I = 2,75 \text{ А}$. Определить мощность прибора и стоимость энергии, израсходованной прибором в течение трех часов. Стоимость 1 кВт·ч электрической энергии составляет 4 коп.

Решение. Мощность прибора

$$P = UI = 218 \cdot 2,75 = 600 \text{ Вт}.$$

Энергия, израсходованная за 3 ч работы,

$$W = Pt = 600 \cdot 3 = 1800 \text{ Вт} \cdot \text{ч} = 1,8 \text{ кВт} \cdot \text{ч}.$$

Стоимость израсходованной энергии: $4 \cdot 1,8 = 7,2 \text{ коп}$.

1-14

Преобразование электрической энергии в тепловую

Закон Джоуля—Ленца. Электрический ток представляет собой направленное движение электрически заряженных частиц. При столкновении движущихся частиц с ионами или молекулами вещества кинетическая энергия движущихся частиц передается ионам или молекулам, вследствие чего происходит нагревание проводника. Таким образом, электрическая энергия преобразуется в тепловую.

Скорость преобразования электрической энергии в тепловую характеризуется мощностью $P = UI$; учитывая, что $U = Ir$, получаем:

$$P = I^2 r \text{ или } P = U^2 / r = U^2 g. \quad (1-47)$$

Количество электрической энергии W , преобразованной в тепло за время t ,

$$W = Pt = I^2 r t. \quad (1-48)$$

Так как в системе СИ единицей количества тепла, так же как и единицей энергии, является джоуль, то выделенное током I в сопротивлении r тепло

$$Q = I^2 r t. \quad (1-49)$$

Количество тепла измеряется иногда внесистемной единицей — калорией (количество тепла, необходимое для нагревания 1 г воды на 1°C): $1 \text{ кал} = 4,187 \text{ Дж}$ или $1 \text{ Дж} = 0,24 \text{ кал}$. Следовательно, количество тепла, выраженное в калориях, определяется по формуле

$$Q = 0,24 I^2 r t. \quad (1-49a)$$

Полученная зависимость была установлена в 1844 г. русским академиком Э. Х. Ленцем и одновременно английским ученым Джоулем и называется законом Джоуля — Ленца: количество тепла, выделенное постоянным током в проводнике, пропорционально квадрату силы тока, сопротивлению проводника и времени прохождения тока.

Преобразование электрической энергии в тепло находит широкое применение в разнообразных нагревательных приборах. В остальных приборах (электрических машинах, аппаратах, проводах) преобразование электрической энергии в тепловую является непроизводительным расходом энергии, т. е. потерями энергии, снижающими их коэффициент полезного действия (к. п. д.). Кроме того, тепло, вызывая нагревание этих устройств, ограничивает допустимый ток или, как говорят, их нагрузку: при перегрузке повышение температуры может привести к повреждению изоляции или сокращению срока службы установки.

Пример 1-6. Определить количество тепла, выделенного в нагревательном приборе в течение двух часов, если сопротивление прибора 24 Ом, а напряжение сети 120 В.

Решение. Сила тока

$$I = U/r = 120/24 = 5 \text{ А.}$$

Количество тепла, выделенного в приборе,

$$Q = I^2 r t = 5^2 \cdot 24 \cdot 2 \cdot 3600 = 4\,320\,000 \text{ Дж.}$$

Допустимая нагрузка проводов. При нагревании провода приращение его температуры зависит от массы и материала провода и количества выделившегося в нем тепла. Скорость отдачи тепла в окружающую среду пропорциональна разности температур провода и среды. В начале нагревания

током температура провода и среды одинакова, следовательно, в окружающую среду тепло почти не отдается; практически все тепло идет на нагревание провода, вследствие чего температура провода быстро растет. С ростом температуры провода увеличивается разность температур провода и среды, следовательно, увеличивается количество тепла, отдаваемое проводом, и рост температуры провода все более замедляется. Наконец при некоторой температуре устанавливается тепловое равновесие; за каждую единицу времени количество выделяющегося в проводнике тепла

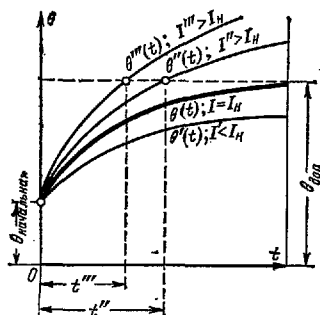


Рис. 1-22. График нагрева провода током.

становится равным теплу, отдаваемому проводом в окружающую среду. Температура провода достигает установившегося значения. Нагревание до установившейся температуры длится неодинаково у различных устройств: от долей секунды для нити лампы накаливания до нескольких часов для электрических машин значительной мощности.

Временем нагрева провода называют промежуток времени, в течение которого он

нагреется до температуры, отличающейся от установившейся не более чем на 1%. Изменение температуры провода в зависимости от времени показано на рис. 1-22.

Нагрев проводов допускается до определенных значений ($65-80^{\circ}\text{C}$). У изолированных проводов допустимый нагрев определяется видом и свойствами изоляции, у голых (неизолированных) проводов — изменением их механических свойств. Ток, при котором нагревание достигает предельно допустимой температуры $\theta_{\text{доп}}$, называется наибольшим допустимым или номинальным током провода $I = I_n$ (рис. 1-22). Значения номинальных токов для различных проводов и сечений приводятся в Правилах устройства электроустановок (ПУЭ) и в электротехнических справочниках. В табл. 1-3 приведены допустимые нагрузки током для медных проводов и шнуров с резиновой и полихлорвиниловой изоляцией, проложенных открыто.

Если ток, проходящий по проводу, больше номинального $I' > I_n$ (рис. 1-22), то такую перегрузку можно допустить

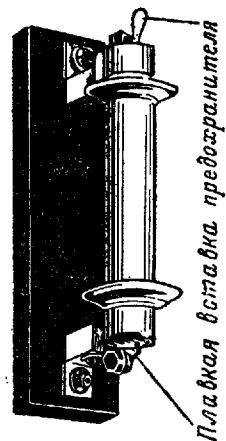
Допустимые токовые нагрузки для медных
изолированных проводов

Попереч- ное сече- ние, мм ²	Наиболь- ший допу- стимый ток, А	Попереч- ное сече- ние, мм ²	Наиболь- ший допу- стимый ток, А	Попереч- ное сече- ние, мм ²	Наиболь- ший допу- стимый ток, А
0,5	11	10	80	120	385
0,75	15	16	100	150	440
1,0	17	25	140	185	510
1,5	23	35	170	240	605
2,5	30	50	215	300	695
4	41	70	270	400	830
6	50	95	330		

только кратковременно в течение времени t'' , пока температура провода не достигнет предельно допустимой $\theta_{\text{доп}}$. Чем больше ток в проводе по сравнению с номинальным, тем кратковременней может быть перегрузка; если $I''' > I''$, то $t''' < t''$ (рис. 1-22).

Защита проводов от перегрузки. Коротким замыканием называется непосредственное соединение двух проводов, участков электрической цепи или зажимов (например, А и Б на рис. 1-21), потенциалы которых различны (ϕ_A и ϕ_B), или соединение их проводником с ничтожно малым сопротивлением. Токи короткого замыкания могут достигать очень больших значений, превышающих в десятки раз наибольший допустимый ток установки, что может привести к тепловым и механическим повреждениям или разрушениям отдельных частей установки.

Участки электрической цепи защищаются от теплового действия токов перегрузки и токов короткого замыкания плавкими предохранителями (рис. 1-23) или реле. Основной частью предохранителя является вставка — короткий кусок проволоки из легкоплавкого металла, который, нагреваясь током перегрузки, расплавляется и разрывает цепь, отключая

Рис. 1-23. Плавкий
предохранитель.

защищаемый участок. Сечение вставки предохранителя выбирается с таким расчетом, чтобы она плавилась при появлении в цепи тока выше номинального.

Пример 1-7. В цепь с напряжением 120 В включено 25 ламп. Мощность каждой из них 150 Вт. Определить сечение медных проводов установки.

Решение. Мощность установки

$$P = 150 \cdot 25 = 3750 \text{ Вт.}$$

Ток установки

$$I = P/U = 3750/120 \approx 31 \text{ А.}$$

По табл. 1-3 ближайшее сечение равно 4 мм² с допустимым током 41 А.

1-15

Электрическая цепь с одним источником

Цепь без учета сопротивления проводов. Для цепи, состоящей из источника с э. д. с. E и внутренним сопротивлением r_v и внешнего участка с сопротивлением r (рис. 1-10 и 1-21), напряжение на зажимах источника и приемника

$$U = U_{AB} = Ir,$$

а внутреннее падение напряжения

$$U_v = Ir_v.$$

Следовательно, по (1-42) э. д. с.

$$E = U + U_v = Ir + Ir_v, \quad (1-42a)$$

откуда сила тока в цепи

$$I = \frac{E}{r + r_v}. \quad (1-50)$$

Полученная формула часто называется законом Ома для электрической цепи.

Если сопротивление внешней цепи (приемника) сделать равным нулю ($r = 0$), то сила тока в режиме короткого замыкания источника

$$I_k = E/r_v.$$

Напряжение на зажимах внешнего участка цепи и источника равно нулю, так как

$$U = I_k r = 0$$

и, следовательно,

$$I_k r_v = E,$$

т. е. э. д. с. равна внутреннему падению напряжения.

Мощность, развиваемая генератором при его коротком замыкании,

$$P_k = EI_k = I_k^2 r_v,$$

т. е. равна мощности нагревания самого генератора, что может вызвать перегрев генератора и его повреждение.

Режим работы цепи при отключенном приемнике энергии, когда сопротивление внешней цепи $r = \infty$, называется режимом холостого хода. Ток холостого хода

$$I_x = \frac{E}{r + r_v} = \frac{E}{\infty + r_v} = 0;$$

внутреннее падение напряжения $U_v = I_x r_v = 0$ и напряжение на зажимах цепи, как следует из (1-42), равно э. д. с., т. е. $U = E$; мощность, развиваемая генератором при холостом ходе, равна нулю

$$P_x = EI_x = 0.$$

Источники питания и приемники электрической энергии характеризуются: 1) номинальным током I_n , который при длительном прохождении вызывает предельное допустимое нагревание; 2) номинальным напряжением U_n , на которое рассчитан и изготовлен источник или приемник; 3) номинальной мощностью P_n , равной произведению I_n и U_n , т. е. $P_n = U_n I_n$.

Номинальные величины указываются на щитке или в паспорте устройства.

Режим работы, при котором ток, напряжение и мощность того или иного элемента цепи равны его номинальным значениям, называется **номинальным режимом**. Режим работы, при котором перечисленные выше величины лежат в заданных границах и не превосходят номинальных значений, называется **нормальным**.

Все сказанное в предыдущем параграфе в отношении перегрузки проводов током в одинаковой мере относится и к другим элементам цепи.

Цепь с учетом сопротивления проводов при изменяющейся нагрузке. Рассмотрим цепь (рис. 1-24), состоящую из источника питания, внутренним сопротивлением которого можно пренебречь, т. е. источника э. д. с. или напряжения $U = E$, и двух участков с сопротивлениями r_1 и r_2 .

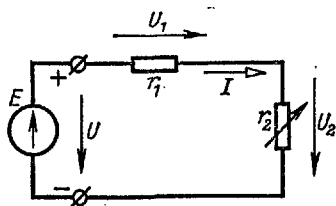


Рис. 1-24. Цепь с переменным резистором.

Одно из них r_1 — постоянное, представляет собой сопротивление проводов. Второе сопротивление r_2 — переменное (приемник), может изменяться от бесконечности (холостой ход) до нуля (короткое замыкание).

По закону Ома (1-50) ток в такой цепи определяется уравнением

$$I = E/(r_1 + r_2),$$

напряжение на первом сопротивлении

$$U_1 = Ir_1,$$

а напряжение на втором сопротивлении, т. е. на приемнике,

$$U_2 = Ir_2 = E - U_1 = E - Ir_1.$$

При холостом ходе, т. е. при $r_2 = \infty$, тока в цепи нет: $I_x = 0$, напряжение на первом сопротивлении также равно нулю: $U_{1x} = I_x r_1 = 0$, а напряжение на приемнике имеет наибольшее значение, равное э. д. с. источника:

$$U_{2x} = E - I_x r_1 = E.$$

При коротком замыкании, т. е. при $r_2 = 0$, ток имеет наибольшее значение

$$I_k = E/r_1,$$

напряжение на первом сопротивлении

$$U_{1k} = I_k r_1 = E,$$

а напряжение на зажимах приемника

$$U_{2k} = I_k r_2 = I_k \cdot 0 = 0.$$

Напряжение на первом постоянном сопротивлении r_1 пропорционально току и изменяется от нуля при холостом ходе до наибольшего значения $U_{1\text{макс}} = E$ при коротком замыкании. График этого напряжения показан на рис. 1-25. Напряжение на приемнике U_2 равно разности э. д. с. E и напряжения U_1 . Оно изменяется от $U_{2\text{макс}} = E$ при холостом ходе до $U_{2k} = 0$ при коротком замыкании. График этого напряжения дан на том же рис. 1-25. При токе в цепи $I = E/2r_1 = 0,5 I_k$, т. е. при сопротивлении приемника, равном постоянному сопротивлению ($r_2 = r_1$), напряжения на обоих сопротивлениях равны друг другу: $U_2 = U_1$.

Мощность, развиваемая источником, $P = EI$ пропорциональна току (рис. 1-26). При холостом ходе она равна

нулю, так как $P_x = EI_x = E \cdot 0 = 0$. При коротком замыкании она достигает наибольшей величины $P_k = EI_k$. Мощность в первом сопротивлении пропорциональна квадрату тока, так как $P_1 = I^2 r_1$ (рис. 1-26). Мощность приемника $P_2 = P - P_1 = EI - I^2 r_1 = I^2 r_2 = U_2 I$. При холостом ходе она равна нулю, так как $I_x = 0$, при коротком замыкании она также равна нулю, так как $U_2 = 0$ (рис. 1-26).

Наибольшее значение мощности приемника $P_{2\text{макс}}$ можно определить, приравняв нулю первую производную функции $P_2(I) = EI - I^2 r_1$, т. е. $dP_2/dI = E - 2Ir_1 = 0$, откуда

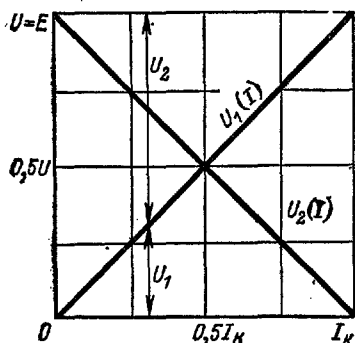


Рис. 1-25. График напряжений U_1 и U_2 .

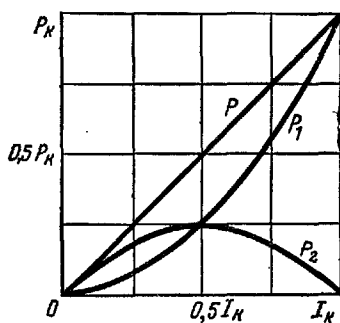


Рис. 1-26. График мощностей P , P_1 и P_2 .

$E = 2Ir_1$ и наибольшая мощность $P_{2\text{макс}}$ будет при токе $I = E/2r_1 = 0,5 I_k$, который получается, как показано выше, при $r_1 = r_2$.

Следовательно, максимальная мощность приемника будет:

$$P_{2\text{макс}} = I^2 r_2 = \left(\frac{I_k}{2}\right)^2 r_1 = \frac{E^2}{(2r_1)^2} r_1 = \frac{E^2}{4r_1}.$$

Режим цепи, при котором сопротивление приемника равно сопротивлению остальной части цепи, называется режимом согласованной нагрузки. Коэффициент полезного действия при согласованной нагрузке

$$\eta = \frac{P_2}{P} 100\% = \frac{I^2 r_2}{I^2 (r_1 + r_2)} 100\% = \frac{r_2}{r_1 + r_2} 100\% = 50\%.$$

Следовательно, половина энергии теряется в сопротивлении r_1 . Такой низкий к. п. д. неприемлем для энергетических установок, где r_1 — сопротивление линии передачи.

Для энергетических установок допускаются потери энергии всего лишь около 5%. Однако в установках автоматики, телемеханики и электросвязи мощности малы и обычно важным является не к. п. д. и не мощность потерь в линии, а передача по возможности большей части мощности источника питания к исполнительным механизмам; поэтому в этих установках работа при согласованной нагрузке часто является не только допустимой, но и предпочтительной.

Из приведенного выше выражения к. п. д. следует, что чем больше сопротивление приемника r_2 по сравнению с сопротивлением линии передачи r_1 , тем больше ее к. п. д.; говоря другими словами, высокий к. п. д. передачи соответствует работе в условиях, близких к холостому ходу ($r_2 = \infty$; $\eta = 1$).

1-16

Электрическая цепь с двумя источниками

Силу тока в цепи, состоящей из двух источников с э. д. с. E_1 и E_2 (рис. 1-27) и внутренними сопротивлениями $r_{в1}$ и $r_{в2}$, которая замкнута на приемник энергии с сопротивлением r , можно определить по принципу наложения токов. Согласно этому принципу сила тока в цепи равна алгебраической сумме сил токов, создаваемых в ней источниками

питания, двумя или несколькими, действующими независимо друг от друга, если сопротивления всех участков цепи постоянны, т. е. не зависят от величины тока.

При действии только первой э. д. с. E_1 сила тока в цепи (рис. 1-27).

$$I_1 = \frac{E_1}{r_{в1} + r_{в2} + r}.$$

Направление этого тока в первом источнике совпадает с направлением э. д. с. E_1 , которая, как указывалось ранее, направлена от отрицательного зажима к положительному.

При действии только второй э. д. с. E_2 сила тока в цепи

$$I_2 = \frac{E_2}{r_{в1} + r_{в2} + r}.$$

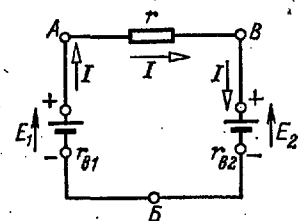


Рис. 1-27. Электрическая цепь с двумя источниками питания.

Направление этого тока во втором источнике совпадает с направлением э. д. с. E_2 .

Так как э. д. с. E_1 и E_2 в контуре, образованном элементами цепи (рис. 1-27), направлены встречно, то действительная сила тока I равна разности сил токов I_1 и I_2 :

$$I = I_1 - I_2 = \frac{E_1 - E_2}{r_{в1} + r_{в2} + r}. \quad (1-51)$$

При равенстве э. д. с. E_1 и E_2 сила тока в цепи равна нулю. Следовательно, ток в цепи возникает только при $E_1 \neq E_2$. Направление тока I совпадает с направлением большей э. д. с. При $E_1 > E_2$ направление тока совпадает с направлением E_1 и противоположно направлению E_2 , как принято на рис. 1-27 и в формуле (1-51). Электродвижущая сила E_2 , направленная встречно току, называется встречной или противо-э. д. с.

На участке цепи AB , обладающем сопротивлением r , электрическая энергия преобразуется в тепловую, мощность которой

$$P_{AB} = I^2 r,$$

а напряжение, или, как часто говорят, падение напряжения на этом участке

$$U_{AB} = P_{AB}/I = Ir. \quad (1-52)$$

На участке BB с сопротивлением $r_{в2}$ действует встречная э. д. с. E_2 . В этом участке кроме тепловой мощности $I^2 r_{в2}$ развивается еще электрическая мощность $E_2 I$, так как электрическими силами совершается работа по преодолению действия встречной э. д. с., в зависимости от происхождения которой электрическая энергия преобразуется в химическую (аккумулятор) или механическую (электрическая машина в режиме двигателя); таким образом, источник с противо-э. д. с. E_2 работает в режиме потребителя (приемника).

Развиваемая на участке BB мощность

$$P_{BB} = E_2 I + I^2 r_{в2},$$

а напряжение на нем

$$U_{BB} = P_{BB}/I = E_2 + Ir_{в2}. \quad (1-53)$$

Итак, напряжение на зажимах источника, работающего в режиме потребителя, равно сумме э. д. с. и внутреннего падения напряжения.

На участке AB с сопротивлением $r_{в1}$ действует э. д. с. E_1 одного направления с током I . Электрическая машина или аккумулятор с э. д. с. E_1 работает в режиме источника энергии или генератора, поэтому э. д. с. равна сумме напряжения на зажимах и внутреннего падения напряжения (1-42):

$$E_1 = U_{AB} + U_{в} = U_{AB} + I r_{в1},$$

а напряжение на зажимах генератора

$$U_{AB} = E_1 - I r_{в1}. \quad (1-54)$$

Отсюда следует, что напряжение на зажимах источника, отдающего энергию, или генератора равно разности э. д. с. и внутреннего падения напряжения.

Развиваемая источником мощность (1-44)

$$E_1 I = U_{AB} I + U_{в} I = U_{AB} I + I^2 r_{в1}.$$

Итак, напряжение на зажимах источника равно по (1-53) и (1-54) разности потенциалов между его зажимами (+) и (—):

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = E \pm I r_{в}, \quad (1-55)$$

где знак «+» относится к работе в режиме потребителя, а знак «—» относится к работе в режиме генератора.

1-17

Потенциальная диаграмма

Во многих случаях изучения и расчета электрических цепей полезно определить потенциалы отдельных точек электрической цепи и построить потенциалную диаграмму. Потенциал какой-либо точки электрической цепи равен напряжению между этой точкой и точкой цепи, потенциал которой принимают равным нулю, например, соединенной с землей. При определении потенциалов точек цепи пользуются уравнениями (1-52) — (1-55).

Определим потенциалы точек B , B , Γ и D цепи, схема которой дана на рис. 1-28. Из заданных на схеме направлений тока I и э. д. с. E_1 и E_2 следует, что источник с э. д. с. E_1 работает в режиме потребителя, а источник с э. д. с. E_2 — в режиме генератора.

Ток на участке цепи, обладающем только сопротивлением, всегда направлен от точки с более высоким потенциалом к точке с меньшим потенциалом. Поэтому точка B

имеет больший потенциал, чем точка A . По (1-52) разность потенциалов $\varphi_B - \varphi_A = U_{BA} = Ir_1$. Так как точка A заземлена, то $\varphi_A = 0$ и $\varphi_B = Ir_1$.

Потенциал φ_B точки B является потенциалом отрицательного зажима первого источника, а потенциал φ_B точки B является потенциалом положительного зажима того же источника. Напряжение на зажимах источника можно выразить как разность потенциалов, и, учитывая, что источник с э. д. с. E_1 работает в режиме потребителя, можно написать аналогично (1-53)

$$U_{BB} = \varphi_B - \varphi_B = \varphi_+ - \varphi_- = \\ = E_1 + Ir_{v1},$$

откуда потенциал

$$-\varphi_B = \varphi_B + E_1 + Ir_{v1}.$$

Следует обратить внимание на то, что в реальной цепи нет таких двух точек, между которыми существовало бы напряжение, равное Ir_{v1} или э. д. с. E_1 . Физической величиной является сумма этих величин $E_1 + Ir_{v1} = U_{BB}$. Разделение этой суммы на слагающие и соответствующее графическое изображение — это только вычислительный прием и его графическое изображение.

По (1-52) потенциал φ_G больше φ_B на величину Ir_2 ; таким образом,

$$\varphi_G = \varphi_B + Ir_2.$$

Источник с э. д. с. E_2 работает в режиме генератора. Разность потенциалов между положительным и отрицательным зажимами его аналогично (1-54)

$$U_{GD} = \varphi_G - \varphi_D = E_2 - Ir_{v2},$$

откуда

$$\varphi_D = \varphi_G - E_2 + Ir_{v2}.$$

Наконец, потенциал φ_A точки A выше потенциала φ_D точки D на величину Ir_3 , т. е. $\varphi_A - \varphi_D = Ir_3$, откуда

$$\varphi_A = \varphi_D + Ir_3$$

и должно получиться $\varphi_A = 0$.

Графическое изображение изменения потенциала в электрической цепи в зависимости от сопротивлений участков

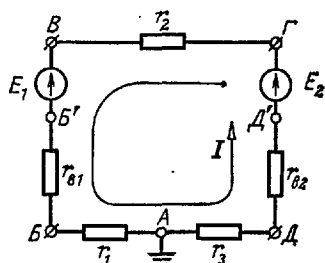


Рис. 1-28. Схема электрической цепи.

(элементов) этой цепи называется потенциальной диаграммой. На графике по оси абсцисс откладывают в масштабе сопротивления участков (элементов) цепи в порядке следования их друг за другом в цепи. По оси ординат откладывают в масштабе значения потенциалов.

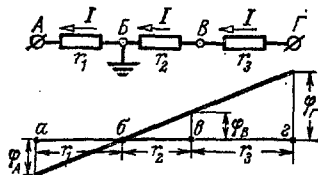


Рис. 1-29. Неразветвленная цепь с тремя резисторами и ее потенциальная диаграмма.

представляющие потенциалы соответствующих точек цепи. Концы отрезков, изображающих потенциалы точек цепи, расположены на прямой линии, так как во всех элементах участка идет один и тот же ток, вследствие чего между изменением потенциала от точки к точке и сопротивлениями участков между теми же точками имеет место линейная зависимость.

Пример 1-8. Построить потенциальную диаграмму для цепи, схема которой дана на рис. 1-28, если $E_1 = 18$ В; $E_2 = 32$ В; $r_1 = 4$ Ом; $r_2 = 3$ Ом; $r_3 = 5$ Ом; $r_{в1} = r_{в2} = 1$ Ом. **Решение.** Вычислим силу тока в цепи

$$I = \frac{E_2 - E_1}{r_1 + r_2 + r_3 + r_{в1} + r_{в2}} = \frac{32 - 18}{4 + 3 + 5 + 1 + 1} = 1 \text{ А.}$$

Определим потенциалы точек цепи. Точка А соединена с землей, поэтому ее потенциал $\varphi_A = 0$.

Потенциал $\varphi_B > \varphi_A$, так как ток идет от точки Б к точке А, т. е. $\varphi_B - \varphi_A = Ir_1$, откуда

$$\varphi_B = \varphi_A + Ir_1 = 0 + 1 \cdot 4 = 4 \text{ В.}$$

Источник с э. д. с. E_1 и внутренним сопротивлением $r_{в1}$, работающий в режиме потребителя, присоединен к точкам Б и В цепи. Согласно (1-55) напишем: $\varphi_B - \varphi_B = E_1 + Ir_{в1}$, откуда потенциал точки В

$$\varphi_B = \varphi_B + E_1 + Ir_{в1} = 4 + 18 + 1 = 23 \text{ В.}$$

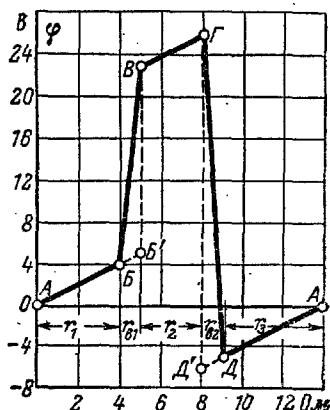


Рис. 1-30. Потенциальная диаграмма к примеру 1-8.

Потенциал $\varphi_{\Gamma} > \varphi_B$, так как ток идет от точки Γ к точке B , поэтому $\varphi_{\Gamma} - \varphi_B = I r_2$, откуда

$$\varphi_{\Gamma} = \varphi_B + I r_2 = 23 + 1 \cdot 3 = 26 \text{ В.}$$

Источник с э. д. с. E_2 и внутренним сопротивлением $r_{в2}$ работает в режиме генератора. Зажимы его обозначены буквами Γ и D , согласно (1-55) напишем: $\varphi_{\Gamma} - \varphi_D = E_2 - I r_{в2}$, откуда потенциал точки D

$$\varphi_D = \varphi_{\Gamma} - E_2 + I r_{в2} = 26 - 32 + 1 = -5 \text{ В.}$$

Потенциал $\varphi_A > \varphi_D$, поэтому $\varphi_A - \varphi_D = I r_3$, откуда

$$\varphi_A = \varphi_D + I r_3 = -5 + 1 \cdot 5 = 0.$$

Полученный результат подтверждает правильность решения.

По полученным данным строим потенциальную диаграмму (рис. 1-30). Если продолжить прямую AB до пересечения с перпендикуляром, опущенным из точки B , то найдем точку B' . Отрезок BB' в выбранном масштабе равен э. д. с. E_1 . Аналогично строится точка D' .

Глава вторая

Расчет линейных цепей постоянного тока

2-1

Элементы схем электрических цепей. Два закона Кирхгофа

Электрическая цепь называется линейной, если она содержит только линейные элементы. **Л и н е й н ы м** называется элемент цепи, сопротивление которого остается постоянным независимо от силы тока в нем и от величины напряжения на его зажимах.

При расчете электрической цепи очень часто необходимо определить токи, напряжения и мощности на всех участках цепи по заданным э. д. с. источников и сопротивлениям участков цепи.

Точка электрической цепи называется **у з л о м** или **т о ч к о й** **р а з в е т в л е н и я**, если в ней соединены три или большее число проводов (рис. 2-1) или ветвей. Иногда под узлом понимают шину (отрезок провода большого сечения), практически не обладающую сопротивлением, к которой присоединены не менее трех проводов или ветвей.

В е т в ь ю электрической цепи называется ее участок, состоящий из одного или нескольких элементов, соединенных так, что по ним проходит один и тот же ток, присое-

диненный к двум узлам. На рис. 2-2 показаны четыре ветви электрической цепи.

Контур электрической цепи представляет собой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям, например контур из четырех ветвей (рис. 2-2).

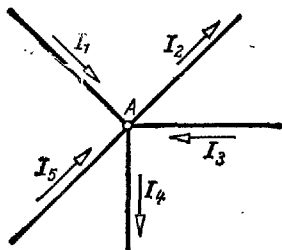


Рис. 2-1. Узел электрической цепи.

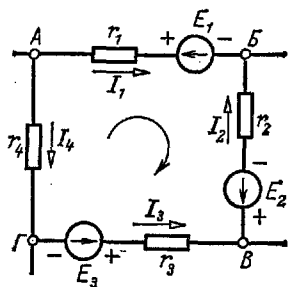


Рис. 2-2. Контур электрической цепи.

Часть электрической цепи с двумя внешними зажимами (полюсами), которыми она может присоединяться к другим ветвям или участкам, называется **двухполюсником** (рис. 2-3). Двухполюсник, не содержащий источников питания, называется **пассивным**, а содержащий источники питания — **активным**.

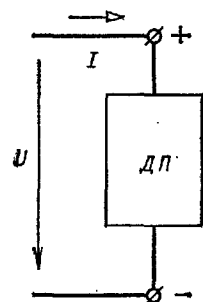


Рис. 2-3. Двухполюсник пассивный.

При постоянных токах в цепи ни в одной из ее точек не могут накапливаться электрические заряды, так как это вызвало бы изменение потенциалов точек цепи и напряжений на участках. Следовательно, электрические заряды, притекающие к какому-либо узлу по одной части присоединенных к нему ветвей или проводов в единицу времени, равны

зарядам, оттекающим от этого узла по другой части ветвей или проводов за ту же единицу времени. Это положение

выражает **первый закон Кирхгофа** (1-е правило Кирхгофа), который формулируется так: **сумма токов, направленных к узлу, равна сумме токов, направленных от узла.**

Пользуясь этим законом, для узла А, изображенного на рис. 2-1, можно написать:

$$I_1 + I_3 + I_5 = I_2 + I_4. \quad (2-1)$$

Если направления токов в ветвях не известны, то при составлении уравнений по законам Кирхгофа их необходимо предварительно выбрать произвольно и обозначить на схеме стрелками. В действительности направления токов в ветвях могут и не совпасть с произвольно выбранными. Поэтому выбранные направления тока называют положительными направлениями. Если в результате расчета цепи какие-либо токи будут выражены отрицательными числами, то действительные направления этих токов обратны выбранным положительным.

Считая токи, направленные к узлу, положительными, а токи, направленные от узла, отрицательными, уравнению (2-1) можно придать другой вид:

$$I_1 + (-I_2) + I_3 + (-I_4) + I_5 = 0$$

или в общем виде

$$\sum I = 0. \quad (2-2)$$

Таким образом, алгебраическая сумма токов в узле равна нулю, причем со знаком плюс записываются притекающие токи, а со знаком минус оттекающие (или наоборот).

На рис. 2-2 изображен контур электрической цепи. Положительные направления токов показаны стрелками. Источники электрической энергии, внутренними сопротивлениями которых можно пренебречь или внутренние сопротивления которых учтены в величинах сопротивлений r_1, r_2, r_3 , обозначены кружками со стрелками, показывающими направления э. д. с., т. е. направления возрастания потенциалов внутри источников.

Обходя контур рис. 2-2 от точки A , имеющей потенциал φ_A , в произвольно выбранном направлении, например по часовой стрелке, проследим за изменением потенциала. На участке цепи между точками A и B потенциал уменьшается на величину падения напряжения $I_1 r_1$, так как направление обхода совпадает с направлением тока, который в пассивном элементе проходит от точки с более высоким потенциалом к точке с меньшим потенциалом. Кроме того, на этом же участке потенциал уменьшается на величину E_1 , так как при обходе контура мы переходим от положительного зажима источника питания к его отрицательному зажиму. Таким образом,

$$\varphi_B = \varphi_A - I_1 r_1 - E_1.$$

При дальнейшем обходе контура от точки B к точке B потенциал увеличивается на величину падения напряжения $I_2 r_2$, так как направление обхода противоположно направлению тока I_2 , который в сопротивлении r_2 идет от точки с более высоким потенциалом к точке с более низким потенциалом. На этом же участке при переходе от отрицательного зажима источника э. д. с. E_2 к его положительному зажиму, имеем повышение потенциала на величину э. д. с. E_2 ; поэтому

$$\varphi_B = \varphi_B + I_2 r_2 + E_2 = \varphi_A - I_1 r_1 - E_1 + I_2 r_2 + E_2.$$

Обойдя весь контур и вернувшись в исходную точку A , получим снова потенциал φ_A , т. е.

$$\varphi_A - I_1 r_1 - E_1 + I_2 r_2 + E_2 + I_3 r_3 - E_3 + I_4 r_4 = \varphi_A.$$

Перенеся все падения напряжения в правую часть уравнения, найдем, что

$$-E_1 + E_2 - E_3 = I_1 r_1 - I_2 r_2 - I_3 r_3 - I_4 r_4,$$

или в общем виде

$$\sum E = \sum (I r). \quad (2-3)$$

Это уравнение выражает второй закон Кирхгофа (2-е правило Кирхгофа): в замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма э. д. с. равна алгебраической сумме падений напряжения на всех сопротивлениях. При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа э. д. с. записывается со знаком «+», если ее направление совпадает с направлением произвольно выбранного обхода контура, т. е. если при обходе после зажима источника «—» следует зажим источника «+». В противном случае э. д. с. записывается со знаком «—». Падение напряжения на сопротивлениях записывается со знаком «+», если направление тока в нем совпадает с направлением обхода.

2-2

Последовательное соединение резисторов

Если несколько резисторов (или приемников энергии) соединены один за другим без разветвлений (рис. 2-4) и по ним проходит один и тот же ток, то они образуют одну ветвь и соединение резисторов называется последовательным.

Согласно закону Ома напряжения на резисторах или падения напряжения определяются выражениями

$$U_1 = Ir_1; U_2 = Ir_2; U_3 = Ir_3,$$

откуда

$$U_1 : U_2 : U_3 = r_1 : r_2 : r_3. \quad (2-4)$$

Таким образом, падения напряжения на последовательно соединенных резисторах пропорциональны величинам их сопротивлений.

Напряжения на резисторах можно выразить через разности потенциалов на их зажимах, т. е.

$$U_1 = \varphi_A - \varphi_B; U_2 = \varphi_B - \varphi_V; U_3 = \varphi_V - \varphi_\Gamma.$$

Складывая почленно правые и левые части написанных уравнений, получаем:

$$U_1 + U_2 + U_3 = \varphi_A - \varphi_B + \varphi_B - \varphi_V + \varphi_V - \varphi_\Gamma = \\ = \varphi_A - \varphi_\Gamma = U, \quad (2-5)$$

т. е. сумма падений напряжений на последовательно соединенных резисторах равна напряжению на зажимах цепи.

На схемах напряжения или падения напряжения можно обозначить стрелками (рис. 2-4). Направление стрелки будем выбирать от точки с большим потенциалом к точке с меньшим потенциалом. Так, стрелка напряжения $U_1 = \varphi_A - \varphi_B$ направлена от

точки А к точке В. Если действительное направление тока не известно и на схеме указано положительное направление тока, то и стрелка напряжения обозначает положительное направление, т. е. направлена от точки, потенциал которой принят большим, чем потенциал другой точки. Как видно из рис. 2-4, положительные направления напряжения или падений напряжения на сопротивлениях совпадают с положительными направлениями токов. Поэтому отдельных стрелок для положительных направлений напряжений можно и не ставить.

Ряд последовательно соединенных резисторов можно заменить эквивалентным (общим) с сопротивлением r , величина которого должна быть такой, чтобы эта

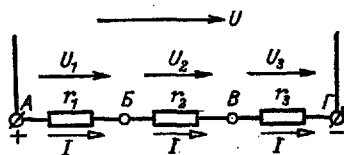


Рис. 2-4. Последовательное соединение резисторов.

замена при неизменном напряжении на зажимах соединения не вызвала изменения тока в цепи. Разделив на ток правую и левую части уравнения (2-5), получим:

$$\frac{U_1 + U_2 + U_3}{I} = \frac{U}{I} = r_1 + r_2 + r_3 = r, \quad (2-6)$$

откуда следует, что эквивалентное сопротивление ряда последовательно соединенных резисторов равно сумме их сопротивлений.

Из выражения (2-6), умножая его на I^2 , находим, что

$$I^2 r_1 + I^2 r_2 + I^2 r_3 = I^2 r,$$

т. е. мощность, развиваемая в последовательно соединенных резисторах или в эквивалентном, равна сумме мощностей всех резисторов.

При последовательном соединении резисторов ток в них один и тот же, поэтому мощности, развиваемые в отдельных участках ($P = I^2 r$), пропорциональны их сопротивлениям, т. е.

$$P_1 : P_2 : P_3 = r_1 : r_2 : r_3.$$

Пример 2-1. Вычислить, в каких пределах можно изменять силу тока в участке цепи с напряжением 125 В, который состоит из последовательно соединенных обмоток возбуждения электродвигателя с сопротивлением $r_1 = 25$ Ом и реостата, сопротивление которого r_2 можно изменять от 0 до 100 Ом.

Решение. Эквивалентное сопротивление участка цепи $r = r_1 + r_2$. При $r_2 = 0$ сила тока в цепи

$$I_1 = U/(r_1 + r_2) = 125/(25 + 0) = 5 \text{ А.}$$

При $r_2 = 100$ Ом сила тока в цепи

$$I_2 = U/(r_1 + r_2) = 125/(25 + 100) = 1 \text{ А.}$$

Пример 2-2. Магазин сопротивлений имеет соединенные последовательно четыре катушки с сопротивлениями: $r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 2$ Ом, $r_3 = 3$ Ом и $r_4 = 4$ Ом. Каждую из катушек можно замкнуть накоротко. Определить эквивалентное сопротивление магазина, если: а) замкнута накоротко катушка r_3 ; б) замкнутых накоротко катушек нет.

Решение.

$$\text{а) } r_a = r_1 + r_2 + r_4 = 1 + 2 + 4 = 7 \text{ Ом;}$$

$$\text{б) } r_6 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \text{ Ом.}$$

Предлагается читателю самому ответить на вопрос: какие катушки следует замкнуть накоротко для того, чтобы эквивалентное сопротивление магазина было равно: 5, 6, 7 и 9 Ом?

2-3

Параллельное соединение резисторов

П а р а л л е л ь н ы м с о е д и н е н и е м резисторов (или приемников энергии, ветвей) называется такое, при котором к одним и тем же двум узлам электрической цепи (рис. 2-5) присоединены несколько резисторов (ветвей).

Так как резисторы присоединены к одним и тем же узлам, то каждый из них находится под одинаковым напряжением U . Согласно закону Ома токи в резисторах (ветвях) определяются по формулам

$$I_1 = \frac{U}{r_1} = Ug_1; \quad I_2 = \frac{U}{r_2} = Ug_2; \quad I_3 = \frac{U}{r_3} = Ug_3.$$

Из этих формул следует, что

$$I_1 : I_2 : I_3 = g_1 : g_2 : g_3 = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2} : \frac{1}{r_3}, \quad (2-7)$$

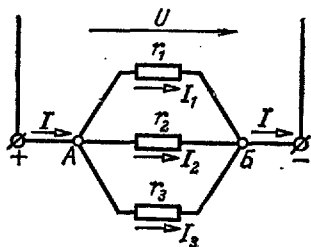


Рис. 2-5. Параллельное соединение трех резисторов.

т. е. токи в параллельных ветвях с резисторами распределяются прямо пропорционально проводимостям ветвей или обратно пропорционально их сопротивлениям.

Ряд параллельно соединенных резисторов можно заменить эквивалентным с сопротивлением r , значение которого должно быть таким, чтобы при том же напряжении на зажимах сила тока в эквивалентном резисторе была равна сумме токов в отдельных ветвях:

$$r = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_1 + I_2 + I_3}.$$

Эквивалентная проводимость

$$\frac{1}{r} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{U} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = g_1 + g_2 + g_3 = g, \quad (2-8)$$

т. е. эквивалентная проводимость параллельного соединения резисторов равна сумме проводимостей всех параллельных ветвей. Следовательно, эквивалентное сопротивление будет меньше самого малого из параллельно соединенных сопротивлений. Каждый из резисторов r_1, r_2, r_3 на рис. 2-5

может быть эквивалентным ряду последовательно соединенных в соответствующей ветви.

Формула (2-8) дает возможность определить и эквивалентное сопротивление параллельного соединения резисторов. Например, при трех ветвях эквивалентная проводимость

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_1 r_2 r_3}$$

и эквивалентное сопротивление

$$r = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}. \quad (2-9)$$

Если сопротивления ветвей равны, то

$$r = r_1^3 / (3r_1^2) = r_1 / 3.$$

В общем случае при параллельном соединении n резисторов с одинаковыми сопротивлениями r_1 эквивалентное сопротивление

$$r = r_1 / n. \quad (2-10)$$

Так как

$$I^2 r = I^2 r^2 g = U^2 g = P,$$

то для мощности параллельного соединения (рис. 2-5), принимая во внимание (2-8), получаем:

$$U^2 g_1 + U^2 g_2 + U^2 g_3 = U^2 g.$$

или

$$P_1 + P_2 + P_3 = P.$$

Таким образом, мощность параллельного соединения равна сумме мощностей всех резисторов.

Рис. 2-6. Параллельное соединение двух резисторов.

Эквивалентная проводимость цепи с двумя параллельно соединенными резисторами (рис. 2-6) определяется по формуле

$$g = g_1 + g_2,$$

или

$$1/r = 1/r_1 + 1/r_2,$$

а эквивалентное сопротивление цепи

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \quad (2-11)$$

т. е. эквивалентное сопротивление параллельного соединения двух резисторов равно произведению сопротивлений, деленному на их сумму.

Напряжение на разветвлении в случае двух резисторов (рис. 2-6)

$$Ir = I_1 r_1 = I_2 r_2,$$

откуда ток в первой параллельной ветви

$$I_1 = I \frac{r}{r_1} = I \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \frac{1}{r_1} = I \frac{r_2}{r_1 + r_2} \quad (2-12a)$$

или

$$I_1 = I \frac{1}{g} g_1 = I \frac{g_1}{g_1 + g_2}. \quad (2-126)$$

Аналогично ток во второй параллельной ветви

$$I_2 = I \frac{r}{r_2} = I \frac{r_1}{r_1 + r_2} = I \frac{g_2}{g_1 + g_2}. \quad (2-13)$$

Так как напряжение на параллельных ветвях одинаково, то при параллельном соединении приемников энергии и заданном напряжении режим работы каждого из них не влияет на режим работы остальных. Потребители электрической энергии — электродвигатели, печи, нагревательные приборы, лампы накаливания, рассчитанные на работу при неизменном номинальном напряжении, соединяются обычно параллельно друг другу.

2-4

Смешанное соединение резисторов

С м е ш а н н ы м с о е д и н е н и е м называется последовательно-параллельное соединение резисторов или участков цепи, каждый из которых в свою очередь может состоять из последовательно или параллельно соединенных резисторов.

Наиболее типично смешанное соединение, при котором параллельно включенные приемники энергии соединены последовательно с сопротивлением подводящих проводов и внутренним сопротивлением источника питания (рис. 2-7, а). Расчет такой цепи при заданной э. д. с. или напряжении источника питания и известных сопротивлениях резисторов заключается в нахождении токов и напряжений на всех участках цепи.

При расчете цепи со смешанным соединением резисторов пользуются обычно методом последовательного упрощения (свертывания) схемы.

Применяя этот метод, сначала определяем проводимость разветвленного участка цепи:

$$g_{БВ} = g_3 + g_4 + g_5 = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5}.$$

Эквивалентное сопротивление этого участка

$$r_{БВ} = 1/g_{БВ}.$$

Теперь заданную цепь можно представить схемой, состоящей из трех последовательно соединенных сопротивлений

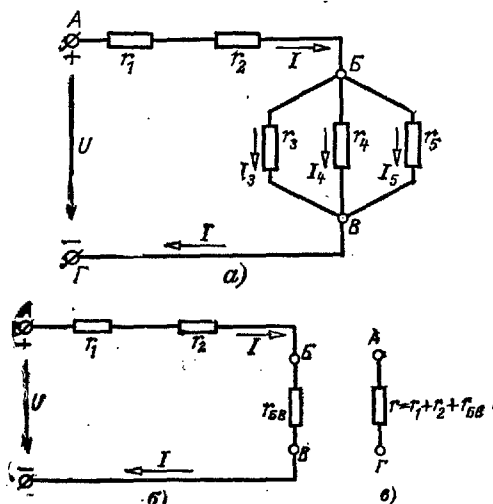


Рис. 2-7. Смешанное соединение резисторов (а), упрощенная (б) и эквивалентная схема (в).

r_1 , r_2 и $r_{БВ}$ (рис. 2-7, б). Эквивалентное сопротивление этой цепи

$$r = r_1 + r_2 + r_{БВ}.$$

По закону Ома ток цепи

$$I = \frac{U}{r} = \frac{U}{r_1 + r_2 + r_{БВ}}.$$

Напряжение U на рис. 2-7, как указывалось, обозначено стрелкой, направленной от зажима с большим потенциалом «+» к зажиму с меньшим потенциалом «—».

Напряжения на последовательно соединенных участках цепи:

$$U_1 = Ir_1; U_2 = Ir_2; U_{БВ} = Ir_{БВ}.$$

Токи в параллельных ветвях

$$I_3 = U_{БВ}/r_3; I_4 = U_{БВ}/r_4; I_5 = U_{БВ}/r_5.$$

Пример 2-3. Определить токи и напряжения всех участков цепи (рис. 2-7, а), если известно, что $U = 120$ В; $r_1 = 0,12$ Ом; $r_2 = 2$ Ом; $r_3 = 10$ Ом; $r_4 = 20$ Ом; $r_5 = 50$ Ом.

Решение. Проводимость разветвленного участка цепи БВ

$$\frac{1}{r_{БВ}} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{50} = 0,17 \text{ См}$$

и сопротивление разветвленного участка $r_{БВ} = 5,88$ Ом.

Эквивалентное сопротивление всей цепи

$$r = r_1 + r_2 + r_{БВ} = 0,12 + 2 + 5,88 = 8 \text{ Ом.}$$

Ток цепи

$$I = U/r = 120/8 = 15 \text{ А.}$$

Напряжение на первом сопротивлении

$$U_1 = Ir_1 = 15 \cdot 0,12 = 1,8 \text{ В.}$$

Напряжение на втором сопротивлении

$$U_2 = Ir_2 = 15 \cdot 2 = 30 \text{ В.}$$

Напряжение на разветвленном участке цепи

$$U_{БВ} = Ir_{БВ} = 15 \cdot 5,88 = 88,2 \text{ В.}$$

Токи в разветвленных участках цепи

$$I_3 = U_{БВ}/r_3 = 88,2/10 = 8,82 \text{ А;}$$

$$I_4 = U_{БВ}/r_4 = 88,2/20 = 4,41 \text{ А;}$$

$$I_5 = U_{БВ}/r_5 = 1,76 \text{ А.}$$

2-5

Способы соединения химических источников питания

Электродвижущие силы химических источников питания невелики: 1—2 В. Разрядные токи у первичных элементов составляют доли ампера, а у аккумуляторов — несколько ампер или десятков ампер. Так как в большинстве случаев токи и напряжения потребителей электрической энергии превышают разрядные токи и э. д. с. химических источников питания, то последние обычно соединяются для совместной работы в б а т а р е и. Соединяются в батареи только одно-

родные элементы, имеющие одинаковые э. д. с. E_0 и внутренние сопротивления r_0 .

Применяются три способа соединения первичных и вторичных элементов в батарею: последовательное, параллельное и групповое.

Последовательное соединение (рис. 2-8) применяется в тех случаях, когда напряжение потребителя U превышает э. д. с. одного элемента E_0 , а ток потребителя не превышает допустимый разрядный ток элемента. Число

последовательно соединенных элементов n должно быть не меньше отношения U/E_0 , т. е.

$$n \geq \frac{U}{E_0}.$$

Электродвижущие силы элементов, соединенных в батарею, должны иметь одинаковое направление, что обеспечивается соединением положительного зажима первого элемента с отрицательным зажимом второго, положительного

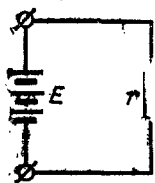


Рис. 2-8. Последовательное соединение элементов.

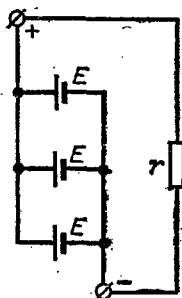


Рис. 2-9. Параллельное соединение элементов.

зажима второго элемента с отрицательным зажимом третьего и т. д. В этом случае э. д. с. батареи

$$E = nE_0, \quad (2-14)$$

ее внутреннее сопротивление

$$r_B = nr_0, \quad (2-15)$$

а емкость батареи равна емкости одного элемента.

Параллельное соединение (рис. 2-9) применяется в тех случаях, когда ток потребителя I больше допустимого разрядного тока I_p элемента, а напряжение потребителя равно э. д. с. одного элемента. Число параллельно соединяемых элементов m должно быть не менее отношения I/I_p , т. е.

$$m \geq I/I_p.$$

При параллельном соединении положительные зажимы элементов соединяются в один узел, а отрицательные —

в другой. Соединяемые элементы должны иметь одинаковые э. д. с. и одинаковые внутренние сопротивления. При этом соединении э. д. с. батареи равна э. д. с. одного элемента

$$E = E_0, \quad (2-16)$$

внутреннее сопротивление батареи

$$r_B = r_0/m, \quad (2-17)$$

разрядный ток батареи равен разрядному току элемента, умноженному на число элементов,

$$I = I_p m. \quad (2-18)$$

Емкость батареи равна сумме емкостей параллельно соединенных элементов.

Групповое соединение — это сочетание последовательного и параллельного соединений элементов (рис. 2-10). Оно применяется в том случае, если и напряжение и ток потребителя больше напряжения и разрядного тока элемента. Число последовательно соединенных элементов n в группе и число параллельных групп m определяется по ранее приведенным формулам.

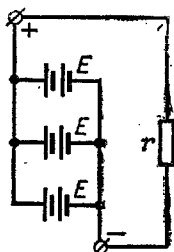


Рис. 2-10. Групповое соединение элементов.

Пример 2-4. Определить число аккумуляторов и способ их соединения для питания аварийного освещения мощностью 2,1 кВт при напряжении 120 В. Электродвижущая сила аккумулятора $E_0 = 2$ В, разрядный ток $I_p = 6$ А.

Решение. Ток потребителя

$$I = P/U = 2100/120 = 17,5 \text{ А.}$$

Вследствие того что напряжение и ток потребителя превышают напряжение и разрядный ток элемента, применим групповое соединение аккумуляторов (рис. 2-10). Число последовательно соединенных элементов в одной группе

$$n \geq U/E_0 = 120/2 = 60;$$

число параллельных групп

$$m \geq I/I_p = 17,5/6, \text{ т. е. } m = 3.$$

Таким образом, число аккумуляторов

$$nm = 60 \cdot 3 = 180.$$

Потеря напряжения в проводах. Определение сечения проводов

Электрическая энергия от генератора к потребителю передается по проводам. Устройство, состоящее из прямого и обратного провода, изоляторов и опор, несущих эти изоляторы и провода, называется электрической двухпроводной линией (рис. 2-11). На рис. 2-11 наряду с двухлинейной (многолинейной) электрической схемой, в которой каждый провод изображен одной линией, показана однолинейная схема, в которой два или большее число проводов изображены одной линией. При необходимости поперечными черточками указывается число проводов на каждом из участков.

Сопротивление обоих проводов линии определяется по формуле (1-23)

$$r = 2l/\gamma S. \quad (2-19)$$

Рис. 2-11. Два изображения двухпроводной линии с приемником на конце.

При малой длине линии l сопротивлением проводов линии часто можно пренебречь. При большей их длине (десятки метров и более) сопротивлением проводов пренебрегать нельзя, так как при прохождении тока I в них будет заметное падение напряжения

$$\Delta U = Ir = l \frac{2I}{\gamma S}. \quad (2-20a)$$

Разность напряжений в начале и в конце линии (рис. 2-11) $U_1 - U_2$, равная падению напряжения в линии, называется потерей напряжения, т. е.

$$U_1 - U_2 = \Delta U = Ir. \quad (2-20b)$$

При изменении сопротивления приемника и тем самым тока в цепи (нагрузки) от нуля до наибольшего допустимого пропорционально току изменяется и потеря напряжения. При неизменном напряжении U_1 в начале линии напряжение U_2 в конце линии, равное напряжению на приемнике, будет изменяться от $U_2' = U_1$ при $I = 0$ до $U_2'' = U_1 - \Delta U$ при токе нагрузки $I \neq 0$. Поэтому допустимая потеря напряжения ΔU равна допустимому

колебанию напряжения на приемниках энергии $U_2' - U_2''$, которое для ламп накаливания составляет 1—2%, для электродвигателей 2—5% номинального напряжения приемников.

Если допустимая потеря напряжения задана, то из формулы (2-20а) можно определить необходимое сечение проводов двухпроводной линии

$$S = 2Il/\gamma\Delta U. \quad (2-21a)$$

Часто потерю напряжения выражают в процентах относительно U_2 и обозначают буквой e , так что

$$e = \frac{\Delta U}{U_2} 100\%, \quad (2-22)$$

откуда

$$\Delta U = eU_2/100\%.$$

Подставив последнее выражение в (2-21а), получим:

$$S = 2Il \cdot 100\% / \gamma e U_2. \quad (2-21б)$$

Умножив правую часть последнего выражения на отношение U_2/U_2 , найдем, что

$$S = \frac{2Il \cdot 100\%}{\gamma e U_2} \frac{U_2}{U_2} = \frac{2P_2 l \cdot 100\%}{\gamma e U_2^2}. \quad (2-21в)$$

Выбранное по допустимой потере напряжения сечение проводов должно быть проверено на допустимый ток, определяющий нагрев (см. табл. 1-3).

Из последней полученной формулы следует, что с увеличением передаваемой мощности P_2 и длины линии l (при заданной потере напряжения e в линии) эффективным средством уменьшения сечения проводов является повышение напряжения. Поэтому при больших передаваемых мощностях и больших расстояниях передача энергии производится при высоких напряжениях (110; 220; 500; 800 кВ).

Умножив потерю напряжения в линии на ток, получим мощность потерь в линии

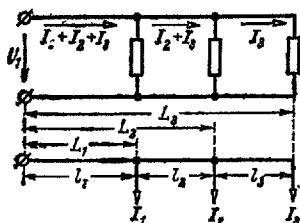
$$\Delta P = \Delta UI = I^2 r = I^2 l / \gamma S.$$

Коэффициент полезного действия линии

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_1 - \Delta P}{P_1} = \frac{U_1 I - \Delta UI}{U_1 I} = 1 - \frac{\Delta U}{U_1}. \quad (2-23)$$

Таким образом, с увеличением нагрузки (тока) к. п. д. уменьшается. При допустимых потерях напряжения 2—5% к. п. д. составляет 98—95%.

Если к линии в разных точках присоединены несколько приемников (рис. 2-12), то потери напряжения на отдельных участках (l_1, l_2, l_3) могут быть выражены через произведения токов участков и их сопротивлений, т. е.



$$\Delta U_1 = (I_1 + I_2 + I_3) r_1;$$

$$\Delta U_2 = (I_2 + I_3) r_2; \quad \Delta U_3 = I_3 r_3.$$

Потеря напряжения во всей линии равна сумме потерь на отдельных участках

$$\begin{aligned} \Delta U &= \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 = \\ &= (I_1 + I_2 + I_3) r_1 + (I_2 + I_3) r_2 + \\ &+ I_3 r_3 = I_1 r_1 + I_2 (r_1 + r_2) + \\ &+ I_3 (r_1 + r_2 + r_3). \end{aligned}$$

Рис. 2-12. Двухпроводная линия с тремя приемниками.

Если линия выполнена из провода одного и того же материала и сечения, то

$$\Delta U = I_1 \frac{2}{\gamma S} l_1 + I_2 \frac{2}{\gamma S} (l_1 + l_2) + I_3 \frac{2}{\gamma S} (l_1 + l_2 + l_3),$$

или, вводя расстояния от генератора (источника) до соответствующего приемника

$$L_1 = l_1; \quad L_2 = l_1 + l_2; \quad L_3 = l_1 + l_2 + l_3,$$

получаем:

$$\Delta U = \frac{2}{\gamma S} (I_1 L_1 + I_2 L_2 + I_3 L_3);$$

в общем случае

$$\Delta U = \frac{2}{\gamma S} \sum IL. \quad (2-24)$$

Последняя формула дает возможность определить сечение проводов линии

$$S = \frac{2}{\gamma \Delta U} \sum IL. \quad (2-21r)$$

Пример 2-5. Напряжение на зажимах источника питания $U_1 = 230$ В. На расстоянии 120 м от него присоединен приемник, мощность которого $P_2 = 5$ кВт. Допустимое падение напряжения в линии $\Delta U = 10$ В. Определить сечение медных проводов линии.

Решение. Напряжение в конце линии

$$U_2 = U_1 - \Delta U = 230 - 10 = 220 \text{ В.}$$

Допустимая потеря напряжения в процентах

$$\epsilon = \frac{\Delta U}{U_2} 100\% = \frac{10}{220} 100\% \approx 4,5\%.$$

Сечение проводов [принимая для меди удельную проводимость $\gamma = 58$ м/(Ом·мм²)]

$$S = \frac{2 P_2 l}{\gamma \epsilon U_2^2} \cdot 100\% = \frac{2 \cdot 5000 \cdot 120}{58 \cdot 4,5 \cdot 220^2} 100\% \approx 9,5 \text{ мм}^2.$$

Выбираем ближайшее стандартное сечение $S = 10 \text{ мм}^2$.

Проверяем по табл. 1-3 выбранное сечение провода на нагрев. Для провода указанного сечения допустима нагрузка 80 А, а ток в линии

$$I = P_2/U_2 = 5000/220 = 22,7 \text{ А},$$

т. е. провод выбранного сечения применять можно.

2-7

Эквивалентные схемы источников энергии

При расчетах электрических цепей реальные источники электрической энергии заменяются эквивалентными схемами.

На рис. 2-13, а дана одна из возможных схем замещения реального источника электрической энергии, обладающего постоянными э. д. с. E и внутренним сопротивлением r_v . Схема замещения состоит из двух элементов: активного — источника э. д. с. или напряжения (идеального) с постоянной э. д. с. E , равной э. д. с. реального источника, и внутренним сопротивлением, равным нулю, и пассивного элемента — сопротивления r_v , равного внутреннему сопротивлению реального источника энергии. Источник э. д. с. на схемах обозначается кружком со стрелкой внутри, рядом с которым пишется буква E . Знаки «+» и «—» у зажимов источника или стрелка внутри кружка показывают полярность источника или направление действия э. д. с.

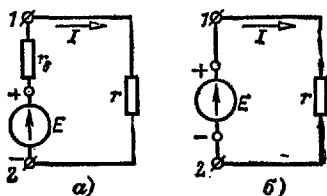


Рис. 2-13. Схемы замещения источника электрической энергии источником э. д. с.

На рис. 2-13, а источник замкнут на внешнее сопротивление r (потребитель). Поэтому ток в схеме замещения выражается формулой (1-50)

$$I = \frac{E}{r_v + r}.$$

Напряжение на зажимах 1 и 2 схемы замещения

$$U = U_{12} = E - Ir_v$$

равно напряжению на зажимах реального источника питания.

Если падение напряжения Ir_v при всех возможных значениях тока невелико по сравнению с э. д. с. E , т. е. $Ir_v \ll E$,

то напряжение U_{12} можно считать постоянным и равным э. д. с. E , т. е. $E = U_{12}$. В этом случае схема замещения (рис. 2-13, б) отличается от предыдущей отсутствием сопротивления $r_{\text{в}}$.

Для цепи, состоящей из реального источника электрической энергии с постоянными э. д. с. E и внутренним сопротивлением $r_{\text{в}}$, замкнутого на резистор с сопротивлением r (см. рис. 2-13, а и рис. 1-21), как известно из (1-42), можно написать, что э. д. с.

$$E = U + U_{\text{в}} = U + Ir_{\text{в}}$$

Поделив правую и левую части уравнения на внутреннее сопротивление $r_{\text{в}}$, получим:

$$\frac{E}{r_{\text{в}}} = \frac{U}{r_{\text{в}}} + I \text{ или } I_{\text{к}} = I_0 + I, \quad (2-25)$$

где $I_{\text{к}} = E/r_{\text{в}}$ и $I_0 = U/r_{\text{в}}$.

Уравнению (2-25) отвечает схема замещения источника, показанная на рис. 2-14, а. Она состоит из источника

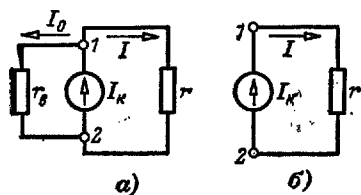


Рис. 2-14. Схемы замещения источника электрической энергии источником тока.

тока (идеального), изображенного кружком со стрелкой внутри и буквой $I_{\text{к}}$ рядом, внутреннее сопротивление которого бесконечно велико, и параллельно присоединенного внутреннего сопротивления источника питания.

Ток короткого замыкания источника $I_{\text{к}}$, равный частному от деления э. д. с. источника на внутреннее сопротивление, является характеристикой источника, так как он не зависит от нагрузки (тока I и сопротивления r). Поэтому источник, ток которого не изменяется и равен $I_{\text{к}}$, и называют источником тока. Стрелка внутри кружка показывает направление тока источника. Таким образом, вторая возможная схема замещения (рис. 2-14, а) также состоит из двух элементов, активного — источника тока и пассивного элемента — сопротивления $r_{\text{в}}$, равного внутреннему сопротивлению реального источника энергии.

Из уравнения (2-25) также следует, что неизменный ток $I_{\text{к}}$ источника тока складывается из двух составляющих: одна из них представляет собой ток нагрузки I , другая —

ток I_0 , замыкающий через параллельно присоединенное внутреннее сопротивление источника энергии r_B .

Ток I_K в параллельных ветвях (рис. 2-14, а) распределяется обратно пропорционально сопротивлениям ветвей r_B и r или прямо пропорционально их проводимостям $g_B = 1/r_B$ и $g = 1/r$ [см. (2-12) и (2-13)]:

$$I = I_K \frac{r_B}{r + r_B} = I_K \frac{g}{g + g_B};$$

$$I_0 = I_K \frac{r}{r + r_B} = I_K \frac{g_B}{g + g_B}.$$

Если проводимость приемника g много больше проводимости g_B , то током I_0 можно по сравнению с током I пренебречь и считать, что

$$I_K = I_0 + I \approx I. \quad (2-26)$$

В этом случае в схеме замещения отпадает ветвь с сопротивлением r_B (рис. 2-14, б). Из (2-26) следует также, что в этом случае при изменяющейся нагрузке напряжение на приемнике изменяется пропорционально сопротивлению приемника, так как по закону Ома $U = I_K r$.

Рассмотренные схемы замещения с источником э. д. с. и с источником тока, эквивалентные для внешних участков цепи, не эквивалентны в отношении мощности потерь внутри источника. Для схемы с источником э. д. с. мощность потерь $r_B I^2 = r_B (U^2/r^2)$; для схемы с источником тока мощность потерь $r_B I_0^2 = r_B (U^2/r_B^2)$. Они, очевидно, не равны друг другу, поэтому рассмотренные схемы применимы только для расчетов участков цепи, находящихся вне источников.

2-8

Расчет цепей методом преобразования

Электрические цепи, состоящие из приемников энергии (резисторов), соединенных последовательно, параллельно или смешанно при питании их от одного источника электрической энергии (рис. 2-4—2-7), а также цепи, содержащие один контур (рис. 1-27, 1-28), принято называть простыми цепями. При заданных э. д. с. (напряжениях) источников питания и сопротивлениях токи и напряжения на всех участках простой цепи можно определить, пользуясь законом Ома и первым законом Кирхгофа (§ 2-1).

Разветвленные электрические цепи, имеющие несколько контуров с произвольным размещением потребителей и

источников питания, относятся к сложным цепям, если их нельзя рассчитать, применяя только закон Ома и первый закон Кирхгофа. Методы расчета сложных цепей рассмотрены ниже.

Схему соединения трех ветвей, образующих замкнутый контур с тремя узлами A, B, B (рис. 2-15), называют **треугольником**.

В некоторых случаях расчет сложной цепи значительно упрощается, если треугольник сопротивлений заменить **звездой** сопротивлений, т. е. тремя ветвями, имеющими дополнительный общий узел O (рис. 2-16). В других случаях расчета цепей встречается необходимость звезду заменить

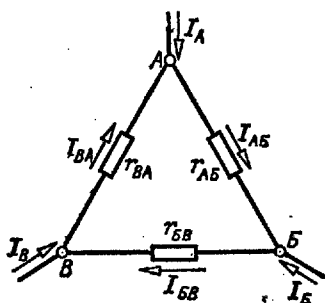


Рис. 2-15. Соединение сопротивлений треугольником.

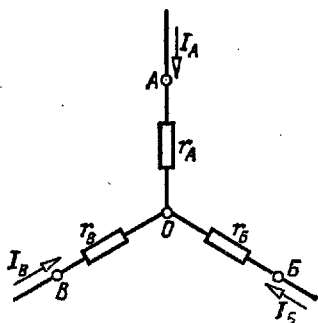


Рис. 2-16. Соединение сопротивлений звездой.

треугольником. Эти замены треугольника и звезды сопротивлений должны быть эквивалентными, т. е. при соответственно равных напряжениях между вершинами A, B и B треугольника и звезды токи I_A, I_B, I_B в подводящих проводах, соединяющих эти вершины с остальной частью цепи, должны остаться без изменений. Равенство токов должно выполняться при любых изменениях и переключениях в остальной части цепи и, в частности, при обрывах некоторых ее ветвей.

Сопротивления эквивалентной звезды r_A, r_B, r_B находятся в определенных соотношениях с сопротивлениями треугольника r_{AB}, r_{BC}, r_{CA} (рис. 2-15 и 2-16). Для выяснения этой зависимости допустим сначала, что в вершине A произошел обрыв подводящего провода и, следовательно, ток $I_A = 0$. Сопротивления между двумя оставшимися присоединенными вершинами B и B для обеих схем должны быть одинаковы, чтобы были соответственно равны токи I_B и

I_B обеих схем. После обрыва в вершине A сопротивления r_B и r_B в звезде соединены последовательно, а в треугольнике сопротивления r_{AB} и r_{BA} , соединенные последовательно, образуют одну ветвь с суммарным сопротивлением $r_{AB} + r_{BA}$, параллельно которой подключено сопротивление r_{BB} . Поэтому можно написать:

$$r_B + r_B = \frac{r_{BB}(r_{AB} + r_{BA})}{r_{BB} + (r_{AB} + r_{BA})}. \quad (2-27)$$

Рассуждая аналогично для случая обрыва в вершине B , при котором ток $I_B = 0$, а затем провода B , при котором ток $I_B = 0$, получим аналогичные выражения:

$$r_B + r_A = \frac{r_{BA}(r_{BB} + r_{AB})}{r_{BA} + (r_{BB} + r_{AB})}; \quad (2-28)$$

$$r_A + r_B = \frac{r_{AB}(r_{BA} + r_{BB})}{r_{AB} + (r_{BA} + r_{BB})}. \quad (2-29)$$

Чтобы преобразовать треугольник в звезду при заданных сопротивлениях сторон треугольника r_{AB} , r_{BB} , r_{BA} требуется определить сопротивления лучей эквивалентной звезды r_A , r_B , r_B . Для этого составим полусумму левых и правых частей уравнений (2-28) и (2-29)

$$r_A + \frac{1}{2}(r_B + r_B) = \frac{r_{AB}r_{BA} + \frac{1}{2}r_{BB}(r_{AB} + r_{BA})}{r_{AB} + r_{BB} + r_{BA}}$$

и вычтем из полученного выражения уменьшенные вдвое левую и правую части уравнения (2-27). В результате получим:

$$r_A = \frac{r_{AB}r_{BA}}{r_{AB} + r_{BB} + r_{BA}}. \quad (2-30)$$

Аналогично получим:

$$r_B = \frac{r_{BB}r_{AB}}{r_{AB} + r_{BB} + r_{BA}}; \quad (2-31)$$

$$r_B = \frac{r_{BA}r_{BB}}{r_{AB} + r_{BB} + r_{BA}}. \quad (2-32)$$

Таким образом, сопротивление луча эквивалентной звезды равно произведению сопротивлений двух сторон треугольника, которые присоединены к той же вершине, что и луч звезды, деленному на сумму сопротивлений всех сторон треугольника.

Если сопротивления треугольника равны друг другу: $r_{AB} = r_{BB} = r_{BA} = r_A$, то будут равны друг другу и сопро-

тивления звезды, т. е. $r_A = r_B = r_B = r_Y$, причем из формул (2-30)—(2-32) получается простое соотношение

$$r_Y = r_{\Delta}/3. \quad (2-33)$$

При обратном преобразовании звезды в эквивалентный треугольник, т. е. при заданных сопротивлениях r_A, r_B, r_B , надо решить три уравнения (2-30)—(2-32) относительно сопротивлений r_{AB}, r_{BB}, r_{BA} :

$$r_{AB} = r_A + r_B + r_A r_B / r_B; \quad (2-34)$$

$$r_{BB} = r_B + r_B + r_B r_B / r_A; \quad (2-35)$$

$$r_{BA} = r_B + r_A + r_B r_A / r_B. \quad (2-36)$$

Таким образом, сопротивление стороны эквивалентного треугольника равно сумме сопротивлений двух лучей звезды, присоединенных к тем же вершинам, что и сторона треугольника, и их произведения, деленного на сопротивление третьего луча звезды.

Пример 2-6. Определить токи в ветвях мостовой схемы (рис. 2-17), если известны величины: $E = 4,4$ В; $r_1 = 20$ Ом; $r_2 = 60$ Ом; $r_3 = 120$ Ом; $r_4 = 8$ Ом; $r_5 = 44$ Ом.

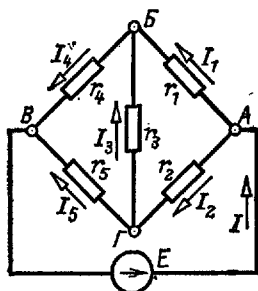


Рис. 2-17. Мостовая схема.

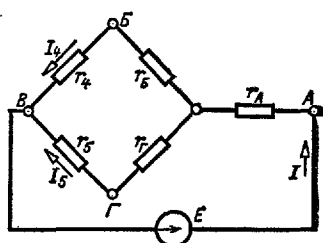


Рис. 2-18. Преобразованная мостовая схема.

Решение. Заменив один из треугольников схемы, например $ABГ$, образованный сопротивлениями r_1, r_2, r_3 , эквивалентной звездой, сопротивление лучей которой r_A, r_B и $r_Г$, получим простую схему смешанного соединений сопротивлений (рис. 2-18).

Найдем сопротивления лучей звезды

$$r_A = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3} = \frac{20 \cdot 60}{20 + 60 + 120} = 6 \text{ Ом};$$

$$r_B = \frac{r_3 r_1}{r_1 + r_2 + r_3} = \frac{120 \cdot 20}{20 + 60 + 120} = 12 \text{ Ом};$$

$$r_Г = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} = \frac{60 \cdot 120}{20 + 60 + 120} = 36 \text{ Ом}.$$

Эквивалентное сопротивление участка (рис. 2-18), состоящего из сопротивления r_A и двух параллельных ветвей $r_4 + r_B$ и $r_6 + r_G$,

$$r = r_A + \frac{(r_4 + r_B)(r_6 + r_G)}{r_4 + r_B + r_6 + r_G} = 6 + \frac{(8 + 12) \cdot (44 + 36)}{8 + 12 + 44 + 36} = 22 \text{ Ом.}$$

Ток в неразветвленной части схемы (рис. 2-18)

$$I = E/r = 4,4/22 = 0,2 \text{ А.}$$

Ток в ветви с сопротивлениями r_4, r_B

$$I_4 = I \frac{r_6 + r_G}{r_4 + r_B + r_6 + r_G} = 0,2 \frac{44 + 36}{8 + 12 + 44 + 36} = 0,16 \text{ А.}$$

Ток в ветви с сопротивлениями r_6, r_G

$$I_6 = I \frac{r_4 + r_B}{r_4 + r_B + r_6 + r_G} = 0,2 \frac{8 + 12}{8 + 12 + 44 + 36} = 0,04 \text{ А.}$$

Для определения токов I_1, I_2, I_3 , которых нет в преобразованной схеме (рис. 2-18), найдем потенциалы узловых точек Γ и B .

Напряжение на сопротивлении r_4

$$U_{BV} = \varphi_B - \varphi_V = I_4 r_4 = 0,16 \cdot 8 = 1,28 \text{ В.}$$

Напряжение на сопротивлении r_6

$$U_{\Gamma B} = \varphi_{\Gamma} - \varphi_B = I_6 r_6 = 0,04 \cdot 44 = 1,76 \text{ В.}$$

Полагая потенциал точки B равным нулю, получаем:

$$\varphi_B = U_{BV} \text{ и } \varphi_{\Gamma} = U_{\Gamma B}.$$

Напряжение на диагонали моста ΓB

$$U_{\Gamma B} = \varphi_{\Gamma} - \varphi_B = U_{\Gamma B} - U_{BV} = 1,76 - 1,28 = 0,48 \text{ В.}$$

Переходя к схеме рис. 2-17, найдем токи ветвей

$$I_3 = U_{\Gamma B} / r_3 = 0,48 / 120 = 0,004 \text{ А; } I_2 = I_3 + I_6 = 0,044 \text{ А;}$$

$$I_1 = I_4 - I_3 = 0,156 \text{ А.}$$

2-9

Метод узлового напряжения

Метод узлового напряжения дает возможность более просто, по сравнению с другими ниже рассмотренными методами, определить токи в цепи с *двумя узлами* (рис. 2-19).

Примем за положительное направление токов во всех ветвях направление от узла B к узлу A и определим разность потенциалов между двумя узлами A и B , которая называется узловым напряжением $U = U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$.

Перемещаясь по первой ветви от узла B к узлу A , найдем потенциал точки A

$$\Phi_B + E_1 - I_1 r_1 = \Phi_A$$

или

$$E_1 - U = I_1 r_1,$$

откуда ток первой ветви

$$I_1 = \frac{E_1 - U}{r_1} = (E_1 - U) g_1; \quad (2-37)$$

здесь r_1 и g_1 — сопротивление и проводимость первой ветви, в которые входит и внутреннее сопротивление первого источника.

Аналогично для остальных ветвей цепи

$$I_2 = (E_2 - U) g_2; \quad (2-38)$$

$$I_3 = (E_3 - U) g_3; \quad (2-39)$$

$$I_4 = (0 - U) g_4 = -U g_4. \quad (2-40)$$

По первому закону Кирхгофа для узла A запишем:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0.$$

Подставив в последнее уравнение выражения токов ветвей, получим:

$$(E_1 - U) g_1 + (E_2 - U) g_2 + (E_3 - U) g_3 + (-U) g_4 = 0.$$

Раскрывая скобки, находим узловое напряжение

$$U = U_{AB} = \frac{E_1 g_1 + E_2 g_2 + E_3 g_3}{g_1 + g_2 + g_3 + g_4},$$

или в общем случае узловое напряжение

$$U = \frac{\sum (Eg)}{\sum g}. \quad (2-41)$$

Таким образом, узловое напряжение равно отношению алгебраической суммы произведений э. д. с. на проводимости соответствующих ветвей к сумме проводимостей всех ветвей. Если какая-либо из э. д. с. имеет противоположное направление, то в формулу (2-41) она войдет со знаком «—».

Найдя узловое напряжение и подставив его в выражения для токов (2-37)—(2-40), можно определить токи во всех ветвях цепи.

Пример 2-7. Два источника питания работают на внешнюю цепь (рис. 2-20). Определить токи в ветвях цепи, если задано:

$$E_1 = 225 \text{ В}; \quad E_2 = 226 \text{ В};$$

$$r_{в1} = r_{в2} = 1 \text{ Ом}; \quad r_3 = 20 \text{ Ом}.$$

Решение. Вычислим проводимости ветвей

$$g_2 = g_1 = \frac{1}{r_{в1}} = 1 \text{ См};$$

$$g_3 = \frac{1}{r_3} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ См}.$$

Определим узловое напряжение

$$U = \frac{E_1 g_1 + E_2 g_2}{g_1 + g_2 + g_3} =$$

$$= \frac{225 \cdot 1 + 226 \cdot 1}{1 + 1 + 0,05} = 220 \text{ В}.$$

Определим токи в ветвях

$$I_1 = (E_1 - U) g_1 = (225 - 220) \cdot 1 = 5 \text{ А};$$

$$I_2 = (E_2 - U) g_2 = (226 - 220) \cdot 1 = 6 \text{ А};$$

$$I_3 = -U g_3 = -220 \cdot 0,05 = -11 \text{ А}.$$

Проверим результаты расчета по первому закону Кирхгофа

$$I_1 + I_2 + I_3 = 5 + 6 - 11 = 0.$$

Применяя метод узлового напряжения, выясним некоторые вопросы параллельной работы генераторов.

Нагрузка электрической станции в течение суток сильно изменяется. Ночью она минимальна, в начале рабочего дня и в его конце нагрузка максимальна. Ввиду этого на станциях устанавливают несколько генераторов. При малой нагрузке работает один генератор, при большой нагрузке — несколько генераторов.

При параллельном соединении нескольких (трех) генераторов, работающих на общий приемник r , получается схема, представленная на рис. 2-19, где $r_1 = r_{в1}$; $r_2 = r_{в2}$; $r_3 = r_{в3}$. Как видно из формул (2-37) — (2-39), токи генераторов будут одинаковы, если равны их э. д. с. $E_1 = E_2 = E_3$ и проводимости $g_1 = g_2 = g_3$ или внутренние сопротивления $r_{в1} = r_{в2} = r_{в3}$.

Узловое напряжение U на зажимах электрической станции практически мало отличается от э. д. с. генераторов,

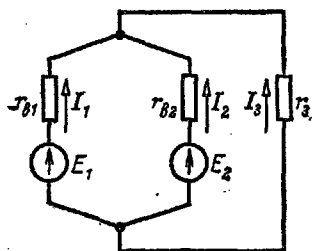


Рис. 2-20. Два источника питания, работающие параллельно.

так как внутренние сопротивления генераторов малы по сравнению с сопротивлением приемника, поэтому разность $E - U$ составляет всего несколько процентов от U и самое незначительное изменение э. д. с. какого-либо генератора приводит к весьма значительному изменению его тока. Например, при э. д. с. генератора $E_1 = 225$ В и узловом напряжении $U = 220$ В разность их $E_1 - U = 5$. Если э. д. с. генератора увеличить на 1%, или на 2 В, т. е. до 227 В, то разность $E_1 - U$ возрастет с 5 до 7 В, т. е. на 40%, на 40% возрастает и ток первого генератора (2-37). Таким образом, для увеличения тока (нагрузки) генератора достаточно незначительного увеличения его э. д. с.

Наоборот, для полной разгрузки генератора достаточно его э. д. с. уменьшить до величины узлового напряжения, так как в этом случае $I = (E - U) g = 0$. При дальнейшем уменьшении э. д. с. генератора, т. е. при $(E - U) < 0$, ток генератора изменит направление и будет направлен навстречу э. д. с.; таким образом, генератор перейдет в режим работы электродвигателя.

Пример 2-8. Определить, до какого значения надо увеличить э. д. с. E_1 первого генератора в примере 2-7 (рис. 2-20), для того чтобы второй генератор оказался разгруженным, т. е. чтобы ток $I_2 = 0$.

Решение. При $I_2 = (E_2 - U)g_2 = 0$ очевидно, что $E_2 - U = 0$ и $E_2 = U$; следовательно, можно записать:

$$U = \frac{E_1 g_1 + E_2 g_2}{g_1 + g_2 + g_3} = E_2,$$

откуда

$$E_1 = \frac{E_2 (g_1 + g_3)}{g_1} = \frac{226 (1 + 0,05)}{1} = 237 \text{ В.}$$

2-10

Метод наложения [суперпозиции] токов

Метод наложения можно применить для определения токов в цепи, в которой одновременно действует несколько э. д. с.

Сущность принципа наложения заключается в том, что ток в какой-либо ветви цепи с сопротивлениями, не зависящими от токов и напряжений, т. е. линейной, равен алгебраической сумме частичных токов, создаваемых в этой ветви всеми поочередно действующими э. д. с.

Проводя расчет с применением принципа наложения, вначале полагаем, что в цепи действует только первая э. д. с. E_1 . Все сопротивления цепи, включая и сопротивле-

ния источников, э. д. с. которых приравняются нулю, остаются неизменными. Для такой цепи находим частичные токи во всех ветвях. Затем расчет повторяем, полагая, что действует только вторая э. д. с. E_2 . Аналогичные расчеты производим поочередно для всех источников, включая и источники тока, если какие-либо реальные источники представлены схемами замещения с источниками тока.

Таким образом, для каждой ветви получается столько частичных токов, сколько источников содержит цепь.

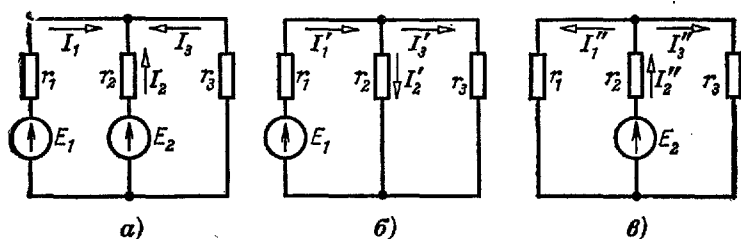


Рис. 2-21. Три схемы к расчету цепи методом наложения.

Алгебраическая сумма этих частичных токов и равна току I в ветви при одновременном действии всех источников:

$$I = I' + I'' + I''' + \dots, \quad (2-42)$$

где I' , I'' ... — частичные токи.

В некоторых случаях удобнее все источники цепи разделить на две или большее число групп и ток любой ветви рассматривать как алгебраическую сумму частичных токов этих групп источников.

Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 2-21, а. Положим сначала, что в цепи действует только одна э. д. с. E_1 (рис. 2-21, б). Тогда общее или эквивалентное сопротивление цепи будет состоять из последовательно соединенных сопротивлений r_1 и разветвления из двух параллельных сопротивлений r_2 и r_3 :

$$r_{\Sigma 1} = r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}.$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$I'_1 = E_1 / r_{\Sigma 1}.$$

Согласно (2-12) и (2-13) токи в параллельных ветвях

$$I'_2 = I'_1 \frac{r_3}{r_2 + r_3}; \quad I'_3 = I'_1 \frac{r_2}{r_2 + r_3}.$$

Затем, полагая, что действует только одна э. д. с. E_2 (рис. 2-21, в), находим общее сопротивление и ток в неразветвленной части цепи

$$r_{\Sigma 2} = r_2 + \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3}; \quad I_2'' = \frac{E_2}{r_{\Sigma 2}}.$$

Токи в параллельных ветвях

$$I_1'' = I_2'' \frac{r_3}{r_1 + r_3}; \quad I_3'' = I_2'' \frac{r_1}{r_1 + r_3}.$$

Токи в ветвях находим как алгебраические суммы частичных токов:

$$I_1 = I_1' - I_1''; \quad I_2 = I_2' - I_2''; \quad I_3 = -I_3' - I_3''.$$

Знак, который ставится перед частичным током, зависит от того, совпадает ли направление частичного тока (рис. 2-21, б и в) с выбранным положительным направлением тока в ветви (рис. 2-21, а) или противоположно ему.

2-11

Расчет цепей методом узловых и контурных уравнений

Расчет сложной цепи, состоящей из нескольких контуров, можно произвести, применив два закона Кирхгофа.

Если для рассматриваемой цепи заданы величины всех э. д. с. и сопротивлений, то для нахождения всех токов требуется столько расчетных уравнений, сколько в цепи неизвестных токов (по числу ветвей). При этом число независимых узловых уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, должно быть на единицу меньше числа узлов цепи. Например, если в цепи n узлов, то нужно составить уравнения для любых $(n - 1)$ узлов. Если составить узловое уравнение и для последнего n -го узла, то оно будет следствием уже составленных $(n - 1)$ уравнений и окажется бесполезным для расчета. Остальные уравнения должны быть контурные, т. е. составляться по второму закону Кирхгофа. Контурные уравнения рекомендуется составлять для более простых контуров с меньшим числом резисторов и источников питания. Кроме того, каждый новый контур, для которого составляется очередное уравнение, должен содержать не менее одной ветви, не входившей в контуры, для которых уже составлены уравнения. Выполнение последнего условия обеспечивает независимость составленных уравнений.

Определим токи во всех ветвях сложной цепи (рис. 2-22), если величины и направления э. д. с. и сопротивления заданы.

Для составления узловых и контурных уравнений необходимо знать направления токов. Так как направления токов в сложной цепи до расчета неизвестны, то зададимся произвольно направлениями токов во всех ветвях цепи и будем считать эти направления положительными. Они и указаны стрелками на рис. 2-22. Тогда токи будут алгебраическими величинами, т. е. могут принимать положительные или отрицательные значения. Если после составления уравнений и их решения получится отрицательное значение для какого-либо из токов, то этот ток в действительности проходит в направлении, противоположном выбранному и показанному на схеме.

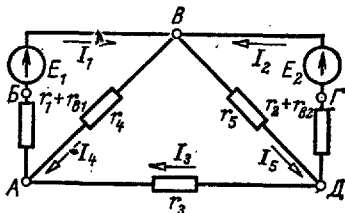


Рис. 2-22. Сложная цепь.

Рассматриваемая цепь (рис. 2-22) имеет три узла А, В, Д ($n = 3$), поэтому нужно составить два узловых уравнения для любых двух узлов, например, для узла А

$$-I_1 + I_3 + I_4 = 0$$

и для узла Д

$$-I_2 - I_3 + I_5 = 0.$$

Так как число неизвестных токов равно пяти, то нужно иметь пять независимых уравнений; следовательно, три недостающих уравнения — контурные. Для контура АБВА, который обходим в порядке расположения букв, т. е. по движению часовой стрелки, запишем:

$$E_1 = I_1(r_1 + r_2) + I_4 r_4.$$

Для контура АВДА

$$0 = -I_4 r_4 + I_5 r_5 + I_3 r_3$$

и для контура ВГДВ

$$-E_2 = -I_2(r_2 + r_3) - I_5 r_5.$$

Для заданной цепи можно составить еще несколько контурных уравнений, например для контуров АБВДА, АВГДА и АБВГДА. Эти уравнения не являются независи-

мыми, каждое из них может быть получено из ранее составленных уравнений и, следовательно, они не нужны для расчета цепи.

Правильность выполненного расчета можно проверить, составив баланс мощностей: сумма мощностей генераторов должна равняться сумме мощностей потребителей, что следует из закона сохранения энергии.

Пример 2-9. Определить токи и мощности во всех участках цепи (рис. 2-23), если заданы параметры цепи: $E_1 = 240$ В, $E_2 = 224$ В; $r_{B1} = 1$ Ом; $r_{B2} = 0,6$ Ом; $r_3 = 24$ Ом.

Решение. Задав положительные направления токов, показанными на рис. 2-23 стрелками, составим три уравнения. По первому закону Кирхгофа для одного из двух узлов, например для узла Б:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0;$$

по второму закону Кирхгофа для контура АБВГА

$$E_1 - E_2 = I_1 r_{B1} - I_2 r_{B2}$$

и для контура ВБГВ

$$E_2 = I_2 r_{B2} - I_3 r_3.$$

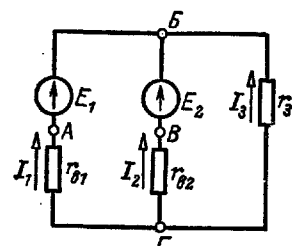


Рис. 2-23. К примеру 2-9. Схема цепи с двумя источниками питания.

Подставляя в последние два уравнения числовые значения известных величин, получим:

$$240 - 224 = 1 I_1 - 0,6 I_2; 224 = 0,6 I_2 - 24 I_3$$

или, так как по первому закону Кирхгофа $I_3 = -I_1 - I_2$,

$$16 = 1 I_1 - 0,6 I_2; 224 = 0,6 I_2 + 24 I_1 + 24 I_2$$

или

$$16 = 1 I_1 - 0,6 I_2; 224 = 24 I_1 + 24,6 I_2,$$

откуда после исключения I_1 получим:

$$160 = -39 I_2$$

и ток

$$I_2 = -160/39 = -4,10 \text{ А.}$$

Таким образом, ток I_2 в действительности направлен обратно указанной стрелкой на схеме.

Ток I_1 определяем из уравнения $16 = 1 I_1 - 0,6 I_2$, т. е.

$$I_1 = 16 + 0,6 I_2 = 16 - 2,46 = 13,54 \text{ А;}$$

наконец, ток

$$I_3 = -I_1 - I_2 = -13,54 + 4,10 = -9,44 \text{ А,}$$

т. е. ток I_3 в действительности направлен от точки Б к точке Г и $\Phi_B > \Phi_G$.

Мощность, развиваемая генератором (первым источником),

$$P_1 = E_1 I_1 = 240 \cdot 13,54 = 3249 \text{ Вт.}$$

Мощность в отдельных сопротивлениях цепи

$$P_{B1} = I_1^2 r_{B1} = 183 \cdot 1 = 183 \text{ Вт;}$$

$$P_{B2} = I_2^2 r_{B2} = 16,8 \cdot 0,6 = 10 \text{ Вт;}$$

$$P_3 = I_3^2 r_3 = 89 \cdot 24 = 2138 \text{ Вт.}$$

Мощность, развиваемая вторым источником,

$$P_2 = E_2 I_2 = 224 \cdot (-4,1) = -918 \text{ Вт.}$$

Этот источник работает в режиме потребителя электрической энергии, так как I_2 и E_2 имеют разные знаки (направлены противоположно).

Проверим правильность решения задачи, составив баланс мощностей:

$$P_1 + P_2 = P_{B1} + P_{B2} + P_3,$$

или

$$3249 + (-918) = 183 + 10 + 2138.$$

Написанный баланс не отражает физическую сторону процессов, так как второй источник не отнесен к потребителям электрической энергии. Поэтому запишем уравнение баланса в следующем виде:

$$P_1 = P_{B1} + P_{B2} + P_3 + |P_2|,$$

или

$$3249 \text{ Вт} = 183 + 10 + 2138 + 918 = 3249 \text{ Вт.}$$

2-12

Метод контурных токов

Метод контурных токов требует меньшего числа расчетных уравнений по сравнению с методом узловых и контурных уравнений и поэтому сокращает расчеты цепей. Он основан на применении второго закона Кирхгофа.

Для расчета токов в заданной цепи (рис. 2-24) выбираются контуры как и при записи уравнений по второму закону Кирхгофа. На рис. 2-24 выбраны элементарные контуры (ячейки) и для каждого из них произвольно задано направление тока, замыкающегося в этом контуре, — к о н т у р - н о г о т о к а.

Для каждого контура составляется уравнение по второму закону Кирхгофа, причем направление обхода контура принимается совпадающим с направлением контурного тока. Если цепь можно представить разбитой на ячейки (нет пересекающихся проводов), то число независимых уравнений по второму закону Кирхгофа как раз равно числу ячеек. После решения этих уравнений определяются все контурные токи.

Контуры обозначим римскими цифрами (рис. 2-24), а каждый контурный ток отметим индексом, соответствующим своему контуру. Токи в ветвях отмечены индексами своих ветвей (арабскими цифрами). Токи в ветвях, которые являются общими для двух контуров, определяются как алгебраические суммы соответствующих контурных токов, например $I_4 = I_I - I_{III}$. В остальных ветвях токи равны контурным, например $I_3 = I_{III}$.

Рассмотрим применение этого метода для цепи (рис. 2-24), которая имеет три контура — ячейки, для которых можно составить независимые уравнения по второму закону

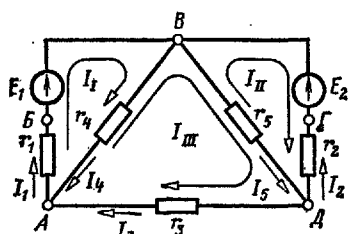


Рис. 2-24. К расчету цепи методом контурных токов.

Кирхгофа: контур I — АБВА с сопротивлениями r_1 , r_4 , источником э. д. с. E_1 и контурным током I_I ; контур II — ВГДВ с сопротивлениями r_2 , r_5 , источником э. д. с. E_2 и контурным током I_{II} ; контур III — АВДА с сопротивлениями r_3 , r_4 , r_5 и контурным током I_{III} .

Выбрав и показав на схеме направления контурных токов, составим для каждого контура уравнение по второму закону Кирхгофа. Для первого контура

$$E_1 = I_I(r_1 + r_4) - I_{III}r_4, \quad (2-43)$$

так как контурный ток I_I проходит по обоим сопротивлениям контура, а на сопротивлении r_4 есть падение напряжения от тока I_{III} , который направлен навстречу обходу контура.

Для второго контура

$$-E_2 = I_{II}(r_2 + r_5) - I_{III}r_5 \quad (2-44)$$

и для третьего контура

$$0 = I_{III}(r_3 + r_4 + r_5) - I_I r_4 - I_{II} r_5. \quad (2-45)$$

Подставив в написанные уравнения числовые значения сопротивлений и э. д. с. и решая их совместно, найдем контурные токи I_I , I_{II} и I_{III} . Токи в ветвях цепи $I_1 = I_I$; $I_2 = -I_{II}$; $I_3 = I_{III}$; $I_4 = I_I - I_{III}$; $I_5 = I_{III} - I_{II}$.

Пример 2-10. Определить токи во всех ветвях цепи, изображенной на рис. 2-24, если дано $E_1 = 120$ В; $E_2 = 110$ В; $r_1 = r_2 = 1$ Ом; $r_3 = 2$ Ом; $r_4 = 9$ Ом; $r_5 = 4$ Ом.

Решение. Разбив заданную цепь на три контура (рис. 2-24) и выбрав направления контурных токов, совпадающие с направлениями

обхода, составляем, как показано выше, три уравнения. Подставив в них заданные числовые значения, получим:

для первого контура (2-43)

$$120 = I_I (1 + 9) - I_{III} \cdot 9;$$

для второго контура (2-44)

$$-110 = I_{II} \cdot (1 + 4) - I_{III} \cdot 4;$$

для третьего контура (2-45)

$$0 = I_{III} (2 + 9 + 4) - I_I \cdot 9 - I_{II} \cdot 4.$$

Исключая последовательно токи I_I и I_{II} , находим ток

$$I_{III} = 5,4 \text{ A},$$

а затем из первых двух уравнений токи

$$I_I = 12 + 0,9 \cdot 5,4 = 16,86 \text{ A}$$

и

$$I_{II} = -17,68 \text{ A}.$$

Токи в ветвях цепи

$$I_1 = I_I = 16,86 \text{ A}; \quad I_2 = -I_{II} = 17,68 \text{ A}; \quad I_3 = I_{III} = 5,4 \text{ A};$$

$$I_4 = I_I - I_{III} = 16,86 - 5,4 = 11,46 \text{ A};$$

$$I_5 = I_{III} - I_{II} = 5,4 + 17,68 = 23,08 \text{ A}.$$

Проверим правильность решения задачи, составив баланс мощности

$$P_1 + P_2 = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 + I_3^2 r_3 + I_4^2 r_4 + I_5^2 r_5,$$

или

$$2023 + 1945 = 284 + 313 + 59 + 1179 + 2133 = 3968 \text{ Вт}.$$

Таким образом, задача решена правильно.

2-13

Метод эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора целесообразно применять для определения тока в какой-либо одной ветви сложной цепи.

Для расчета заданную сложную цепь разбивают на две части: участок цепи или ветвь с сопротивлением r , ток I в которой надо определить, и остальную часть цепи, состоящую из источников питания и из сопротивлений, соединенных по любой схеме. Эту вторую часть цепи называют активным двухполюсником и обозначают прямоугольником ДП двумя зажимами — полюсами «+» и «—» (рис. 2-25). Как указывалось ранее, двухполюсник, или часть цепи

с двумя зажимами, не содержащий источник питания, называют пассивным, а содержащий источник питания — активным.

Включим в ветвь с сопротивлением r два источника э. д. с. с одинаковыми э. д. с. $E_{01} = E_{02}$, направленными встречно друг другу (рис. 2-26). Эти э. д. с. вызовут в сопро-

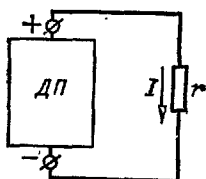


Рис. 2-25. Двухполюсник и ветвь с сопротивлением r .

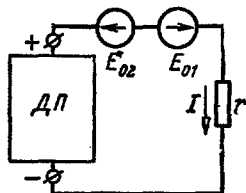


Рис. 2-26. Цепь с двумя дополнительными источниками.

тивлении r дополнительные равные и противоположно направленные токи $I_{01} = I_{02}$, так что суммарный ток в ветви останется прежним:

$$I + I_{01} - I_{02} = I, \quad (2-46)$$

где знак «—» перед током I_{02} поставлен потому, что э. д. с. E_{02} действует навстречу э. д. с. E_{01} и току I (рис. 2-26).

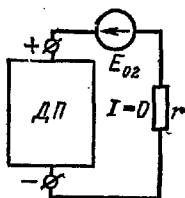


Рис. 2-27. Цепь с одним дополнительным источником E_{02} .

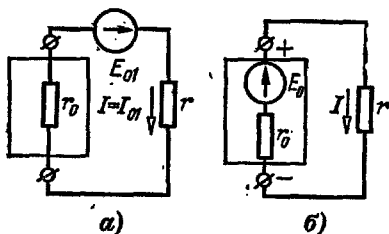


Рис. 2-28. Цепь с одним дополнительным источником E_{01} , эквивалентная цепи рис. 2-25.

Таким образом, включение двух источников с равными противоположно направленными э. д. с. не изменило тока в сопротивлении r .

Найдем ток I в цепи (рис. 2-26) по методу наложения, разделив все источники на две группы: к первой отнесем источники внутри двухполюсника и э. д. с. E_{02} (рис. 2-27), ко второй э. д. с. E_{01} (рис. 2-28, а).

Выберем э. д. с. $E_{02} = E_0$ такой, чтобы вызванный ею ток I_{02} был равен току I и, следовательно,

$$I - I_{02} = 0, \quad (2-47)$$

т. е. частичный ток от действия первой группы источников равен нулю. Значит, действительный ток I в цепи равен частичному току при действии только источника э. д. с. $E_{01} = E_0$:

$$I = I_{01} = \frac{E_{01}}{r + r_0} = \frac{E_0}{r + r_0}, \quad (2-48)$$

где r_0 — эквивалентное (общее) сопротивление двухполюсника.

Последнее выражение представляет собой формулу закона Ома (1-50) для электрической цепи, состоящей из источника с э. д. с. E_0 и внутренним сопротивлением r_0 и сопротивлением r внешнего участка. Схему рис. 2-28, а можно изобразить и так, как показано на рис. 2-28, б.

Из формулы (2-48) следует, что активный двухполюсник может быть заменен источником или эквивалентным генератором с э. д. с. E_0 и сопротивлением r_0 . Схемы рис. 2-25 и 2-28, б эквивалентны для ветви с сопротивлением r , так как в сопротивлении r в том и другом случае проходит один и тот же ток I .

Таким образом, для определения тока в ветви с сопротивлением r надо найти э. д. с. эквивалентного генератора E_0 (рис. 2-28, б) и его внутреннее сопротивление r_0 . Их можно, например, определить опытным путем. При разрыве внешнего участка цепи двухполюсника (рис. 2-25 и 2-28, б), т. е. отключении сопротивления r , ток I будет равен нулю — режим холостого хода. При этом и внутреннее падение напряжения в эквивалентном генераторе равно нулю ($I r_0 = 0$), следовательно, напряжение холостого хода на его зажимах и зажимах двухполюсника равно э. д. с. E_0 (рис. 2-28, б). Это напряжение (э. д. с. E_0) на зажимах двухполюсника при размыкании внешней цепи можно измерить вольтметром (рис. 2-29, а).

Из формулы (2-48) следует, что, замкнув зажимы двухполюсника накоротко ($r = 0$) или через амперметр с ничтож-

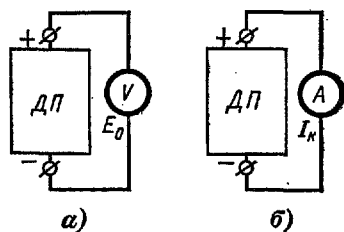


Рис. 2-29. Схемы опытов холостого хода (а) и короткого замыкания (б).

ным сопротивлением и измерив ток короткого замыкания I_k (рис. 2-29, б), можно определить сопротивление эквивалентного генератора по формуле

$$r_0 = E_0 / I_k.$$

Напряжение холостого хода двухполюсника или э. д. с. эквивалентного генератора E_0 и его сопротивление r_0 можно найти расчетом. Для определения э. д. с. E_0 надо отключить сопротивление r (положить $r = \infty$) и найти напряжение между зажимами «+» и «-» (рис. 2-25), к которым было присоединено сопротивление r . Для определения сопротивления двухполюсника r_0 находят сопротивление между зажимами двухполюсника «+» и «-» (рис. 2-25) при отключенном сопротивлении r , считая все э. д. с. в цепи двухполюсника равными нулю.

Пример 2-11. Определить ток в ветви с сопротивлением $r = 8$ Ом (рис. 2-30), если сопротивления $r_1 = 20$ Ом; $r_2 = 5$ Ом; $r_3 = 10$ Ом; $r_4 = 40$ Ом и э. д. с. $E = 25$ В.

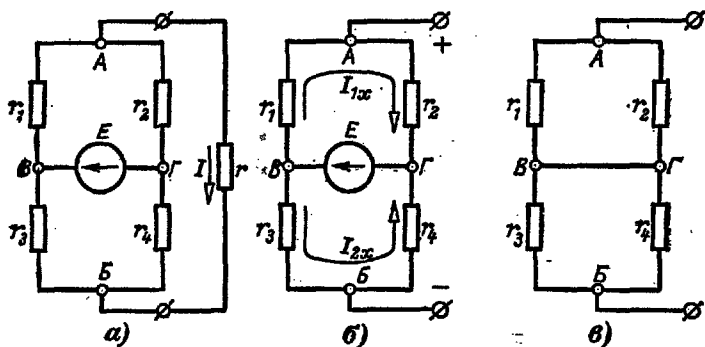


Рис. 2-30. Схемы к примеру 2-11.

Решение. Определим напряжение между точками АБ схемы при отсоединенном сопротивлении r (рис. 2-30, б), т. е. напряжение холостого хода, равное э. д. с. E_0 эквивалентного генератора (рис. 2-28, б). Так как сопротивления r_1 и r_2 на этой схеме соединены последовательно, ток в ветви ВАГ

$$I_{1x} = \frac{E}{r_1 + r_2} = \frac{25}{20 + 5} = 1 \text{ А.}$$

Ток в ветви ВБГ с сопротивлениями r_3 и r_4 определим по аналогичной формуле

$$I_{2x} = \frac{E}{r_3 + r_4} = \frac{25}{10 + 40} = 0,5 \text{ А.}$$

Приняв потенциал точки B равным нулю ($\varphi_B = 0$), определим разность потенциалов между точками A и B ($\varphi_A - \varphi_B$) в режиме холостого хода:

$$\varphi_B - \varphi_A = I_{1x} r_1 = 1 \cdot 20 = 20 \text{ В или } \varphi_A = -20 \text{ В};$$

$$\varphi_B - \varphi_B = I_{2x} r_3 = 0,5 \cdot 10 = 5 \text{ В или } \varphi_B = -5 \text{ В};$$

$$\varphi_A - \varphi_B = E_0 = -20 + 5 = -15 \text{ В}$$

(при подключенном сопротивлении r разность потенциалов точек A и B будет, конечно, другой).

Для определения сопротивления r_0 эквивалентного генератора (рис. 2-28, б) примем, что э. д. с. E равна нулю, т. е. точки B и Γ коротко замкнуты (рис. 2-30, в). Сопротивление между точками A и B или сопротивление двухполюсника найдем как последовательное соединение двух пар параллельно соединенных сопротивлений (r_1, r_2) и (r_3, r_4):

$$r_0 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4} = \frac{20 \cdot 5}{20 + 5} + \frac{10 \cdot 40}{10 + 40} = 4 + 8 = 12 \text{ Ом.}$$

Ток в ветви с сопротивлением r

$$I = \frac{E_0}{r + r_0} = \frac{-15}{8 + 12} = -0,75 \text{ А.}$$

Знак « $\rightarrow$ » указывает на то, что ток I имеет направление, противоположное выбранному на рис. 2-30, а.

2-14

Четырехполюсник

Четырехполюсником называется часть электрической цепи, имеющая две пары зажимов. К первичным зажимам ($1' - 1''$) может быть присоединен источник питания, например, с напряжением U_1 (рис. 2-31), к вторичным

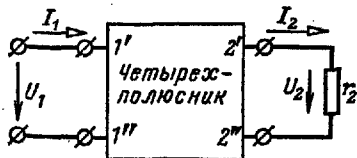


Рис. 2-31. Четырехполюсник.

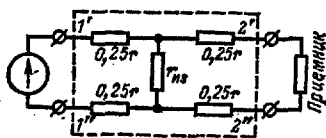


Рис. 2-32. Схема замещения двухпроводной линии.

($2' - 2''$) — потребитель с сопротивлением r_2 . В этом случае первичные зажимы называют входными, а вторичные — выходными. Четырехполюсник называется пассивным, если внутри него нет источников питания, а при наличии источников — активным.

Примерами четырехполюсника могут служить двухпроводная линия электропередачи (рис. 2-11) и ее схема замещения (рис. 2-32) с сопротивлением проводов r и сопротивлением изоляции $r_{из}$ между проводами, трехконтактный делитель напряжения (рис. 2-33), четырехплечий мост, двухобмоточный трансформатор и т. д.

Напряжение между входными зажимами называется входным U_1 (рис. 2-31). Ток, проходящий через входные зажимы, называется входным I_1 , отношение U_1/I_1 соответственно называется входным сопротивлением $r_{вх} = U_1/I_1$. Напряжение между выходными зажимами четырехполюс-

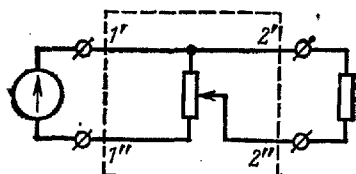


Рис. 2-33. Схема соединения источника питания и приемника с применением трехконтактного делителя напряжения.

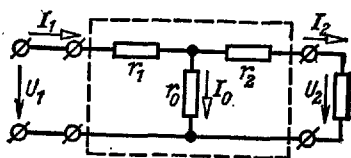


Рис. 2-34. Т-образная схема замещения четырехполюсника.

ника называется выходным U_2 и ток, проходящий через выходные зажимы, называется выходным I_2 .

Любой пассивный линейный четырехполюсник (с сопротивлениями, не зависящими от токов и напряжений) можно заменить эквивалентным с тремя сопротивлениями, соединенными звездой — Т-образная схема замещения (рис. 2-34), или треугольником — П-образная схема замещения (рис. 2-35):

Между входными параметрами I_1 и U_1 и выходными I_2 и U_2 существуют линейные зависимости, называемые уравнениями четырехполюсника.

Например, для Т-образной схемы (рис. 2-34) можно непосредственно записать выражение входного тока

$$I_1 = I_2 + I_0 = I_2 + (U_2 + I_2 r_2) \frac{1}{r_0} = \frac{U_2}{r_0} + I_2 \left(1 + \frac{r_2}{r_0} \right)$$

и входного напряжения

$$\begin{aligned} U_1 &= I_1 r_1 + I_2 r_2 + U_2 = \left[\frac{U_2}{r_0} + \left(1 + \frac{r_2}{r_0} \right) I_2 \right] r_1 + I_2 r_2 + U_2 = \\ &= \left(1 + \frac{r_1}{r_0} \right) U_2 + \left(r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_0} \right) I_2. \end{aligned}$$

Обозначив для упрощения записи

$$A = 1 + \frac{r_1}{r_0}; \quad B = r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_0}; \quad C = \frac{1}{r_0}; \quad D = 1 + \frac{r_2}{r_0}, \quad (2-49)$$

получим два уравнения четырехполюсника:

$$U_1 = AU_2 + BI_2 \quad \text{и} \quad I_1 = CU_2 + DI_2; \quad (2-50)$$

A , B , C и D называются коэффициентами (постоянными) четырехполюсника.

Для П-образной схемы (рис. 2-35) можно непосредственно записать выражение входного напряжения и входного тока

$$U_1 = r_0 \left(I_2 + \frac{U_2}{r_2} \right) + U_2 = \left(1 + \frac{r_0}{r_2} \right) U_2 + r_0 I_2;$$

$$I_1 = \frac{U_1}{r_1} + \frac{U_2}{r_2} + I_2 = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{r_0}{r_1 r_2} \right) U_2 + \left(1 + \frac{r_0}{r_1} \right) I_2.$$

Обозначив для П-образной схемы

$$A = 1 + \frac{r_0}{r_2}; \quad B = r_0; \quad C = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{r_0}{r_1 r_2}; \quad D = 1 + \frac{r_0}{r_1} \quad (2-51)$$

и подставив эти выражения в написанные уравнения входного напряжения и входного тока, получим:

$$U_1 = AU_2 + BI_2$$

и

$$I_1 = CU_2 + DI_2,$$

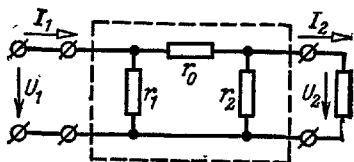


Рис. 2-35. П-образная схема замещения четырехполюсника.

где, конечно, постоянные A , B , C , D имеют для П-образной схемы другие значения, чем для Т-образной. Таким образом, снова получили уравнения (2-50).

Из выражений (2-49) и (2-51) следует, что постоянные четырехполюсника A и D — отвлеченные числа, B имеет размерность сопротивления, а C — проводимости. Постоянные четырехполюсника связаны между собой соотношением

$$AD - BC = 1, \quad (2-52)$$

что легко проверить прямой подстановкой как для Т- и П-образных схем, так и для любого другого пассивного четырехполюсника.

Если у четырехполюсника поменять местами входные и выходные зажимы, т. е. подвести от источника питания

напряжение U_2 к вторичным зажимам $2' - 2''$, которые теперь стали входными, а к первичным зажимам $1' - 1''$ присоединить потребитель, то можно, повторив вычисления, аналогичные выполненным выше, показать, что уравнения четырехполюсника при обратных направлениях токов примут вид:

$$U_2 = DU_1 + BI_1' \text{ и } I_2' = CU_1 + AI_1', \quad (2-53)$$

где штрихами отмечены токи обратного направления. Сравнивая уравнения (2-53) и (2-50), отметим, что постоянные A и D поменялись местами.

Четырехполюсник называется симметричным, если при взаимной замене зажимов $1' - 1''$ и зажимов $2' - 2''$ режимы источника питания и потребителя не изменяются. Для симметричного четырехполюсника должно выполняться равенство $A = D$, так как в этом случае при замене первичных и вторичных зажимов уравнения четырехполюсника будут одинаковы.

Электрическую цепь с двумя парами зажимов, состоящую из произвольного числа резисторов, можно заменить эквивалентной Т-образной или П-образной схемой; поэтому выведенные зависимости между входными и выходными токами и напряжениями применимы к любому пассивному линейному четырехполюснику.

Определение постоянных четырехполюсника. Режим четырехполюсника при разомкнутых выходных зажимах, т. е. при $I_2 = 0$, называется холостым ходом четырехполюсника (рис. 2-36). Обозначив входное напряжение U_{1x} и входной ток I_{1x} , перепишем уравнения четырехполюсника (2-50) для холостого хода:

$$U_{1x} = AU_2 \text{ и } I_{1x} = CU_2. \quad (2-54)$$

Режим четырехполюсника при короткозамкнутых выходных зажимах, т. е. при $U_2 = 0$, называется коротким замыканием четырехполюсника (рис. 2-37). Обозначив входное напряжение $U_{1к}$ и входной ток $I_{1к}$, напишем уравнения четырехполюсника (2-50) для короткого замыкания

$$U_{1к} = BI_2 \text{ и } I_{1к} = DI_2. \quad (2-55)$$

Составленные уравнения для холостого хода и короткого замыкания при питании четырехполюсника со стороны зажимов $1' - 1''$ позволяют найти входное сопротивление при холостом ходе r_{1x} и коротком замыкании $r_{1к}$

$$r_{1x} = U_{1x}/I_{1x} = A/C \text{ и } r_{1к} = U_{1к}/I_{1к} = B/D. \quad (2-56)$$

Поменяв местами первичные и вторичные зажимы, т. е. при питании со стороны зажимов $2' - 2''$, и приняв во внимание, что все постоянные в этом случае не изменяются, но постоянные A и D меняются местами (2-53), аналогично получим входные сопротивления

$$r_{2x} = U_{2x}/I'_{2x} = D/C \text{ и } r_{2k} = U_{2k}/I'_{2k} = B/A. \quad (2-57)$$

Выбрав три из четырех полученных уравнений и учитывая уравнение (2-52), можно определить постоянные четырехполюсника A , B , C и D .

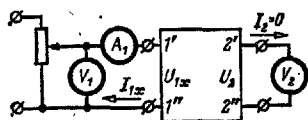


Рис. 2-36. Схема опыта холостого хода.

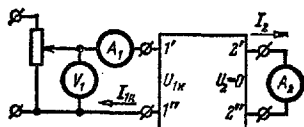


Рис. 2-37. Схема опыта короткого замыкания.

Например, для определения постоянной C запишем:

$$r_{1x} - r_{1k} = \frac{1}{CD} \text{ и } r_{2x} (r_{1x} - r_{1k}) = \frac{1}{C^2},$$

откуда находим постоянную

$$C = \frac{1}{\sqrt{r_{2x} (r_{1x} - r_{1k})}}. \quad (2-58)$$

Теперь из (2-56) и (2-57) найдем остальные постоянные:

$$A = Cr_{1x}; \quad D = Cr_{2x}; \quad B = Dr_{1k}. \quad (2-59)$$

Определив постоянные A , B , C , D , можно, например, найти параметры Т-образной схемы замещения из формул (2-49):

$$r_0 = 1/C; \quad r_1 = (A - 1)/C; \quad r_2 = (D - 1)/C. \quad (2-60)$$

Аналогично сопротивления П-образной схемы находятся из (2-51).

Испытание четырехполюсника. Важным свойством пассивного четырехполюсника является возможность рассматривать его рабочий режим как результат наложения режимов холостого хода и короткого замыкания. Это свойство, с одной стороны, упрощает испытания четырехполюсника, с другой, требует сравнительно небольшой мощности от источника питания при проведении испытаний.

При опыте холостого хода (рис. 2-36) напряжение на выходных зажимах $2' - 2''$ можно выбрать равным заданному номинальному U_2 , которое устанавливается регулировкой первичного напряжения U_{1x} . При опыте короткого замыкания (рис. 2-37) ток в выходном контуре можно выбрать равным заданному номинальному $I_2 = U_2/r_2$, который устанавливается регулировкой первичного напряжения U_{1k} . Напряжения и токи измеряются включенными приборами.

При холостом ходе входное напряжение и входной ток определяются уравнениями (2-54). При коротком замыкании входное напряжение и входной ток определяются уравнениями (2-55).

Следовательно, заданный режим работы четырехполюсника, определяемый уравнением (2-50), получается наложением режимов холостого хода и короткого замыкания, так как

$$U_1 = AU_2 + BI_2 = U_{1x} + U_{1k} \quad (2-61)$$

и

$$I_1 = CU_2 + DI_2 = I_{1x} + I_{1k}. \quad (2-62)$$

Пример 2-12. Определить напряжение U_1 и ток I_1 четырехполюсника в рабочем режиме, если при заданных величинах $U_2 = 110$ В и $I_2 = 1,5$ А при холостом ходе измерено $U_{1x} = 285$ В, $I_{1x} = 5$ А, а при коротком замыкании измерено $U_{1k} = 20$ В, $I_{1k} = 95$ А. Найти, во сколько раз мощность источника при испытании четырехполюсника в рабочем режиме будет больше мощности источника при опытах холостого хода и короткого замыкания.

Решение. Напряжение и ток на входе

$$\begin{aligned} U_1 &= U_{1x} + U_{1k} = 285 + 20 = 305 \text{ В;} \\ I_1 &= I_{1x} + I_{1k} = 5 + 95 = 100 \text{ А.} \end{aligned}$$

Мощность, развиваемая источником при опыте холостого хода,

$$P_x = U_{1x} I_{1x} = 285 \cdot 5 = 1,425 \text{ кВт}$$

и при опыте короткого замыкания

$$P_k = U_{1k} I_{1k} = 20 \cdot 95 = 1,900 \text{ кВт.}$$

Мощность, развиваемая источником при испытании четырехполюсника в рабочем режиме,

$$P_1 = U_1 I_1 = 305 \cdot 100 = 30,5 \text{ кВт.}$$

Отношение

$$P_1/P_x = 30,5/1,425 = 21,4; \quad P_1/P_k = 30,5/1,900 = 16.$$

Мощность источника при испытании четырехполюсника в рабочем режиме должна быть в 21,4 раза больше мощности источника при опыте холостого хода и в 16 раз больше мощности при опыте короткого замыкания.

Измерение силы тока и напряжения

Приборы, предназначенные для измерения силы тока меньше 1 мкА, называются гальванометрами, а для измерения больших токов — микроамперметрами, миллиамперметрами, амперметрами или килоамперметрами в зависимости от величины измеряемых ими токов.

Главной частью любого прибора для измерения силы тока является измерительный механизм, или, короче, измеритель И. Ток, проходя по измерителю, вследствие теплового или электромагнитного действия вызывает поворот подвижной части измерителя. Это дает возможность на шкале прибора нанести значения силы тока, соответствующие различным углам поворота подвижной части (указательной стрелки), и проградуировать прибор для измерения силы тока.

Для устройства измерительного механизма иногда используют тепловое действие тока. Главной частью теплового измерителя является обладающая большим коэффициентом линейного удлинения тонкая платиноиридиевая проволока, натянутая между двумя зажимами КК (рис. 2-38). Проходящий по ней измеряемый ток вызывает ее нагревание и удлинение. Удлинение проволоки при помощи пружины П и системы оттяжек БГВ и ГОП преобразуется во вращательное движение блока О и укрепленной на той же оси указательной стрелки. Таким образом, каждой силе тока соответствует определенный угол поворота стрелки. Номинальная сила тока измерителя не превышает 0,5 А. Для измерения больших сил токов применяют шунт. Шунт — это измеритель-

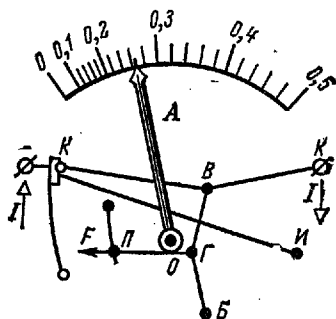


Рис. 2-38. Тепловой амперметр.

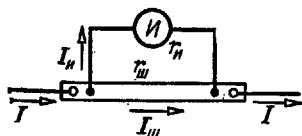


Рис. 2-39. Схема соединения измерителя и шунта.

ный преобразователь, выполненный из манганина с постоянным сопротивлением $r_{ш}$, параллельно которому присоединяют измеритель И с сопротивлением $r_{и}$ (рис. 2-39).

Измеряемый ток I делится на две части: ток измерителя $I_{и}$ и ток шунта $I_{ш}$.

Падение напряжения на разветвлении (рис. 2-39)

$$I_{и} r_{и} = I \frac{r_{и} r_{ш}}{r_{и} + r_{ш}},$$

откуда измеряемый ток

$$I = \frac{r_{и} + r_{ш}}{r_{ш}} I_{и} = \rho I_{и}. \quad (2-63)$$

При постоянных сопротивлениях ветвей между измеряемым током I и током в измерителе $I_{и}$ будет постоянное отношение ρ . Таким

образом, по углу поворота измерителя можно определить измеряемый ток.

Из формулы (2-63) следует, что шунтирующий множитель

$$\rho = \frac{r_n + r_{ш}}{r_{ш}} = 1 + \frac{r_n}{r_{ш}}, \quad (2-64)$$

а сопротивление шунта

$$r_{ш} = \frac{r_n}{\rho - 1}. \quad (2-65)$$

Амперметр показывает величину тока, который идет через него. Поэтому для измерения тока в каком-либо приемнике, генераторе или участке цепи амперметр надо присоединить последовательно (рис. 2-40).

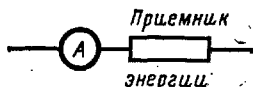


Рис. 2-40. Схема включения амперметра.

Включение амперметра не должно влиять на режим работы цепи, следовательно, сопротивление его должно быть малым по сравнению с сопротивлением приемника, генератора или участка цепи. В этом случае будет мала и мощность потерь в амперметре.

Приборы, предназначенные для измерения напряжения, называются милливольтметрами, вольтметрами или киловольтметрами в зависимости от величины их номинальных напряжений.

Измерительный механизм вольтметра может быть таким же, как и у амперметра, но номинальный ток его мал и не превышает 50—100 мА. Угол поворота подвижной части вольтметра зависит от силы тока в его измерителе, а при постоянном сопротивлении вольтметра, — и от напряжения на зажимах вольтметра. На шкале вольтметра наносятся деления, соответствующие напряжению, приложенному к его зажимам. Поэтому для измерения напряжения между какими-либо двумя точками электрической цепи эти точки должны быть соединены с зажимами вольтметра (рис. 2-41) и сопротивление вольтметра должно быть много больше сопротивления цепи между зажимами, к которым подключается вольтметр, чтобы присоединение вольтметра не изменяло режим работы цепи. Большое сопротивление вольтметра обеспечивается добавочным сопротивлением r_d из манганина, которое соединяется последовательно с измерителем (рис. 2-42).

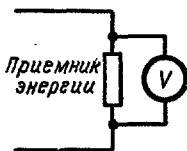


Рис. 2-41. Схема присоединения вольтметра.

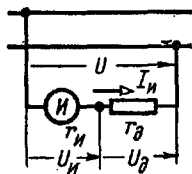


Рис. 2-42. Схема соединения измерителя и добавочного сопротивления.

Отношение, показывающее, во сколько раз напряжение на зажимах вольтметра $U = I_n(r_n + r_d)$ больше напряжения на измерителе $U_n = I_n r_n$, называется множителем добавочного сопротивления ρ . Таким образом, множитель

$$\rho = \frac{U}{U_n} = \frac{r_n + r_d}{r_n} = 1 + \frac{r_d}{r_n}, \quad (2-66)$$

откуда определяется добавочное сопротивление

$$r_d = r_n(\rho - 1). \quad (2-67)$$

Добавочное сопротивление, так же как и шунт, является измерительным преобразователем.

Переносные вольтметры часто имеют несколько номинальных напряжений, например 3—15—150 В. Это достигается включением различных добавочных сопротивлений.

Для измерений постоянных токов и постоянных напряжений применяются преимущественно измерители магнитоэлектрической системы (§ 4-11).

Пример 2-13. Определить сопротивление шунта для расширения предела измерения силы тока в 25 раз, если сопротивление измерителя $r_{и} = 0,24$ Ом.

Решение. Сопротивление шунта

$$r_{ш} = \frac{r_{и}}{p-1} = \frac{0,24}{25-1} = 0,01 \text{ Ом.}$$

Пример 2-14. Определить добавочное сопротивление к измерителю с номинальным напряжением 45 мВ и сопротивлением $r_{и} = 9$ Ом, если необходимо расширить предел измерения напряжения до 135 В.

Решение. Множитель добавочного сопротивления

$$p = 135/0,045 = 3000.$$

Добавочное сопротивление

$$r_{д} = r_{и} (p - 1) = 9 (3000 - 1) = 26\,991 \text{ Ом.}$$

2-16

Измерение сопротивлений

Одним из распространенных методов измерения сопротивления является метод амперметра и вольтметра.

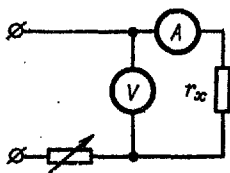


Рис. 2-43. Схема измерения относительно больших сопротивлений.

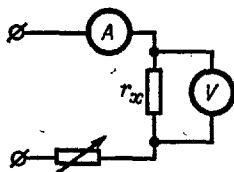


Рис. 2-44. Схема измерения относительно небольших сопротивлений.

Измерив силу тока I амперметром и напряжение U вольтметром (рис. 2-43), сопротивление рассчитаем по формуле

$$r'_x = U/I. \quad (2-68)$$

Найденное значение r'_x больше действительного измеряемого сопротивления r_x , так как вольтметр, включенный по схеме рис. 2-43, измеряет сумму напряжений на измеряемом сопротивлении $I r_x$ и на ампер-

метре $I r_A$. Действительное значение сопротивления

$$r_x = \frac{U}{I} - r_A. \quad (2-69)$$

Если измеряемое сопротивление r_x велико по сравнению с сопротивлением амперметра, то последним можно пренебречь и найденное r_x считать за действительное.

При измерении по схеме рис. 2-44 сопротивление, найденное по формуле

$$r_x'' = U/I, \quad (2-70)$$

будет меньше действительного измеряемого сопротивления, так как амперметр измеряет сумму сил токов в измеряемом сопротивлении и в вольтметре I_B . Поэтому действительное сопротивление

$$r_x = \frac{U}{I - I_B}. \quad (2-71)$$

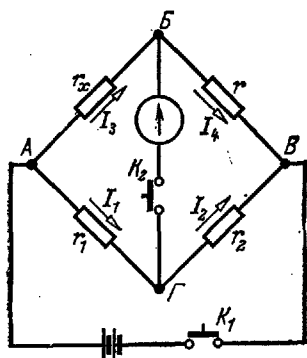


Рис. 2-45. Мост для измерений сопротивлений.

Если сопротивление вольтметра велико по сравнению с измеряемым, то током вольтметра можно пренебречь и найденное значение r_x'' принять за действительное.

Кроме рассмотренного метода амперметра и вольтметра часто для измерений сопротивлений применяют измерительный мост.

Три измерительных резистора с сопротивлениями r_1 , r_2 , r и одно измеряемое сопротивление r_x образуют замкнутый контур АБВГА (рис. 2-45). В одну диагональ контура включен источник питания (например, химический), в другую (БГ) — гальванометр. При замкнутых кнопках K_1 и K_2 в четырех плечах моста проходят токи I_1 , I_2 , I_3 , I_4 .

Изменяя сопротивления плеч моста r_1 , r_2 и r , можно получить равенство потенциалов Φ_B и Φ_Γ . При этом сила тока в гальванометре равна нулю, следовательно, $I_1 = I_2$ и $I_3 = I_4$, равны и разности потенциалов $\Phi_A - \Phi_B = \Phi_A - \Phi_\Gamma$, а также $\Phi_B - \Phi_\Gamma = \Phi_\Gamma - \Phi_B$.

Разности потенциалов можно выразить через падения напряжения на соответствующих плечах моста, т. е.

$$I_3 r_x = I_1 r_1 \text{ и } I_4 r = I_2 r_2.$$

Разделив почленно написанные уравнения и сократив соответствующие равные токи, получим:

$$r_x/r = r_1/r_2 \text{ или } r_x r_2 = r r_1, \quad (2-72)$$

откуда и определяется измеряемое сопротивление

$$r_x = r r_1 / r_2. \quad (2-73)$$

Этот метод измерения сопротивлений дает более точные результаты, чем метод амперметра и вольтметра.

Нелинейные цепи постоянного тока и их элементы

3-1

Нелинейные элементы и их характеристики

Элемент электрической цепи, сопротивление которого зависит от тока в нем или от напряжения на его зажимах, называется **н е л и н е й н ы м** элементом. Наоборот, если сопротивление элемента постоянно, то элемент называется линейным.

Строго говоря, линейных элементов нет, так как при различных токах в проводнике развивается различная тепловая мощность и изменяются температура, а следовательно, и сопротивление. Таким образом, любой элемент цепи теоретически нелинеен, однако если нелинейность невелика и ею можно пренебречь, то элемент практически можно считать линейным.

Электрическая цепь называется линейной, если она содержит только линейные элементы, и нелинейной при наличии одного или нескольких нелинейных элементов.

Зависимость напряжения на каком-либо элементе от тока в нем $U(I)$ или зависимость тока от напряжения $I(U)$ называется **вольт-амперной характеристикой**. Для линейных пассивных элементов вольт-амперная характеристика представляет собой прямую, проходящую через начало координат (прямая 1 на рис. 3-1). Для нелинейного элемента она непрямолинейна. Например, вольт-амперная характеристика лампы с металлической нитью, имеющей положительный температурный коэффициент, отличается от прямой, отклоняясь вниз (кривая 2 на рис. 3-1), а у лампы с угольной нитью, имеющей отрицательный коэффициент сопротивления, наоборот, отклоняется от прямой вверх (кривая 3 на рис. 3-1).

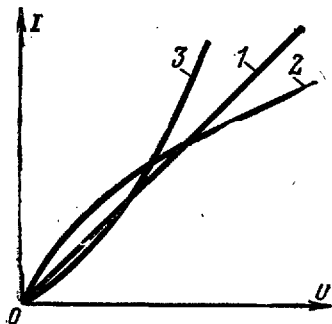


Рис. 3-1. Вольт-амперные характеристики.

Примерами нелинейных элементов могут служить электронные лампы, полупроводниковые вентили, стабилизаторы и другие приборы.

3-2 Вакуумный промежуток

Под вакуумным промежутком понимают рабочее пространство электровакуумного прибора. Электр о в а к у - у м н ы м п р и б о р о м называют прибор, принцип действия которого связан с использованием электрических явлений в его рабочем пространстве, причем рабочий промежуток изолирован газонепроницаемой оболочкой от окружающей среды и в нем создан вакуум.

Электровакуумные приборы получили очень широкое распространение во всех областях науки и техники.

Под вакуумом понимается газ, в частности воздух, имеющий такую высокую степень разрежения [давления около 10^{-5} — 10^{-4} Па], при которой движение электронов происходит практически без соударений с оставшимися молекулами газа. Вакуум является непроводящей средой, так как в нем почти отсутствуют частицы вещества и, следовательно, невозможна ионизация, т. е. расщепление частиц газа на обеспечивающие электропроводность ионы и электроны.

Для получения в вакууме электрического тока необходим источник заряженных частиц — электронов. Таким источником служит металлический электрод, называемый к а т о д о м, при этом используется электронная эмиссия.

Электронной эмиссией называется явление выхода электронов за пределы проводника (твердого или жидкого). Для того чтобы покинуть проводник, электрон должен совершить работу выхода A , определяемую произведением заряда электрона e и потенциала выхода ϕ , т. е. $A = e\phi$. При нормальной температуре кинетическая энергия электронов недостаточна для совершения работы выхода и поэтому выхода электронов из проводника практически не наблюдается. Для того чтобы электрон покинул электрод, ему необходимо сообщить дополнительную энергию. В зависимости от того, каким способом сообщается эта энергия, различают эмиссии: термоэлектронную, электростатическую, фотоэлектронную, вторичную. Выход электронов, обусловленный исключительно нагревом катода, называется термоэлектронной эмиссией.

При нагревании металла скорости электронов и их кинетическая энергия увеличиваются и число электронов, покидающих металл, возрастает. Все электроны, вылетающие из катода в единицу времени, образуют электрический ток эмиссии I_e . При повышении температуры катода ток эмиссии растет сначала медленно, а затем все быстрее и быстрее. Чем больше работа выхода, тем большая температура необходима для получения определенной эмиссии. Следовательно, материал для катода должен иметь высокую температуру плавления. Одним из таких металлов является вольфрам с температурой плавления около 3500°C и рабочей температурой 2300°C . Эффективность вольфрамового катода, т. е. ток эмиссии, отнесенный к единице мощности, которая затрачена на нагрев катода, составляет 15 mA/Wt .

Работа выхода значительно уменьшается, если поверхность основного металла покрыть тончайшим (одноатомным) слоем другого металла с меньшей работой выхода. Например, одноатомный слой бария с работой выхода $2,1\text{ эВ}$, нанесенный на вольфрам с работой выхода $4,5\text{ эВ}$, уменьшает работу выхода до $1,44\text{ эВ}$. Это объясняется тем, что при таком покрытии атомы бария поляризуются. Отрицательные заряды, смещаясь, образуют внутреннюю пленку, положительные — наружную, т. е. образуется двойной электрический слой. Вне этого слоя электрическое поле отсутствует. Внутри слоя электрическое поле направлено внутрь; следовательно, каждый попавший в него электрон будет выталкиваться полем наружу, что и приводит к уменьшению работы выхода, к получению нужной эмиссии при меньшей температуре катода. Такие катоды называются активированными.

Наиболее часто применяются оксидные катоды. Оксиды представляют собой углекислые соли щелочноземельных металлов бария, стронция, кальция. Они наносятся на металлическое основание (никелевая нить, никелевый цилиндр) и подвергаются термической обработке. Оксидные катоды имеют рабочую температуру $700\text{--}900^\circ\text{C}$ и обладают большей эффективностью (до 150 mA/Wt).

По способу нагрева катоды делятся на катоды прямого накала и косвенного, или подогревные. Катод прямого накала (рис. 3-2, а) представляет собой тонкую проволоку (нить) из тугоплавкого металла с оксидным покрытием, натянутую между держателями. Катод нагревается током накала. Подогревный катод имеет подогреватель — спираль

(рис. 3-2, б) из тугоплавкого металла (вольфрама). Подогреватель расположен внутри никелевого цилиндра с оксидным покрытием, с поверхности которого и происходит эмиссия электронов при нагревании спирали током накала.

Явление выхода электронов, обусловленное исключительно сильным электрическим полем у поверхности катода, называется электростатической или автоэлектронной эмиссией. В этом случае электрическое поле ускоряет электроны, вырывая их из холодного катода.

Явление выхода электронов, обусловленное исключительно действием излучения, поглощаемого катодом, и не

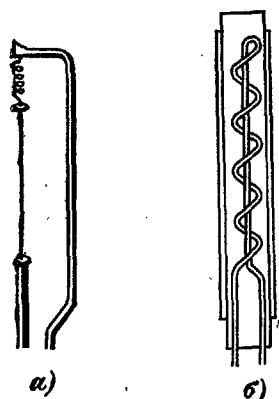


Рис. 3-2. Катоды.

а — прямого; б — косвенного накала.

связанное с его нагреванием, называется фотоэлектронной эмиссией. При этом электроны катода получают дополнительную энергию за счет лучистой энергии. Фотоэлектронная эмиссия наблюдается у щелочноземельных металлов, имеющих малую работу выхода, при их освещении или действии ультрафиолетовых лучей. Фотоэлектронная эмиссия была открыта в 1888 г. профессором Московского университета А. Г. Столетовым и лежит в основе работы электровакуумных фотоэлементов.

Электронная эмиссия, обусловленная исключительно ударами электронов о поверхность тела (электрода), называется вторичной электронной эмиссией. Электроны, ударяющиеся о поверхность тела, называются первичными. Первичные электроны при ударе отдают свою энергию электронам тела и вызывают эмиссию электронов, называемых вторичными. При достаточно большой энергии (скорости) первичный электрон может сообщить энергию, достаточную для выхода нескольких вторичных электронов.

Д и о д — простейшая двухэлектродная электронная лампа, относится к нелинейным элементам электрической цепи.

Диод имеет металлический, керамический или стеклянный баллон, в котором создан вакуум. В баллоне расположены два электрода: анод в виде пластины или цилиндра и катод (рис. 3-3). Катод прямого накала — тонкая вольфрамовая проволоочка с оксидным покрытием, укрепленная на

двух держателях, соединенных с выводами; у подогревного катода, кроме двух выводов нагревателя, есть еще один (третий) вывод.

Присоединим к катоду диода батарею накала (или обмотку трансформатора) и установим номинальный ток накала I_H ; катод соединим с отрицательным зажимом, а анод — с положительным зажимом источника питания (рис. 3-4), т. е. подведем к лампе анодное напряжение U_a . Электроны, покидающие катод, под действием сил электрического поля между электродами устремляются от катода к аноду, образуя анодный ток I_a , направление которого противоположно направлению движения электронов. Электроны, покидающие катод, вначале имеют незначительные скорости, но по мере движения к аноду скорости их возрастают. Чем больше электронов покинуло катод, тем сильнее тормозятся последующие электроны, вылетающие из катода, так как они испытывают противодействие со стороны электронов, ранее покинувших катод. Поэтому электроны образуют вблизи катода объемный отрицательный заряд — «электронное облачко». Этот заряд частично рассеивается силами электрического поля между анодом и катодом, но одновременно пополняется электронами, эмиттируемыми катодом. Объем-

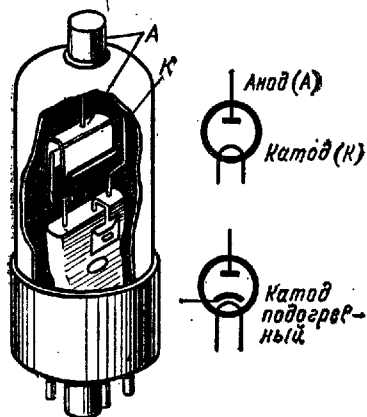


Рис. 3-3. Устройство диода и его обозначение на схемах.

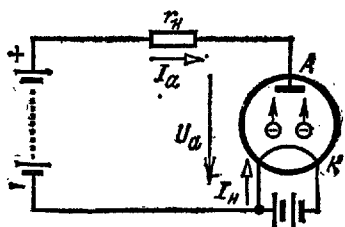


Рис. 3-4. Схема включения диода.

ный заряд тормозит вылет электронов из катода и движение их внутри лампы.

Анодный ток зависит от анодного напряжения. При малых значениях этого напряжения ток мал и нарастает медленно, так как мало поле в лампе и объемный отрицательный заряд оказывает относительно большое замедляющее дей-

ствие. При увеличении анодного напряжения ток и скорость его нарастания увеличиваются вследствие увеличения поля и уменьшения объемного заряда. При некотором значении анодного напряже-

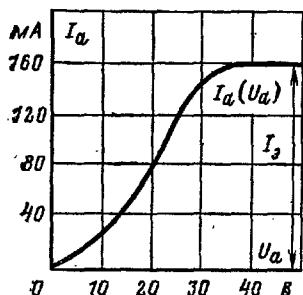


Рис. 3-5. Вольт-амперная характеристика диода.

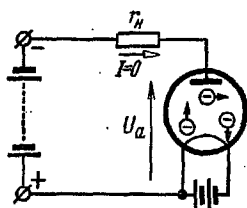


Рис. 3-6. Односторонняя проводимость.

ния U'_a анодный ток становится равным току эмиссии

$$I_a = I_s, \quad (3-1)$$

а при дальнейшем увеличении напряжения остается неизменным. Зависимость анодного тока от анодного напряжения

$I_a(U_a)$, называемая вольт-амперной характеристикой диода, показана на рис. 3-5. Ток эмиссии, а следовательно, и анодный ток можно увеличить, увеличив ток накала и тем самым повысив температуру катода.

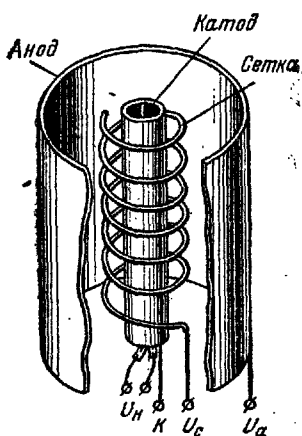


Рис. 3-7. Устройство триода.

Через диод ток может проходить только в одном направлении. Действительно, если катод лампы присоединить к положительному зажиму, а анод — к отрицательному, то электроны, покинувшие катод, под действием сил поля возвратятся обратно на катод (рис. 3-6). Таким образом, при обратном анодном напряжении анодный ток равен нулю; следовательно, диод обладает односторонней про-

водимостью. Это свойство диода широко используется для выпрямления переменного тока. Электронная лампа, применяемая для выпрямления переменного тока промышленной частоты, называется кенотроном. Главный не-

достаток его — значительное падение напряжения между электродами даже при небольшом анодном токе.

Обратное напряжение между электродами не должно превышать некоторого предельного значения, так как в противном случае может наблюдаться вырывание электронов из анода силами поля (электростатическая электронная эмиссия) и возникнуть обратный ток, вызывающий порчу диода. Диоды (имеющие два электрода) являются неуправляемыми приборами.

Т р и о д — трехэлектродная электронная лампа (рис. 3-7) отличается от диода наличием третьего электрода, называемого управляющей сеткой, которая имеет форму спирали, расположенной между катодом и анодом.

Сетка предназначена управлять электронным потоком в лампе между катодом и анодом, а следовательно, и анодным током. Такие приборы называются **у п р а в л я е м ы м и**.

3-3

Электронно-лучевая трубка

Э л е к т р о н н о - л у ч е в а я т р у б к а представляет собой прибор, в котором используется поток электронов в форме луча. Электронно-лучевые трубки широко применяются в различных областях техники: радиолокации, телевидении, измерении быстропеременных величин (осциллографирование), счетно-решающих устройствах и т. д.

Конструкция одного из типов трубки показана на рис. 3-8. Стеклый баллон трубки имеет форму колбы. Торцы расширенной части колбы, покрытый с внутренней стороны люминофором, образует экран. На другом конце баллона расположено устройство, предназначенное для формирования электронного луча, называемое электронным прожектором или электронной пушкой. Это устройство состоит из подогревного катода K , управляющего электрода $УЭ$ и двух анодов A_1 и A_2 цилиндрической формы. Электрическое поле между катодом и анодами сообщает электронам, покинувшим катод, необходимые скорости и придает потоку электронов форму луча, сходящего в фокусе на поверхности экрана. В точке падения электронного луча на экран возникает свечение. Изменяя потенциал управляющего электрода, можно регулировать количество электронов в луче, т. е. интенсивность (яркость) свечения экрана. Изменением потенциала одного из анодов можно более точно фокусировать

электронный луч на экране и получить большую резкость светящейся точки.

Электронный луч проходит между двумя парами отклоняющих пластин, к которым при работе трубки прикладываются два напряжения. Электрическое поле пластин X отклоняет электронный луч в горизонтальной плоскости, поле второй пары пластин Y отклоняет луч в вертикальной плоскости. Величина отклонения луча на экране в каждый момент времени пропорциональна напряжению, приложенному к соответствующей паре пластин.

К пластинам X часто подводится вспомогательное (пилообразное) напряжение. Это напряжение от нуля увеличивается пропорционально времени, и электронный луч

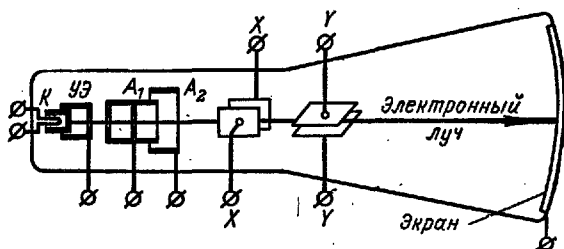


Рис. 3-8. Электронно-лучевая трубка.

с постоянной скоростью перемещается по экрану от исходной (нулевой) точки слева направо до некоторой крайней точки в правой части экрана, соответствующей максимуму вспомогательного напряжения. Достигнув максимума, это напряжение относительно быстро падает до нуля и электронный луч также быстро перемещается по экрану в обратном направлении, достигая нулевой точки экрана к концу цикла повторения пилообразного напряжения. Затем процесс повторяется. В результате многократного перемещения луча по одной и той же траектории на экране (при отсутствии напряжения на пластинах Y) видна светлая горизонтальная линия.

Если в какой-нибудь момент времени на пластины Y будет подан импульс напряжения, то электрическое поле пластин Y вызовет пропорциональное импульсу отклонение электронного луча в вертикальном направлении. Если импульс будет повторяться с той же частотой, что и пилообразное напряжение, то будет повторяться в одном и том же месте экрана отклонение луча. Вследствие световой инерции экрана на нем будет видна светлая линия с зубцом

(рис. 3-9, а), вызванным импульсом. Наличие двух зубцов (рис. 3-9, б) покажет, что в течение каждого цикла повторения пилообразного напряжения на пластины У подаются два импульса и т. д.

Электронно-лучевая трубка — одна из основных частей радиолокатора, который при помощи электромагнитных волн определяет местонахождение какого-либо объекта. С этой целью в предполагаемом направлении нахождения объекта посылаются импульсы электромагнитных волн. Дойдя до объекта, волны частично отражаются. В момент посылки импульса и в момент получения отраженной волны на пластины У появятся импульсы напряжения, а следовательно, и зубцы на экране трубки. Расстояние между зубцами зависит от расстояния объекта до радиолокатора и может быть определено, так как скорость распространения электромагнитных волн в воздухе известна (300 000 км/с).

Управлять электронным лучом можно при помощи не только электрического, но и магнитного поля. В последнем случае управляющее магнитное поле создается токами, проходящими по катушкам, которые укреплены у поверхности трубки.

Электронно-лучевая трубка является также основной частью телевизора. На экране кинескопа — приемной электронно-лучевой трубки — при помощи электронного луча воспроизводятся изображения.

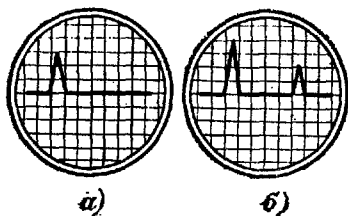


Рис. 3-9. След электронного луча на экране трубки.

3-4

Фотоэлемент

Фотоэлементом называется электровакуумный, полупроводниковый или иной прибор, электрические свойства которого (сила тока, внутреннее сопротивление или э. д. с.) изменяются под действием падающего на него излучения.

Различают внешний и внутренний фотоэффекты.

Внешний фотоэффект, называемый иначе фотоэлектронной эмиссией, как указывалось (§ 3-2), заключается в том, что лучистая энергия сообщает части электронов вещества

дополнительную энергию, достаточную для выхода их из данного вещества в окружающую среду (вакуум или разреженный газ).

Внешний фотоэффект используется в вакуумных и газонаполненных фотоэлементах и фотоэлектронных умножителях. Внутренний фотоэффект и его использование рассмотрены в § 3-7.

Вакуумный кислородно-цезиевый фотоэлемент (рис. 3-10) состоит из стеклянной колбы, в которой создан вакуум. Внутренняя поверхность колбы, за исключением небольшого «окна» для прохождения света в колбу, покрывается слоем серебра (подложка), а на него наносится полупровод-

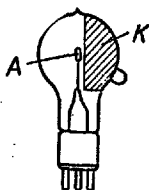


Рис. 3-10.
Вакуумный фотоэлемент.

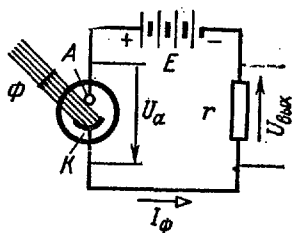


Рис. 3-11. Схема включения фотоэлемента.

никовый слой окиси цезия (катод фотоэлемента). У сурьмяно-цезиевых вакуумных фотоэлементов подложка выполняется из сурьмы.

Газонаполненные фотоэлементы изготавливаются только кислородно-цезиевыми. Они отличаются от вакуумных только тем, что колба после откачки воздуха заполняется аргоном при низком давлении.

Соединив фотоэлемент с резистором r и источником питания (рис. 3-11), получим на фотоэлементе анодное напряжение U_a , а между анодом A и катодом K электрическое поле. Если через окно фотоэлемента на его катод будет падать световой поток Φ , то эмиттированные электроны под действием сил поля будут перемещаться от катода к аноду. Таким образом в цепи установится фототок I_Φ , который будет проходить в течение всего времени освещения катода. Величина фототока зависит от светового потока, напряжения источника питания и сопротивления резистора.

Вольт-амперная характеристика $I_\Phi(U_a)$ вакуумного фотоэлемента (рис. 3-12) нелинейна. При постоянном свето-

вом потоке и увеличении напряжения фототок сначала растет быстро, затем рост его замедляется и, наконец, почти совсем прекращается. Световая характеристика $I_{\Phi}(\Phi)$ вакуумного фотоэлемента (рис. 3-13), дающая зависимость фототока I_{Φ} от светового потока Φ , линейна, т. е. фототок пропорционален потоку, падающему на катод.

Отношение фототока, выраженного в микроамперах, к световому потоку, выраженному в люменах (лм), называется чувствительностью фотоэлемента. Для вакуумных фотоэлементов она составляет 20—100 мкА/лм. Газонапол-

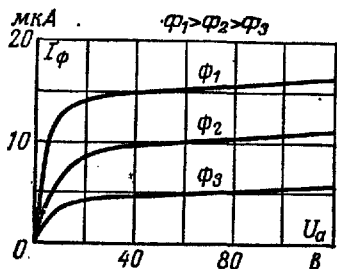


Рис. 3-12. Вольт-амперная характеристика вакуумного фотоэлемента.

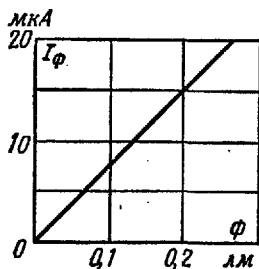


Рис. 3-13. Световая характеристика вакуумного фотоэлемента.

ненные фотоэлементы вследствие ионизации газа между электродами имеют чувствительность, в несколько раз большую по сравнению с вакуумными фотоэлементами.

Одним из свойств рассмотренных фотоэлементов является их утомляемость, т. е. изменение параметров в зависимости от времени эксплуатации.

Вследствие малого фототока, который можно получить от фотоэлемента (несколько микроампер), они обычно применяются совместно с ламповыми или полупроводниковыми усилителями.

Фотоэлементы нашли широкое применение в различных областях электроники, автоматики, телевидения, звукового кино, измерительной техники и т. д.

3-5

Газоразрядный или газовый промежуток

Электропроводность газа. Под газоразрядным промежутком понимают рабочее пространство ионного прибора. Ионным прибором или электровакуумным ионным

прибором называют прибор, действие которого основано на использовании электрического разряда в газе или парах. В зависимости от вида разряда различают: приборы тлеющего разряда, приборы дугового разряда и т. д.

В обычных условиях газ является изолятором, так как практически не содержит свободных электронов и ионов. Некоторая проводимость газа вызывается его ионизацией радиоактивными веществами земли, атмосферы и космическими лучами; высокая температура и сильное электрическое поле также вызывают ионизацию газа.

Ионизация газа состоит в расщеплении его молекул на электроны и положительные ионы и образовании отрицательных ионов при соединении нейтральных молекул со свободными электронами. Ионизация происходит за счет энергии ионизатора. При непрерывном действии ионизатора в каждой единице объема газа за единицу времени образуется определенное число ионов, одновременно происходит рекомбинация некоторой части ионов в нейтральные атомы, так что число ионов в единице объема газа остается неизменным.

Напряжение U , которое приложено к двум электродам (рис. 3-14), расположенным в таком ионизированном газе, вызовет между электродами электрическое поле и перемещение электронов и отрицательных ионов в направлении, противоположном полю, а положительных ионов — в направлении поля. Таким образом, в газовом промежутке будет проходить постоянный электрический ток.

Совокупность явлений, происходящих в газе в связи с прохождением через него электрического тока, называется электрическим разрядом.

При увеличении напряжения U (рис. 3-14) вначале ток растет пропорционально напряжению; начальная часть вольт-амперной характеристики прямолинейна (отрезок OA на рис. 3-15). При дальнейшем увеличении напряжения рост тока замедляется (участок AB), а затем совсем прекращается (участок BB). Максимальный ток при данной интенсивности ионизации называется током насыщения.

Проводимость газа, для поддержания которой необходимо воздействие на газ внешнего ионизатора, называется несамостоятельной проводимостью. Она уменьшается до нуля при прекращении действия ионизатора.

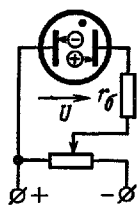


Рис. 3-14.
Электрический ток в газе.

Стадии самостоятельного разряда в газе. Сильное электрическое поле может вызвать в газовом промежутке самостоятельный разряд. Очевидно, для его поддержания необходимо непрерывное образование свободных заряженных частиц, источником которых является ударная ионизация газа.

При увеличении напряжения U между электродами (рис. 3-14) до напряжения зажигания U_z ток резко возрастает (участок $B\Gamma$ на рис. 3-15) и газ начнет светиться вследствие ударной ионизации и возбуждения молекул газа. Электрические заряды, всегда содержащиеся в небольшом количестве, ускоряются полем и накапливают кинетическую энергию $mv_{\text{макс}}^2/2$, достаточную для ионизации нейтральных молекул. Вновь полученные вторичные заряды в свою очередь также ионизируют нейтральные молекулы газа; процесс образования ионов развивается лавинообразно. Разрядный промежуток оказывается заполненным ионизированным газом, содержащим примерно одинаковое количество положительных и отрицательных заряженных частиц, — газовой плазмой. Газовая плазма обладает большой проводимостью, которая увеличивается с повышением температуры. Ток в этом случае ограничивается балластным резистором r_6 (рис. 3-14), включенным последовательно с ионным прибором.

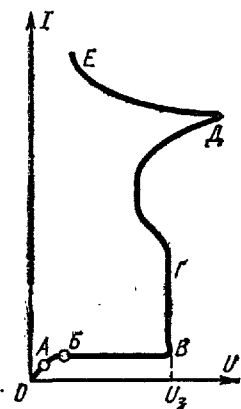


Рис. 3-15. Вольт-амперная характеристика газового разряда.

Работу ионизации характеризуют потенциалом ионизации или разностью потенциалов $U_{\text{и}}$ между точками пути движения электрона в электрическом поле, на котором его энергия увеличивается до значения работы ионизации

$$A_{\text{и}} = U_{\text{и}} e. \quad (3-2)$$

Значения потенциалов ионизации для некоторых газов даны в табл. 3-1.

Для возникновения самостоятельного разряда необходимо, чтобы кинетическая энергия электрона была не меньше работы ионизации, т. е.

$$mv_{\text{макс}}^2/2 \geq A_{\text{и}}.$$

Процесс, в результате которого увеличивается энергия атома без изменения его заряда, называется возбуждением атома. Возбуждение нейтральных атомов газа происходит одновременно с его ионизацией. Для возбуждения атомов газа нужна энергия, определяемая потенциалом возбуждения $U_{\text{в}}$, меньшим $U_{\text{и}}$ (табл. 3-1).

Таблица 3-1

Потенциалы ионизации и возбуждения для некоторых газов

Газы	Гелий	Неон	Аргон	Криптон	Ксенон	Пары ртути
Потенциал ионизации $U_{\text{и}}$, В	24,5	21,5	15,7	14,0	12,1	10,4
Потенциал возбуждения $U_{\text{в}}$, В	20,8	16,6	11,6	9,9	8,4	4,9

Если у части электронов накопленная энергия равна или больше работы возбуждения, т. е.

$$mv_{\text{макс}}^2/2 \geq A_{\text{в}} = U_{\text{в}}e, \quad (3-3)$$

то при соударении такого электрона с атомом газа последний получит порцию энергии, т. е. возбудится. При этом один из электронов возбужденного атома переходит на более высокий энергетический уровень. Через очень короткое время (10^{-7} — 10^{-8} с) электрон снова возвратится на прежний энергетический уровень, выделяя при этом избыточную энергию в виде светового излучения (квант света). Так возникает свечение газа.

При нормальном и пониженном давлении в газах наблюдается несколько различных стадий самостоятельного разряда: темный, тлеющий, искровой и дуговой. Характер разряда зависит от состава газа, его температуры, давления, формы и расположения электродов, расстояния между ними и от напряжения.

Темный (тихий) разряд. Как показывает само название, этот разряд сопровождается весьма слабым испусканием света и звука. Он представляет собой начальную стадию самостоятельного разряда и характеризуется незначительными плотностями газа около 10^{-6} А/см² (участок ВГ вольтамперной характеристики на рис. 3-15). Ионизация газа происходит вдоль всего междуэлектродного промежутка; электроны перемещаются к аноду, а положительные ионы

к катоду. Когда число ионов, падающих на катод, будет достаточным для того, чтобы выбитые ими электроны могли поддерживать разряд без внешнего ионизатора, разряд из несамостоятельного переходит в самостоятельный. У проводников, находящихся под достаточно высоким напряжением, на выступающих и заостренных частях (остриях), а также у проводов малого диаметра напряженность поля имеет наибольшее значение. Если она достигает некоторого критического значения, то в этих местах появится разряд, который сопровождается слабым свечением, называемый короной, и который вызван ионизацией и возбуждением газа.

Тлеющий разряд. Темный разряд переходит в тлеющий, для которого характерны значительно большие плотности тока (приблизительно 10^{-3} А/см²) и большая интенсивность ионизации, в связи с чем вначале уменьшается напряжение на электродах (участок ГД на рис. 3-15). Положительные ионы образуют вблизи катода положительный объемный заряд, что связано с увеличением падения напряжения

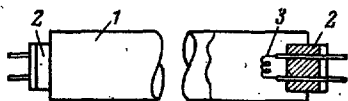


Рис. 3-16. Люминесцентная лампа.

(катодного падения напряжения) на этом участке разрядного промежутка. Увеличение катодного падения напряжения означает возрастание на этом участке напряженности поля, вызывающей увеличение скоростей электронов и положительных ионов и увеличение интенсивности ионизации. Положительные ионы, бомбардируя катод, вызывают вторичную эмиссию.

Нормальный тлеющий разряд характеризуется постоянной плотностью тока на катоде.

Тлеющий разряд в газах при низких давлениях (около 100 Па) сопровождается свечением газа у анода — анодное свечение. В длинных трубках анодное свечение занимает значительную часть трубки. Такие трубки, наполненные неоном (красный свет) и аргоном (голубой свет), применяются для рекламного и декоративного освещения.

Большое распространение получили люминесцентные лампы. Лампа (рис. 3-16) состоит из стеклянной трубки 1 с двумя цоколями 2 и укрепленными в них спиральными электродами 3 с оксидным покрытием. Внутренняя поверхность трубки покрыта особым составом — люминофором. В трубке находятся пары ртути при низком

давлении. При разряде возникает ультрафиолетовое излучение, под действием которого люминофор светится. Люминофоры в зависимости от их состава дают световой поток разных цветов. Средний срок службы люминесцентных ламп составляет 3000 ч. Они в 2,5—3 раза экономичнее ламп накаливания.

На рис. 3-17, *а* и *б* показаны газосветные лампы с тлеющим разрядом, которые применяются в качестве индикатора напряжения.

В стеклянном баллоне, заполненном неоном, расположены два металлических электрода, покрытых тонким

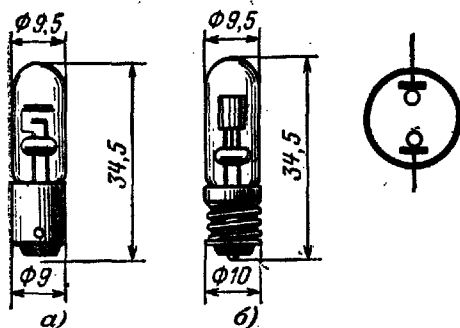


Рис. 3-17. Неоновые лампы.

а — с плоскими электродами; *б* — с цилиндрическими электродами; *в* — условное обозначение.

слоем бария. При напряжении около 70 В возникает тлеющий разряд, сопровождаемый свечением. Мощность лампы составляет доли ватта.

Тлеющий разряд используется также в газотронах, тиратронах, стабилитронах и других приборах.

Искровой разряд (искра). Если повышать напряжение между двумя электродами, расположенными в воздухе (газе) при нормальном давлении, то при некотором критическом значении напряжения, называемого пробивным $U_{пр}$, произойдет искровой разряд. Он имеет вид ярко светящегося соединяющего оба электрода извилистого канала, форма которого зависит от «наиболее легкого пути» ионизации. Лавина электронов и ионов, перемещающихся в канале, вызывает резкое повышение температуры и давления, от чего искровой разряд сопровождается характерным треском. Искровой разряд возникает в том случае, если напряженность поля достигает значения пробивной напряжен-

ности $\mathcal{E}_{\text{пр}}$ или электрической прочности, которая зависит от рода газа, его состава, давления и температуры. Для воздуха $\mathcal{E}_{\text{пр}} \approx 30$ кВ/см.

Согласно стримерной теории возникновению ярко светящегося канала искры предшествует появление слабо светящихся скоплений ионизированных частиц газа (стримеров) в междуэлектродном пространстве, создающем проводящие мостики, по которым затем и устремляются мощные потоки электронов. Причиной возникновения стримеров является ударная ионизация и ионизация газа излучением (фотоионизация), создаваемым возбужденными атомами.

Если мощность источника питания невелика, то появление искры, а следовательно, и большой силы тока вызывает резкое снижение напряжения между электродами почти до нуля. После прекращения искрового разряда напряжение восстанавливается и наступает новый искровой разряд.

Пробивное напряжение между двумя электродами, например шаровой формы, при прочих равных условиях зависит от расстояния между ними, от давления и температуры газа. Таким образом, по расстоянию между электродами, при котором происходит искровой разряд, можно определить напряжение. На этом принципе основано устройство шарового вольтметра, применяемого для измерения высоких напряжений.

Наибольших размеров достигает искровой разряд в случае молний.

Искровой разряд вызывает электроэрозию, т. е. вырывание частиц вещества анода. Это явление используется для электроискровой обработки металлов.

Дуговой разряд (электрическая дуга). Он может развиваться и существовать как при разреженном газе, так и при нормальном атмосферном давлении. Дуговой разряд получается различными путями: он возникает из тлеющего разряда при повышении напряжения на разрядном промежутке выше некоторого определенного значения; он развивается из искрового при достаточной мощности источника питания; часто дуговой разряд получают сближением угольных электродов до соприкосновения друг с другом, когда сильное нагревание током места соприкосновения углей обеспечивает при их раздвигании образование дуги, излучающей ослепительный свет. Газ ионизируется при этом электронами, эмиттируемыми накалившимся катодом. Наиболее сильно накаляется анод, у которого из-за бом-

бардировки электронами образуется кратер с температурой до 4000°C . Газоразрядная плазма между электродами имеет температуру еще более высокую и обладает очень большой проводимостью. Поэтому при относительно небольшом напряжении (10—40 В) между электродами возникает большой ток с плотностью от 100 А/см^2 и выше.

При увеличении тока температура плазмы возрастает, увеличивается ее проводимость, вследствие этого напряжение на участке дугового разряда уменьшается. Таким образом, электрическая дуга имеет «падающую характеристику» (рис. 3-18 или участок *ДЕ* на рис. 3-15).

Наряду с рассмотренным дуговым разрядом, обусловленным термоэлектронной эмиссией катода, применяется дуго-

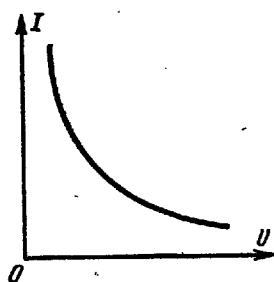


Рис. 3-18. Вольт-амперная характеристика электрической дуги.

вой разряд с электростатической эмиссией, получаемой от ртутного (жидкого) катода, например в ртутных вентилях. В этом случае дуговой разряд происходит в парах ртути. Основанием дуги является светящееся (катодное) пятно на поверхности ртутного катода, эмиттирующее электроны, которые ионизируют пары ртути над катодом.

Электрическая дуга была открыта в 1802 г. профессором физики Петербургской медицинской академии В. В. Петровым. Она применяется для освещения (прожекторы, проекционные фонари) и нагревания (электропечи, электросварка, резка металлов). Впервые электрическая дуга была применена для освещения в 1876 г. П. Н. Яблочковым, который, расположив параллельно угольные электроды, получил устойчивую дугу переменного тока с равномерным износом обоих электродов. Электрическая свеча Яблочкова — «русский свет» — применялась во многих странах мира.

Электрическая дуга служит для резки и сварки металлов. Электрическая сварка — один из прогрессивных технических методов соединения металлов; она широко применяется и все более совершенствуется и автоматизируется.

Газотрон. Газотрон представляет собой ионный прибор с металлическим или графитовым анодом *A* (рис. 3-19) и вольфрамовым оксидным катодом *K*. Стеклопная колба газотрона заполняется парами ртути или инертным газом

при давлении 15—70 Па. Накал катода производится током от независимого источника питания.

При увеличении анодного напряжения до напряжения зажигания U_z (рис. 3-15) в приборе начнется процесс ионизации газа, образование плазмы и газотрон зажжется. Рабочему режиму газотрона соответствует участок ГД вольт-амперной характеристики газового разряда.

Увеличение анодного тока вследствие изменения нагрузки почти не влияет на величину падения напряжения между анодом и катодом. Это падение напряжения невелико, чем газотрон выгодно отличается от вакуумной двухэлектродной лампы.

У мощных газотронов катод обладает значительной массой; поэтому необходимо сравнительно длительное время (2—20 мин) до включения анодного напряжения для нагрева катода до рабочей температуры.

Газотроны изготавливаются на токи до нескольких десятков ампер. Они применяются в качестве выпрямителей переменного тока в постоянный.

Тиратрон отличается от газотрона наличием третьего электрода — сетки, при помощи которой можно управлять анодным током.

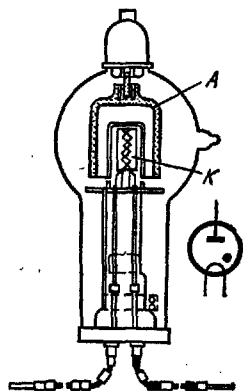


Рис. 3-19. Газотрон и его обозначение на схемах.

3-6

Полупроводниковый вентиль

Собственная электропроводность полупроводников. Полупроводниковыми называются материалы, занимающие промежуточное положение между проводниками и изоляторами. Удельное электрическое сопротивление полупроводников лежит в границах 10^{-3} — 10^9 Ом·см.

Для полупроводников характерна сильная зависимость проводимости от температуры, электрического поля, освещенности, сжатия и т. д. В отличие от проводников они имеют не только электронную, но и «дырочную» проводимость, кроме того, в них под действием внешних источников тепловой, электрической и лучистой энергии возникают свободные носители зарядов.

В электротехнике наиболее широко применяются германий, кремний, селен и арсенид галлия.

Химическую связь двух соседних атомов, обусловленную образованием общей пары электронов на одной орбите (рис. 3-20, а), называют парноэлектронной или ковалентной. Она условно изображена двумя линиями, соединяющими атомы (рис. 3-20, б). Например, германий принадлежит к элементам четвертой группы периодической системы Менделеева. Следовательно, он имеет на внешней орбите четыре валентных электрона. Каждый атом в кристалле германия образует парноэлектронные связи с четырьмя соседними атомами (рис. 3-21).

При температуре, близкой к абсолютному нулю, и отсутствии примесей все валентные электроны атомов

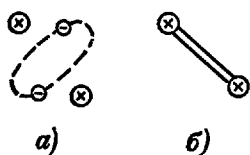


Рис. 3-20. Ковалентная связь атомов.

в кристалле германия взаимно связаны, свободных электронов нет; следовательно, кристалл не обладает проводимостью. При повышении температуры или при облучении увеличивается энергия части электронов, что приводит к частичному нарушению ковалентных связей и появлению свободных электронов. Германий уже при комнатной температуре становится полупроводником. Под действием внешнего электрического поля свободные электроны перемещаются, обуславливая электронную проводимость (*n*-проводимость).

В момент образования свободного электрона в ковалентных связях образуется свободное место — «электронная дырка». При наличии дырки какой-либо из электронов соседней связи может занять место дырки, и нормальная связь в этом месте восстанавливается, однако нормальная связь нарушается в том месте, откуда ушел электрон; эту новую дырку может занять еще какой-либо электрон и т. д. Под действием внешнего электрического поля происходит перемещение дырок в направлении поля, т. е. в направлении, обратном перемещению электронов. Перемещение дырок эквивалентно движению положительных зарядов. Этот процесс называется дырочной проводимостью (*p*-проводимостью). Если при электронной проводимости один свободный электрон проходит весь путь в кристалле, то при дырочной проводимости большое количество электронов поочередно замещают друг друга в связях, т. е. имеет место как бы эстафета электронов, при которой каждый

электрон проходит свой этап пути. Таким образом, проводимость полупроводника складывается из электронной и дырочной проводимостей.

При нарушении парноэлектронных связей в кристалле одновременно возникает одинаковое число свободных электронов и дырок. С одной стороны, с повышением температуры происходит образование пар электрон — дырка, а с другой стороны, происходит их частичная рекомбинация. При заданной температуре число пар в единице объема полупроводника в среднем остается постоянным. Например, при температуре 20°C концентрация электронов и дырок у германия $n \approx 2,5 \cdot 10^{13}$, а у металлических проводников $n \approx 10^{22} - 10^{23}$, откуда следует, что проводимость германия при нормальной температуре значительно меньше проводимости металлов. При повышении температуры число свободных электронов и дырок сильно возрастает и проводимость германия значительно увеличивается.

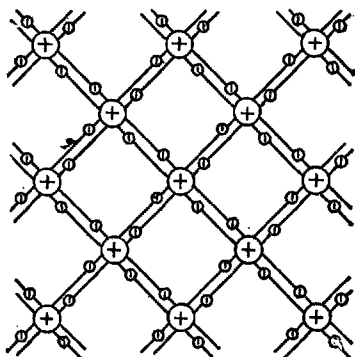


Рис. 3-21. Схема парноэлектронных связей в кристаллической решетке германия.

Электропроводность полупроводника при отсутствии в нем примесей называется собственной электропроводностью полупроводника.

Полупроводники имеют отрицательный температурный коэффициент сопротивления, который по абсолютной величине в 10—20 раз больше, чем у металлов. При нагревании металла на 1°C его сопротивление увеличивается примерно на 0,4%, а сопротивление полупроводников уменьшается на 4—8%. Это свойство полупроводников используется в технике для различных целей, например для изготовления терморезисторов, сопротивление которых резко меняется при незначительных изменениях температуры.

Примесная электропроводность полупроводников. Свойства полупроводника можно изменить, внося в него ничтожное количество примеси. Вводя в полупроводник атомы других элементов, можно получить преобладание свободных электронов над дырками, или, наоборот, преобладание дырок над свободными электронами. Например, при замещении в кристаллической решетке атома германия

атомом мышьяка, имеющим пять валентных электронов, четыре электрона мышьяка образуют заполненные связи с соседними атомами германия, а пятый электрон, слабо связанный с атомом мышьяка, превратится в свободный. Поэтому примесь мышьяка увеличивает электронную проводимость.

При замещении атома германия атомом индия, имеющим три валентных электрона, они вступят в ковалентную связь с тремя атомами германия, а связи с четвертым атомом германия будут отсутствовать, так как у индия нет четвертого электрона. Восстановление всех связей возможно, если недостающий четвертый электрон будет получен от ближайшего атома германия. Но в этом случае на месте электрона, покинувшего атом германия, появится дырка, которая может быть заполнена электроном из соседнего атома германия. Процесс последовательного заполнения свободной связи эквивалентен движению дырок в полупроводнике. Таким образом, примесь индия повышает дырочную проводимость кристалла германия.

Полупроводники с преобладанием электронной проводимости называются полупроводниками типа *n* (от латинского слова *negative* — отрицательный), а полупроводники с преобладанием дырочной проводимости — типа *p* (от латинского *positive* — положительный). Носители заряда, определяющие вид проводимости в примесном полупроводнике, называются основными (электроны в *n*-полупроводнике или дырки в *p*-полупроводнике), а носители заряда противоположного знака — не основными. Примеси, вызывающие преобладание электронной проводимости, называются донорными, а дырочной — акцепторными. Донорной примесью для германия является, например, мышьяк, а акцепторной — индий.

В зависимости от процентного содержания примеси проводимость примесного полупроводника возрастает по сравнению с собственной проводимостью полупроводника в десятки и сотни тысяч раз. Например, если в нормальных условиях в 1 см^3 чистого германия содержится примерно $4,2 \cdot 10^{22}$ атомов и $2,5 \cdot 10^{13}$ электронов проводимости и дырок, то примесь мышьяка в количестве 0,001% вызовет появление в том же объеме дополнительно 10^{17} электронов проводимости, которые обеспечат увеличение электронной проводимости примерно в 10 000 раз.

Полупроводниковый вентиль. Полупроводниковый вентиль представляет собой контактное соединение двух полу-

проводников, один из которых с электронной проводимостью, а другой с дырочной (рис. 3-22), например германий типа n и германий типа p .

Вследствие большей концентрации электронов в полупроводнике n по сравнению с полупроводником p будет происходить диффузия электронов из первого полупроводника во второй. Аналогично будет происходить диффузия дырок в полупроводник n . В тонком пограничном слое полупроводника n возникает положительный объемный заряд, в пограничном слое полупроводника p — отрицательный. Между разноименными заряженными слоями возникает разность потенциалов — потенциальный барьер и образуется электрическое поле переходного слоя напряженностью $\mathcal{E}_{пер}$, препятствующее дальнейшей диффузии, которая прекратится при равенстве сил электрического поля и сил, вызывающих диффузию. Тонкий пограничный слой, обедненный основными носителями зарядов и обладающий большим сопротивлением, называют запирающим слоем или p - n -переходом.

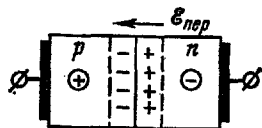


Рис. 3-22. Полупроводниковый вентиль.

Соединив положительный зажим источника питания с металлическим электродом полупроводника p , а отрицательный зажим — с электродом n , получим внешнее электрическое поле $\mathcal{E}^{внеш}$, направленное навстречу полю p - n -перехода; под действием внешнего поля электроны и дырки будут двигаться навстречу друг другу (рис. 3-23). При движении электронов и дырок число основных носителей заряда в переходном слое возрастет, а объемный заряд уменьшится, следовательно, уменьшится потенциальный барьер и сопротивление переходного слоя. Таким образом, в цепи установится ток $I_{пр}$, называемый прямым, который будет значительным даже при относительно небольшом напряжении источника питания.

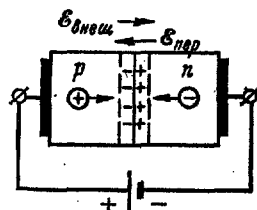


Рис. 3-23. Включение вентиля в прямое направление.

Присоединив к вентилю источник питания в обратном направлении (рис. 3-24), получим внешнее поле одного направления с полем p - n -перехода и, следовательно, усиливающим его. Теперь поле еще больше будет препятствовать прохождению основных носителей заряда через

запирающий слой. Кроме того, внешнее поле вызовет движение электронов в n -полупроводнике и дырок в p -полупроводнике в противоположные стороны от запирающего слоя. Это повлечет за собой увеличение объемного заряда, потенциального барьера и сопротивления запирающего слоя. Ток $I_{обр}$, называемый обратным, весьма мал и в ряде практических случаев может считаться равным нулю.

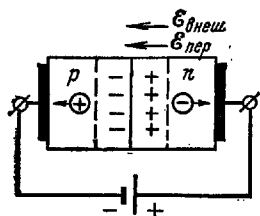


Рис. 3-24. Включение вентиля в обратном направлении.

Итак, контактное соединение двух полупроводников с разными проводимостями обладает явно выраженной односторонней проводимостью, т. е. является в е н т и л е м.

Отношение прямого тока к обратному току при одном и том же напряжении называется коэффициентом выпрямления

$$k_v = I_{пр}/I_{обр}. \quad (3-4)$$

Германиевые и кремниевые вентили. В этих диодах используются явления, происходящие в p - n -переходах между

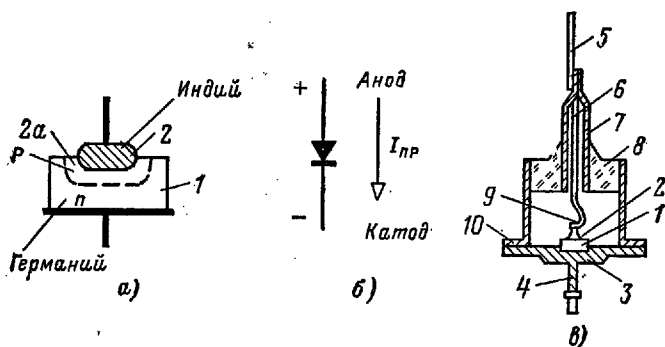


Рис. 3-25. Плоскостной германиевый диод.

областью кристалла германия (кремния) с p -проводимостью и областью с n -проводимостью. Они изготавливаются точечными и плоскостными.

Плоскостной вентиль (рис. 3-25, а) состоит из пластины германия 1 с примесью мышьяка или сурьмы, имеющей электронную проводимость, в пластину вплавляется капля индия 2. Атомы расплавленного индия, диффундируя в гер-

маний, образуют область 2а (рис. 3-25, а) с дырочной проводимостью. На границе двух областей создается *p-n*-переход.

На рис. 3-25, б показано условное обозначение вентиля, а на рис. 3-25, в — устройство одного из плоскостных германиевых диодов. Кристалл германия 1 для улучшения теплоотдачи припаивается к кристаллодержателю 3, который соединен с наружным выводом 4. Другой (верхний) наружный вывод 5 и внутренний вывод 6, проходящий через втулку 7, которая укреплена в изоляторе 8, при помощи электрода 9 соединены с каплей индия 2. Корпус 10 диода металлический, сварной, герметичный.

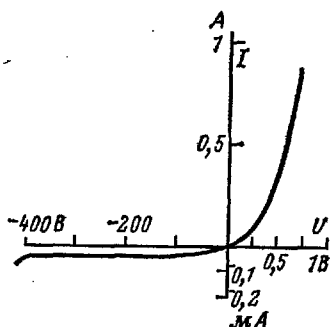


Рис. 3-26. Вольт-амперная характеристика германиевого плоскостного вентиля.

На рис. 3-26 показана вольт-амперная характеристика плоскостного германиевого диода.

Мощные германиевые диоды изготавливаются на токи до 1000 А и обратное напряжение до 150 В. Германиевые диоды допускают плотность тока до 100 А/см² при прямом напряжении до 0,8 В. Допустимое обратное напряжение не более 400 В. Рабочая температура $-60 \div +75^\circ \text{C}$.

Выпрямительные кремниевые диоды изготавливаются сплавлением алюминия в кремний *n*-типа. У этих диодов плотность тока доходит до 200 А/см² при прямом напряжении до 1—1,2 В. Допустимое обратное напряжение не более 1000 В. Рабочая температура $-60 \div +150^\circ \text{C}$.

3-7

Полупроводниковые фотоэлементы

Полупроводниковым фотоэлементом называется полупроводниковый прибор, в котором под действием падающего на него излучения возникает э. д. с., называемая фото-э. д. с. Работа фотоэлемента с запирающим слоем, или вентильного фотоэлемента, основана на использовании запирающего слоя между полупроводниками с различными проводимостями (*p* и *n*).

Поглощение лучистой энергии при освещении поверхности фотоэлемента вблизи *p-n*-перехода вызывает иониза-

цию атомов кристалла и образование новых пар свободных носителей заряда — электронов и дырок. Образующиеся электроны под действием электрического поля p - n -перехода ($\mathcal{E}_{\text{пер}}$) уходят в слой n , дырки — в слой p . Это приводит к избытку дырок в слое p и электронов в слое n . Возникающая разность потенциалов (фото-э. д. с.) между слоями p и n вызывает ток I во внешней цепи от электрода p к электроду n . Этот ток зависит от количества электронов и дырок, а следовательно, от светового потока.

Кремниевый фотоэлемент (рис. 3-27) состоит из пластины кремния с примесью, имеющей n -проводимость. На поверх-

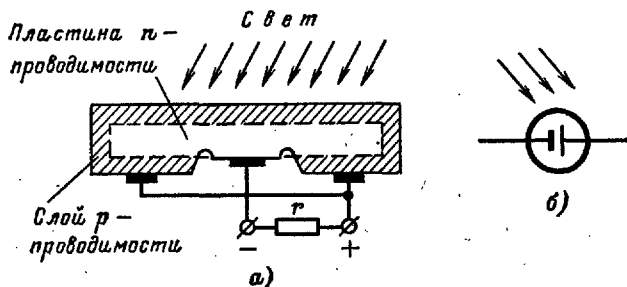


Рис. 3-27. Кремниевый фотоэлемент (а) и его условное обозначение (б).

ность пластины путем диффузии в вакууме вводят примесь бора, образуя слой с p -проводимостью толщиной около 2 мкм.

Батареи кремниевых элементов называются солнечными батареями и применяются для непосредственного преобразования солнечной энергии в электрическую, имея к. п. д. около 11%. Они, в частности, применяются на искусственных спутниках Земли для питания радиостанций.

Фотоэлементы с запирающим слоем по сравнению с вакуумными фотоэлементами имеют значительно более высокую чувствительность (до 10 мА/лм). Преимущество их перед другими фотоэлементами заключается в том, что они не требуют источника питания. Фотоэлементы нашли широкое применение в различных областях электроники, автоматики, измерительной техники и т. д.

Фоторезистором или фотосопротивлением называется прибор, электрическое сопротивление которого изменяется под действием падающего на него излучения. Поглощение лучистой энергии полупроводником при освеще-

щении фоторезистора вызывает ионизацию атомов и, следовательно, увеличение числа свободных носителей заряда, что и приводит к уменьшению его сопротивления.

Схема устройства и включения фоторезистора показана на рис. 3-28. На тонкую пластинку 1 из стекла, керамики или слюды наносится полупроводниковый слой 2. Для включения в цепь на полупроводниковом слое есть контакты 3. Полупроводниковый слой покрывается прозрачным лаком для защиты от влаги.

Через неосвещенный фоторезистор проходит малый ток, называемый «темновым». При освещении фоторезистора

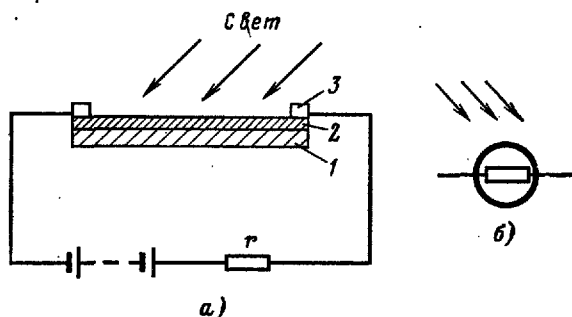


Рис. 3-28. Устройство и включение фоторезистора (а) и его условное обозначение (б).

через него идет «световой» ток, который увеличивается с увеличением светового потока (освещенности). Разность между световым и темновым током называется фототоком.

Фоторезисторы изготавливаются из разных полупроводниковых материалов: сернистого свинца, сернистого висмута, сернистого кадмия и др. Чувствительность фоторезисторов выше, чем у вакуумных фотоэлементов с внешним фотоэффектом и достигает 10 мА/лм.

Обычно фоторезисторы обладают значительной инерцией, а также нелинейной зависимостью тока от светового потока. Они широко применяются в промышленной электронике, автоматике, измерительной технике и т. п.

3-8 Терморезистор

Терморезистор или термосопротивление представляет собой простой прибор, состоящий из рабочего полупроводникового тела 1 и металлических выводов 2

(рис. 3-29, а и б); условное обозначение его показано на рис. 3-29, в.

Сопротивление терморезистора обладает резко выраженной зависимостью от температуры. Он имеет отрицательный температурный коэффициент сопротивления, абсолютное значение которого в десятки раз больше, чем

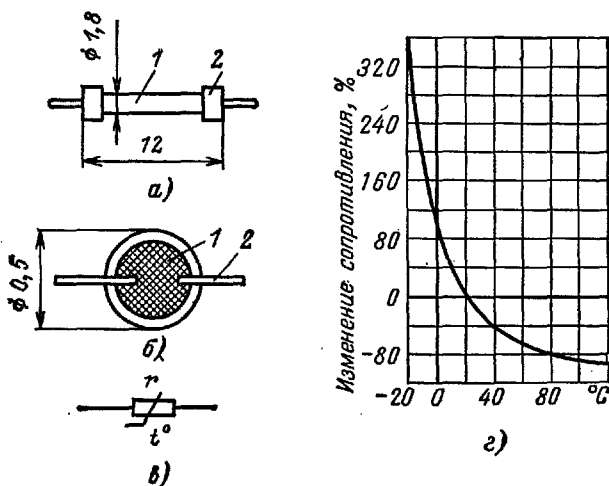


Рис. 3-29. Терморезисторы.

а — стержневой; б — бусинковый; в — условное обозначение; г — температурная характеристика.

у металлов. Уменьшение сопротивления при повышении температуры вызывается увеличением числа свободных носителей заряда. Зависимость сопротивления от температуры для одного из терморезисторов показана на рис. 3-29, г.

Нагрев терморезисторов происходит передачей тепла от окружающей среды или током, проходящим по терморезистору или по нагревателю.

3-9

Графический расчет нелинейных цепей

Для расчета нелинейных электрических цепей применяются графические и аналитические методы расчета. Графические методы расчета нелинейных цепей более просты и поэтому часто применяются.

Графический метод расчета неразветвленных цепей с нелинейными элементами рассмотрим на примере цепи (рис. 3-30) с двумя нелинейными элементами (НЭ).

Выбрав масштабы для тока и напряжения, построим на одном графике вольт-амперные характеристики (в. а. х.) первого $I_1(U_1)$ и второго $I_2(U_2)$ нелинейных элементов (рис. 3-31), откладывая напряжения по оси абсцисс, а токи по оси ординат.

Так как напряжение на зажимах цепи U с двумя последовательно соединенными участками равно сумме напряжений U_1 и U_2 на этих участках, а ток в обоих элементах один и тот же ($I_1 = I_2 = I$), то, складывая абсциссы двух в. а. х., соответствующие одному и тому же току, получаем абсциссы в. а. х.

цепи $I(U)$. Например, складывая абсциссы $O'A'$ и $O'A''$ (рис. 3-31), получаем абсциссу $O'A$, представляющую собой напряжение на зажимах цепи $U' = U'_1 + U'_2$ при токе I' . Аналогично, задаваясь другими значениями силы

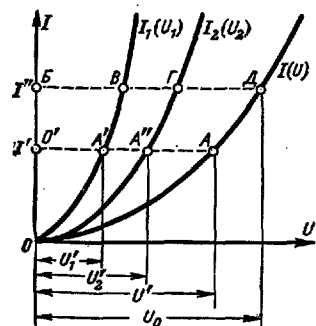


Рис. 3-31. Построение вольт-амперной характеристики неразветвленной цепи.

тока, задаваясь другими значениями силы тока, найдем соответствующие точки, через которые проходит в. а. х. цепи.

Полученная в. а. х. $I(U)$ дает возможность по заданному напряжению найти силу тока в цепи и напряжения на нелинейных элементах, и наоборот, по заданной силе тока определить напряжения на зажимах цепи и на нелинейных элементах. Например, при заданном напряжении питания U_0 , изображаемом отрезком $БД$ (рис. 3-31), сила тока в цепи будет иметь значение I'' — отрезок $ОБ$, напряжение на первом нелинейном элементе изображается отрезком $БВ$, а на втором отрезком $БГ$. Аналогичные построения можно выполнить и в том случае, когда один из элементов линейный или когда соединены последовательно более двух НЭ.

Силу тока в цепи, состоящей из линейного элемента с сопротивлением r и НЭ (рис. 3-32), при заданной в. а. х.

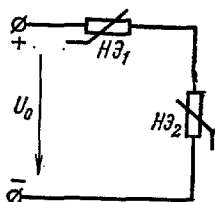


Рис. 3-30. Неразветвленная цепь с двумя нелинейными резисторами.

(рис. 3-33) нелинейного элемента $I(U_1)$ и известных значениях сопротивления r и напряжения питания U_0 можно найти и методом пересечений.

Так как ток в обоих элементах один и тот же $I_1 = I_2 = I$, а напряжение на НЭ

$$U_1 = U_0 - U_2 = U_0 - Ir,$$

то ток в цепи

$$I = (U_0 - U_1)/r. \quad (3-5)$$

По написанному линейному уравнению, выражающему зависимость тока в цепи I от напряжения на НЭ U_1 , можно

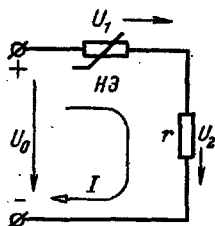


Рис. 3-32. Неразветвленная цепь с линейным и нелинейным элементами.

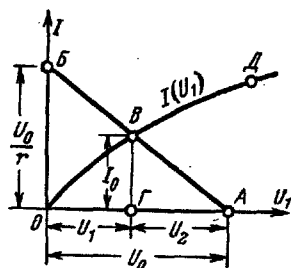


Рис. 3-33. График для определения тока и напряжений на отдельных участках неразветвленной цепи.

построить в той же системе координат, что и в. а. х., эту зависимость — прямую BA (рис. 3-33). Точка B соответствует току в цепи $I = U_0/r$ и напряжению на НЭ $U_1 = 0$, а точка A — напряжению на НЭ $U_1 = U_0$, так как в этом случае $I = 0$. Точка B пересечения прямой с в. а. х. НЭ определяет единственный возможный режим цепи, одновременно удовлетворяющий как линейному уравнению, так и в. а. х. НЭ. Ток цепи $I = I_0$ представлен отрезком $B\Gamma$, напряжение U_1 на НЭ — отрезком $О\Gamma$, напряжение U_2 на сопротивление r — отрезком ΓA .

Пример 3-1. Определить ток и напряжение на участках неразветвленной цепи, состоящей из резистора с сопротивлением $r = 60$ Ом и лампы при напряжении цепи 120 В (рис. 3-32). Вольт-амперная характеристика лампы задана (табл. 3-2).

Решение. Вольт-амперная характеристика $I_d(U_d)$ построена по данным табл. 3-2 на рис. 3-34.

При токе $I = 0$ напряжение на лампе $U_1 = U_d = U_0 - Ir = 120 - 0 = 120$ В. Отложив по оси абсцисс отрезок OA , соответствующий напряжению 120 В; получим точку A . При напряжении на лампе

Таблица 3-2

U_{λ} , В	0	20	40	60	80	100	120
I_{λ} , А	0	0,2	0,5	0,9	1,35	1,85	2,3

$U_{\lambda} = 0$ ток в цепи $I = U_0/r = 120/60 = 2$ А. Отложив по оси ординат отрезок OB , соответствующий току 2 А, найдем точку B . Прямая, проведенная через точки A и B , пересекает вольт-амперную характеристику в точке B . Ордината точки B выражает ток $I = 0,95$ А; отрезок оси абсцисс OG определяет напряжение на лампе $U_{\lambda} = 63$ В, а отрезок GA — напряжение на сопротивлении $U_2 = 57$ В.

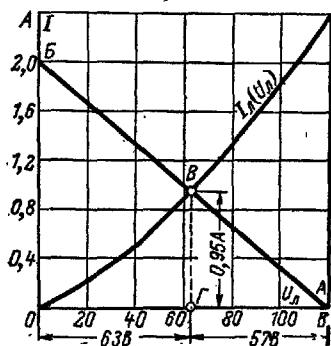


Рис. 3-34. К примеру 3-2.

Расчет цепи с параллельно соединенными нелинейными элементами (рис. 3-35) при заданных напряжении питания U_0 и в. а. х. $I_1(U_1)$ и $I_2(U_2)$ (рис. 3-36) сводится к определению по этим характеристикам токов в ветвях I_1 и I_2 , так как $U_1 = U_2 = U_0$. Отложив на оси абсцисс заданное напряжение U_0 (отрезок OA) и восстановив перпендикуляр из точки A , найдем отрезки AA_1 и AA_2 , выражающие токи I_1 и I_2 . Ток в неразветвленной части цепи равен сумме токов в ветвях, т. е. $I = I_1 + I_2$.

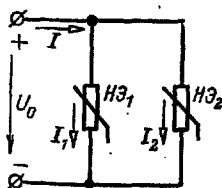


Рис. 3-35. Параллельное соединение двух нелинейных элементов.

Если требуется найти токи I_1 и I_2 по заданному току в неразветвленной части цепи I , то необходимо построить общую в. а. х. $I(U)$, складывая ординаты в. а. х. параллельных ветвей, соответствующие одним и тем же значениям напряжения (рис. 3-36). При заданном токе I (точка B на общей в. а. х.) находим напряжение $U_0 = U_1 = U_2$ (точка A) и токи I_1 и I_2 (точки A_1 и A_2).

Аналогично рассчитываются цепи при произвольном числе параллельных ветвей с нелинейными элементами.

Графический метод расчета цепей со смешанным (параллельно-последовательным) соединением нелинейных эле-

(рис. 3-33) нелинейного элемента $I(U_1)$ и известных значениях сопротивления r и напряжения питания U_0 можно найти и методом пересечений.

Так как ток в обоих элементах один и тот же $I_1 = I_2 = I$, а напряжение на НЭ

$$U_1 = U_0 - U_2 = U_0 - Ir,$$

то ток в цепи

$$I = (U_0 - U_1)/r. \quad (3-5)$$

По написанному линейному уравнению, выражающему зависимость тока в цепи I от напряжения на НЭ U_1 , можно

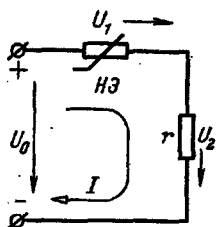


Рис. 3-32. Неразветвленная цепь с линейным и нелинейным элементами.

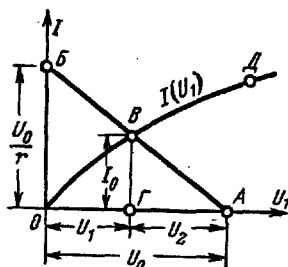


Рис. 3-33. График для определения тока и напряжений на отдельных участках неразветвленной цепи.

построить в той же системе координат, что и в а. х., эту зависимость — прямую BA (рис. 3-33). Точка B соответствует току в цепи $I = U_0/r$ и напряжению на НЭ $U_1 = 0$, а точка A — напряжению на НЭ $U_1 = U_0$, так как в этом случае $I = 0$. Точка V пересечения прямой с в. а. х. НЭ определяет единственный возможный режим цепи, одновременно удовлетворяющий как линейному уравнению, так и в. а. х. НЭ. Ток цепи $I = I_0$ представлен отрезком BV ; напряжение U_1 на НЭ — отрезком OG ; напряжение U_2 на сопротивление r — отрезком GA .

Пример 3-1. Определить ток и напряжение на участках неразветвленной цепи, состоящей из резистора с сопротивлением $r = 60$ Ом и лампы при напряжении цепи 120 В (рис. 3-32). Вольт-амперная характеристика лампы задана (табл. 3-2).

Решение. Вольт-амперная характеристика $I_d(U_d)$ построена по данным табл. 3-2 на рис. 3-34.

При токе $I = 0$ напряжение на лампе $U_1 = U_d = U_0 - Ir = 120 - 0 = 120$ В. Отложив по оси абсцисс отрезок OA , соответствующий напряжению 120 В; получим точку A . При напряжении на лампе

Таблица 3-2

$U_{\lambda}, \text{ В}$	0	20	40	60	80	100	120
$I_{\lambda}, \text{ А}$	0	0,2	0,5	0,9	1,35	1,85	2,3

$U_{\lambda} = 0$ ток в цепи $I = U_0/r = 120/60 = 2 \text{ А}$. Отложив по оси ординат отрезок OB , соответствующий току 2 А , найдем точку B . Прямая, проведенная через точки A и B , пересекает вольт-амперную характеристику в точке B . Ордината точки B выражает ток $I = 0,95 \text{ А}$; отрезок оси абсцисс OG определяет напряжение на лампе $U_{\lambda} = 63 \text{ В}$, а отрезок GA — напряжение на сопротивлении $U_2 = 57 \text{ В}$.

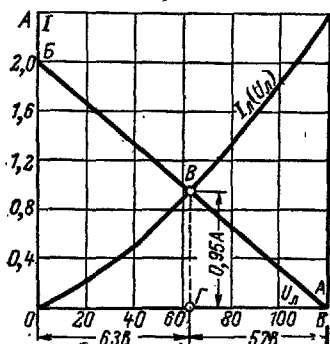


Рис. 3-34. К примеру 3-2.

Расчет цепи с параллельно соединенными нелинейными элементами (рис. 3-35) при заданных напряжении питания U_0 и в. а. х. $I_1(U_1)$ и $I_2(U_2)$ (рис. 3-36) сводится к определению по этим характеристикам токов в вет-

вях I_1 и I_2 , так как $U_1 = U_2 = U_0$. Отложив на оси абсцисс заданное напряжение U_0 (отрезок OA) и восстановив перпендикуляр из точки A , найдем отрезки AA_1 и AA_2 , выражающие токи I_1 и I_2 . Ток в неразветвленной части цепи равен сумме токов в ветвях, т. е. $I = I_1 + I_2$.

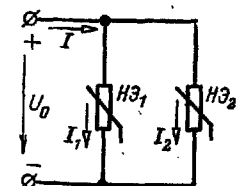


Рис. 3-35. Параллельное соединение двух нелинейных элементов.

Если требуется найти токи I_1 и I_2 по заданному току в неразветвленной части цепи I , то необходимо построить общую в. а. х. $I(U)$, складывая ординаты в. а. х. параллельных ветвей, соответствующие одним и тем же значениям напряжения (рис. 3-36). При заданном токе I (точка B на общей в. а. х.) находим напряжение $U_0 = U_1 = U_2$ (точка A) и токи I_1 и I_2 (точки A_1 и A_2).

Аналогично рассчитываются цепи при произвольном числе параллельных ветвей с нелинейными элементами.

Графический метод расчета цепей со смешанным (параллельно-последовательным) соединением нелинейных эле-

ментов заключается в построении общих вольт-амперных характеристик сначала для разветвленных участков цепи, а затем и для последовательно соединенных участков. Полученная таким образом общая в. а. х. цепи дает возможность определить токи и напряжения на всех участках цепи.

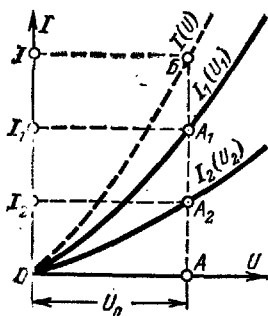


Рис. 3-36. График для определения токов и напряжения при параллельном соединении двух нелинейных элементов.

Рассмотрим расчет цепи со смешанным соединением нелинейных элементов на примере схемы, данной на рис. 3-37.

Сначала по заданным в. а. х. параллельных ветвей $I_2(U_{23})$ и $I_3(U_{23})$, которые показаны на рис. 3-38, находим в. а. х. разветвленного участка $I_1(U_{23})$. Для этого складываем ординаты в. а. х. ветвей, соответствующие одним и тем же значениям напряжения. Определение суммарной ординаты $O'B = O'A + O'B$ соответствует вычислению суммарного тока параллельных ветвей, равного току в неразветвленном участке цепи, т. е. $I_1 = I_2 + I_3$. Полученная в. а. х. $I_1(U_{23})$ представляет собой зависимость суммарного тока параллельных ветвей от общего напряжения между узлами ($U_{23} = U_2 = U_3$). Далее по полученной в. а. х. $I_1(U_{23})$ и заданной в. а. х. $I_1(U_1)$ первого элемента находим в. а. х. всей цепи $I(U)$.

Для этого складываем абсциссы в. а. х. последовательно соединенных участков, соответствующие одним и тем же значениям тока. Нахождение суммарной абсциссы ($GE = GD + GB$) соответствует определению суммарного на-

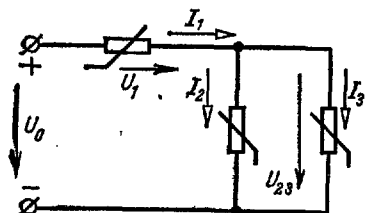


Рис. 3-37. Цепь со смешанным соединением нелинейных элементов.

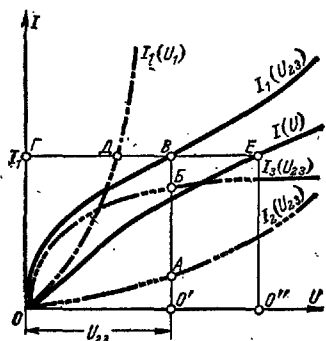


Рис. 3-38. Графический расчет цепи, изображенной на рис. 3-37.

Для этого складываем абсциссы в. а. х. последовательно соединенных участков, соответствующие одним и тем же значениям тока. Нахождение суммарной абсциссы ($GE = GD + GB$) соответствует определению суммарного на-

пряжения последовательно соединенных участков, равного напряжению питания ($U_0 = U_1 + U_{23}$).

Если напряжение U_0 задано, то, отложив по оси абсцисс отрезок OO'' , изображающий U_0 , по общей в. а. х. $I(U)$ находим ток $I_1 = I$, изображаемый отрезком $O''E = OG$. Затем, определив точку пересечения B горизонтальной прямой GE с в. а. х. $I_1(U_{23})$, находим напряжение на разветвлении U_{23} (отрезок $OO' = GB$) и, отметив точки A и B , токи в ветвях I_2 (отрезок $O'A$) и I_3 (отрезок $O'B$).

3-10

Аналитический расчет нелинейных цепей

Нелинейную цепь можно рассчитать аналитически, если, например, какой-либо участок ее в. а. х. с достаточным приближением можно заменить отрезком прямой. При этом нелинейная цепь заменяется эквивалентной схемой с линейными элементами, которая рассчитывается одним из методов расчета линейных цепей.

На рис. 3-39 дана в. а. х. нелинейной цепи (элемента); по оси абсцисс в масштабе M_U отложены напряжения, а по оси абсцисс в масштабе M_I — силы тока. Часть в. а. х. между точками ag заменена отрезком прямой.

Нелинейная цепь или элемент в любой точке в. а. х. характеризуется статическим сопротивлением, которое равно отношению напряжения к силе тока, соответствующих этой точке, т. е.

$$r_{ст} = U/I. \quad (3-6)$$

Статическое сопротивление элемента, в. а. х. которого построена на рис. 3-39, с ростом напряжения уменьшается.

При аналитических расчетах нелинейных цепей пользуются не статическим, а дифференциальным сопротивлением, под которым понимают отношение бесконечно малого

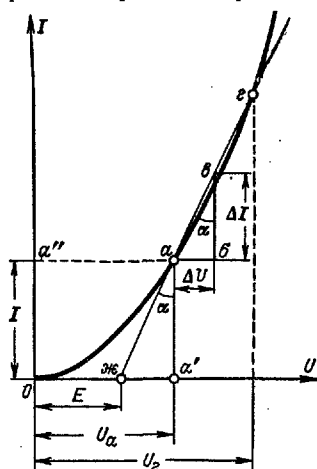


Рис. 3-39. Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента, сопротивление которого уменьшается с увеличением напряжения.

или весьма малого приращения напряжения ΔU к соответствующему приращению силы тока ΔI .

Например, для точки a в. а. х. (рис. 3-39) можно написать:

$$r_d = \frac{dU}{dI} \approx \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{M_U \cdot ab}{M_I \cdot \delta a} = M_r \operatorname{tg} \alpha. \quad (3-7)$$

Для линейных цепей статическое сопротивление равно дифференциальному $r_{ст} = r_d = U/I = \Delta U/\Delta I$.

Продолжив прямолинейный участок ag в. а. х. (рис. 3-39) до пересечения с осью абсцисс, получим отрезок оси $Oж$. Допустив, что этот отрезок изображает в масштабе M_U величину некоторой вообра-

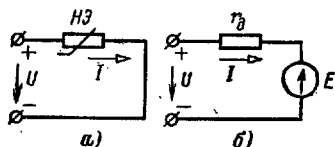


Рис. 3-40. Цепь с нелинейным элементом, сопротивление которого уменьшается с увеличением напряжения (а), и ее эквивалентная схема (б):

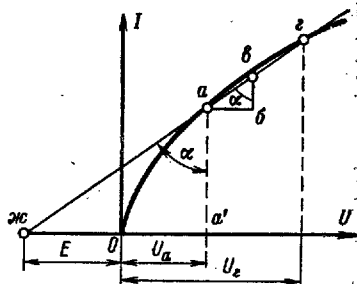


Рис. 3-41. Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента, сопротивление которого возрастает с увеличением напряжения.

жаемой э. д. с. E , можем записать выражение дифференциального сопротивления

$$r_d = M_r \operatorname{tg} \alpha = \frac{U-E}{I}, \quad (3-8)$$

откуда напряжение, соответствующее точке a или любой точке прямолинейной части (ag) в. а. х.

$$U = E + Ir_d. \quad (3-9)$$

Написанное выражение можно истолковать следующим образом. Нелинейный элемент (рис. 3-40, а) в указанных границах в. а. х. (от точки a до точки g) можно заменить эквивалентной схемой, которая кроме постоянного линейного сопротивления r_d содержит еще источник э. д. с. E , компенсирующий часть приложенного к цепи напряжения (рис. 3-40, б), так что ток в цепи, как и следует из (3-9),

$$I = \frac{U-E}{r_d}. \quad (3-10)$$

Если напряжение цепи U больше U_a (рис. 3-39) и меньше U_r , то ток в цепи можно найти аналитическим расчетом по формуле (3-10), т. е. расчетом цепи по рис. 3-40, б.

На рис. 3-41 дана в. а. х. нелинейной цепи, статическое сопротивление которой увеличивается с ростом напряжения на ее зажимах. Продолжив прямолинейный участок ag в. а. х. цепи до пересечения с осью абсцисс, получим отрезок $Oж$ на отрицательной части оси абсцисс. Допуская, как и для ранее рассмотренной цепи, что этот отрезок в масштабе напряжений изображает некоторую воображаемую э. д. с. E , записываем выражение дифференциального сопротивления

$$r_d = M_r \operatorname{tg} \alpha = M_r \frac{a'ж}{a'a} = \frac{U+E}{I}, \quad (3-11)$$

откуда напряжение на участке ag в. а. х.

$$U = Ir_d - E. \quad (3-12)$$

На рис. 3-42, а, б показана нелинейная цепь и ее эквивалентная схема, содержащая линейные элементы: сопротивление r_d и источник э. д. с. E , направление которой противоположно э. д. с. в цепи рис. 3-40, б.

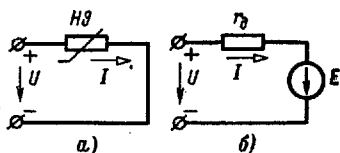


Рис. 3-42. Цепь с нелинейным элементом, сопротивление которого возрастает с увеличением напряжения (а), и ее эквивалентная схема (б).

3-11

Стабилизаторы тока и напряжения

Нелинейные элементы, у которых в. а. х. имеют участки, параллельные оси абсцисс или оси ординат, применяются для стабилизации тока или стабилизации напряжения.

К числу стабилизаторов тока относится, например, б а р е т т е р. Он представляет собой стальную или вольфрамовую проволоку — нить, помещенную в баллон, который заполнен водородом при давлении 50—200 мм рт. ст. Условия охлаждения и нагревания нити бареттера подобраны так, что изменение напряжения на его зажимах в известных границах вызывает почти пропорциональное изменение сопротивления нити.

Включим бареттер (НЭ) последовательно с потребителем, имеющим постоянное сопротивление r (рис. 3-32).

Построив прямые как на рис. 3-33 из точек O' и O'' , определяющих изменение напряжения питания от U'_0 до $U''_0 = U'_0 + \Delta U$ (рис. 3-43), убедимся, что ток в цепи изменяется очень незначительно от I' до $I'' = I' + \Delta I$ (точки A и B). Границы изменения напряжения, при которых ток цепи изменяется в допустимых пределах, зависят от величины сопротивления приемника, включенного последовательно с бареттером, т. е. от наклона прямых.

Эффективность стабилизации характеризуют коэффициентом стабилизации, показывающим, во сколько раз

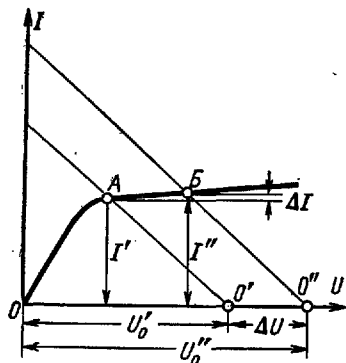


Рис. 3-43. Вольт-амперная характеристика бареттера.

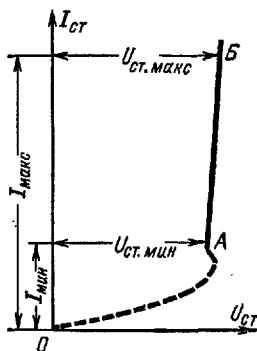


Рис. 3-44. Вольт-амперная характеристика газоразрядного стабилизатора.

относительное изменение тока меньше относительного изменения напряжения

$$S_I = \frac{\Delta U/U}{\Delta I/I} = \frac{\Delta U I}{\Delta I U}. \quad (3-13)$$

Чем больше коэффициент S_I , тем лучше стабилизация. Коэффициент стабилизации можно определить по в. а. х. стабилизатора.

Для стабилизации напряжения применяют или газоразрядные стабилизаторы или полупроводниковые (кремниевые) диоды.

Газоразрядный стабилизатор имеет стеклянный баллон, в котором находится цилиндрический катод и анод в виде проволоки, расположенный на оси катода. Давление газа в баллоне составляет несколько десятков миллиметров ртутного столба.

Рабочий участок AB в а. х. стабилитрона (рис. 3-44) почти параллелен оси ординат. Напряжение в пределах, соответствующих участку AB , называется напряжением стабилизации $U_{ст}$.

Стабилитрон включается параллельно приемнику с сопротивлением r (рис. 3-45). Последовательно с разветвленным участком включается балластное сопротивление $r_б$, напряжение на котором равно разности между напряжением питания U_0 и напряжением стабилизации, или

$$U_0 = I r_б + U_{ст},$$

где $I = I_{ст} + I_H$ — ток источника питания.

Значительное увеличение входного напряжения ΔU_0 вызывает увеличение тока в стабилитроне и тока источника питания, поэтому падение напряжения на балластном сопротивлении возрастает, а напряжение на стабилитроне ($\Delta U_{ст}$) увеличивается незначительно. Увеличение тока нагрузки вызывает уменьшение тока в стабилитроне и незначительное изменение напряжения на разветвлении.

Коэффициент стабилизации показывает, во сколько раз относительное изменение стабилизированного напряжения на нагрузке меньше относительного изменения напряжения питания

$$S_U = \frac{\Delta U_0 / U_0}{\Delta U_{ст} / U_{ст}} = \frac{\Delta U_0 U_{ст}}{\Delta U_{ст} U_0}. \quad (3-14)$$

3-12

Балластное сопротивление

Устойчивый режим работы ряда приборов с нелинейными характеристиками и, в частности, устойчивое горение дуги имеет место только в том случае, если последовательно включен резистор, сопротивление которого называется балластным.

Падающий характер в. а. х. дуги (рис. 3-46) означает, что с увеличением тока происходит уменьшение напряжения, так как сопротивление дуги уменьшается вследствие увеличения поперечного сечения дуги (увеличения сечения плазмы в междуэлектродном промежутке).

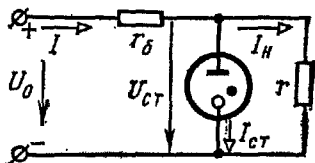


Рис. 3-45. Схема стабилизатора с газоразрядным стабилитроном.

Для определения балластного сопротивления r , обеспечивающего устойчивое горение дуги, построим прямую AG (рис. 3-46) по заданному напряжению питания U_0 (точка A) и силе тока $I = U_0/r$ (точка G). Прямая пересекает в. а. х. дуги в двух точках B и B , т. е. при данном балластном сопротивлении возможны два режима горения дуги, при силе тока I_1 и силе тока I_2 . При силе тока I_1 устойчивое горение дуги невозможно. Действительно, при незначительном

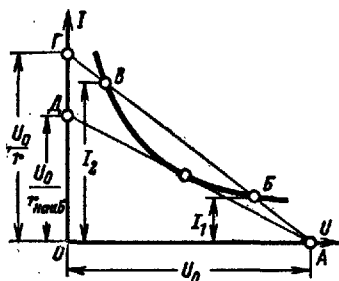


Рис. 3-46. Вольт-амперная характеристика дуги и определение балластного сопротивления.

Ордината OG определяет силу тока, равную отношению напряжения цепи U_0 к балластному сопротивлению r , откуда оно и определяется:

$$r = U_0 / M_I (OG). \quad (3-15)$$

Наибольшее балластное сопротивление $r_{\text{наиб}}$, при котором возможно еще горение дуги, должно быть несколько меньше отношения напряжения U_0 к силе тока, изображенной ординатой OD , которая отсекается на оси ординат касательной к в. а. х. дуги, проведенной через точку A . Таким образом,

$$r_{\text{наиб}} = U_0 / M_I (OD). \quad (3-16)$$

Глава четвертая

Магнитное поле

4-1

Магнитное поле тока

Проводник с электрическим током окружен магнитным полем, которое, как указывалось в § 1-1, представляет собой один из видов материи. Опытным путем установлено,

что магнитное поле возникает не только вокруг проводников с током, но и внутри проводников с током и при движении любых электрически заряженных частиц и тел, а также при изменении электрического поля. Например, магнитное поле постоянных магнитов создается молекулярными токами, т. е. в результате движения электронов по орбитам и вращения их вокруг своих осей. Магнитное поле выявляется по силовому воздействию его на движущиеся заряженные частицы и, в частности, на электрический ток в проводе (§ 4-9).

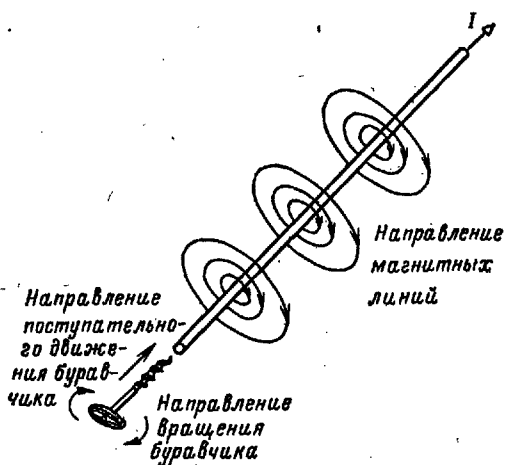


Рис. 4-1. Магнитное поле проводника с током.

Для обнаружения магнитного поля проще всего воспользоваться магнитной стрелкой. Магнитная стрелка, внесенная в магнитное поле провода с током, испытывает действие сил этого поля, под влиянием которых она стремится расположиться перпендикулярно оси провода с током. То направление, которое указывает северный конец магнитной стрелки, принимается за «направление магнитного поля» в области, где находится стрелка.

Для того чтобы наглядно графически изобразить магнитное поле, введено понятие о магнитных линиях. Магнитные линии проводятся так, чтобы направление касательной в каждой ее точке совпадало с «направлением поля». Если через каждую единичную площадку (1 м^2 , 1 см^2), перпендикулярную направлению магнитных линий, провести число линий, пропорциональное интенсивности

поля в данной точке, то по плотности линий можно судить и об интенсивности поля, которая характеризуется магнитной индукцией (см. § 4-4). Магнитные линии или линии магнитного потока всегда замкнуты. Например, магнитные линии прямолинейного провода с током (рис. 4-1) имеют форму концентрических колец, расположенных в плоскостях, перпендикулярных к оси провода.

Направление магнитных линий провода с током можно определить, например, по правилу буравчика: если поступательное движение буравчика совместить с направлением тока в проводе, то направление вращения

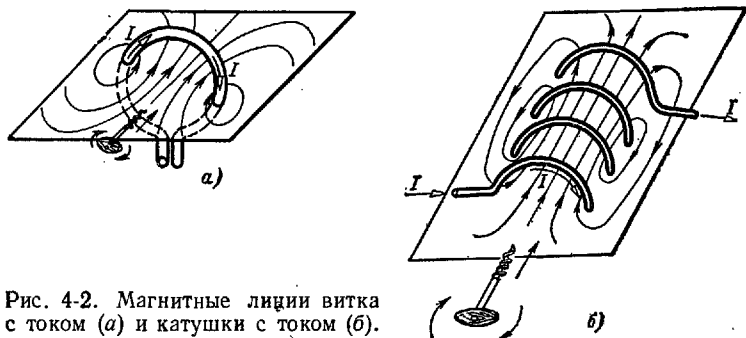


Рис. 4-2. Магнитные линии витка с током (а) и катушки с током (б).

рукоятки буравчика укажет направление магнитных линий. Пользуясь этим правилом, можно решить и обратную задачу: по заданному направлению магнитных линий найти направление тока.

На рис. 4-2, а показаны магнитные линии поля витка с током, а на рис. 4-2, б катушки с током. В случае витка или катушки правило буравчика удобнее применять в несколько измененном виде: если совместить направление вращения рукоятки буравчика с направлением тока в витке или катушке, то поступательное движение буравчика укажет направление магнитных линий, пронизывающих поверхность, ограниченную контуром тока.

Таким образом, «направление магнитного поля» зависит от направления тока.

Магнитное поле называется однородным, если во всех точках поле имеет одинаковое направление и одинаковую

интенсивность. В противном случае оно называется неоднородным. Графически однородное поле изображается параллельными магнитными линиями, проведенными с одинаковой плотностью. Такое поле можно получить, например, в узком воздушном зазоре между двумя плоскими параллельно расположенными полюсами магнита или электромагнита.

Магнитное поле прямолинейного провода с током симметрично. Это означает, что в плоскости, перпендикулярной к оси провода, все точки, расположенные на одном и том же расстоянии от оси провода с током, находятся в одинаковых физических условиях, откуда следует, что интенсивность поля во всех этих точках одинакова. Картина будет такой же и в любой другой плоскости, параллельной рассмотренной.

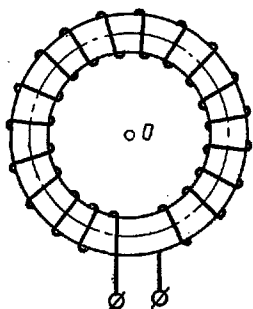


Рис. 4-3. Кольцевая катушка.

Другим примером симметричного поля является поле кольцевой катушки, витки которой равномерно распределены вдоль сердечника катушки (рис. 4-3). Из условий симметрии непосредственно следует, что магнитные линии в сердечнике имеют форму окружностей, центры которых лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости рисунка и проходящей через центр O кольцевой катушки. Очевидно также, что во всех точках одной и той же магнитной линии интенсивность поля будет одинаковой.

4-2

Намагничивающая сила, напряженность магнитного поля, магнитное напряжение

Несмотря на то что электрический ток в проводе и его магнитное поле представляют собой неотделимые друг от друга стороны единого электромагнитного процесса, принято говорить, что электрический ток обладает свойством возбуждать магнитное поле. Это свойство тока называют намагничивающей силой (н. с.), или магнитодвижущей силой (м. д. с.) и обозначают ее буквой F .

Формально н. с. F вызывает или возбуждает магнитное поле (магнитный поток) подобно тому, как э. д. с. вызывает электрический ток в электрической цепи.

В системе СИ намагничивающая сила принимается численно равной силе тока, вызывающего магнитное поле, так что н. с. провода с током $F = I$. Если ток проходит по контуру или по катушке с числом витков ω , то н. с. равна произведению силы тока на число витков, т. е. $F = I\omega$.

Естественно, что н. с., так же как и сила тока, измеряется в амперах, т. е.

$$[F] = [I] = \text{А.}$$

Для определения направления н. с. (м. д. с.) катушки или витка с током удобно пользоваться правилом правой руки: если охватить катушку (виток) правой рукой так, чтобы четыре пальца ее расположились по направлению тока в витках катушки, то отогнутый большой палец руки укажет на направление н. с. На рис. 4-4 показаны несколько катушек с током и направления их н. с.



Рис. 4-4. Определение направления н. с. катушки.

ток) правой рукой так, чтобы четыре пальца ее расположились по направлению тока в витках катушки, то отогнутый большой палец руки укажет

на направление н. с. На рис. 4-4 показаны несколько катушек с током и направления их н. с.

Намагничивающая сила в симметричных полях, например кольцевой катушки, равномерно распределяется вдоль магнитной линии. Доля н. с., приходящейся на единицу длины магнитной линии, называется напряженностью магнитного поля H и является одной из характеристик поля.

Напряженность магнитного поля в заданной точке зависит от силы тока, формы проводника и в однородной среде не зависит от свойств среды (вещества). Напряженность поля является векторной величиной. Направление вектора напряженности в изотропных средах, т. е. в средах с одинаковыми во всех направлениях магнитными свойствами, совпадает с направлением магнитной линии в данной точке. Напряженность магнитного поля в системе СИ измеряется в амперах на метр:

$$[H] = [F/l] = \text{А/м.}$$

Иногда применяется единица напряженности поля — эрстед (Э), не принадлежащая к системе СИ

$$1\text{Э} \approx 80 \text{ А/м} = 0,8 \text{ А/см.}$$

Если магнитное поле симметрично, то вычисление напряженности поля не представляет большого труда. Например, напряженность поля в точке A на расстоянии r от оси прямолинейного провода с током (рис. 4-5) в соответствии с приведенным выше определением напряженности поля может быть найдена по формуле

$$H = I/l = I/2\pi r, \quad (4-1)$$

где l — длина магнитной линии с радиусом r .

Допустим, что ток в проводе $I = 100$ А, тогда напряженность поля на расстоянии 10 см. от оси провода $H = I/(2\pi r) = 100/(2 \cdot 3,14 \cdot 0,1) = 100/0,628 \approx 160$ А/м.

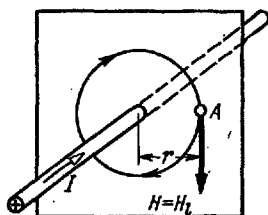


Рис. 4-5. Напряженность магнитного поля провода с током.

По аналогии с электрическим напряжением при расчете магнитных полей пользуются понятием магнитного напряжения U_m .

Магнитное напряжение между двумя точками a и b однородного магнитного поля, расположенными на одной

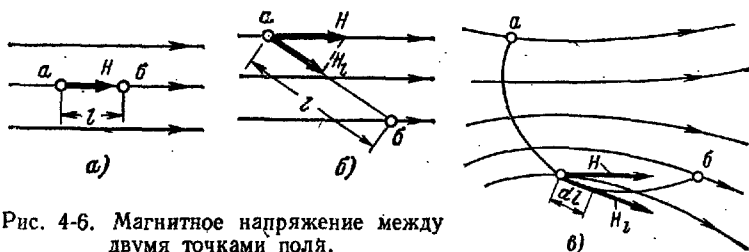


Рис. 4-6. Магнитное напряжение между двумя точками поля.

магнитной линии (рис. 4-6, a), выражается произведением напряженности поля и расстояния между этими точками

$$U_m = Hl. \quad (4-2a)$$

В более общем случае, когда в однородном поле две точки a и b находятся на расстоянии l не на одной магнитной линии (рис. 4-6, b), сначала вычисляется напряженность H , затем продольная слагающая вектора напряженности $H_l = H \cos(\angle H, H_l)$; магнитное напряжение определяется произведением этой слагающей и расстояния l между точками:

$$U_m = H_l l.$$

В неоднородном магнитном поле магнитное напряжение между двумя точками a и b поля равно сумме элементарных напряжений $H_t dl$ на элементарных участках dl вдоль выбранного пути между этими точками (рис. 4-6, в):

$$U_m = \int H_t dl. \quad (4-26)$$

Магнитное напряжение U_m может зависеть от выбранного пути между начальной и конечной точками.

Магнитное напряжение в системе СИ измеряется в амперах

$$[U_m] = [H_t l] = \frac{A}{m} \cdot m = A.$$

Магнитное напряжение вдоль произвольного замкнутого пути (контура) представляет собой н. с. или м. д. с. вдоль этого контура. Таким образом, н. с. можно определить как сумму элементарных магнитных напряжений $H dl$ вдоль замкнутого контура

$$F = \oint H_t dl,$$

где знак $\oint$ обозначает суммирование (интегрирование) по замкнутому контуру элементарных напряжений $H_t dl$.

4-3

Закон полного тока

Полным током называют алгебраическую сумму токов, пронизывающих поверхность, ограниченную замкнутым контуром.

Приняв произвольно выбранное направление обхода контура за положительное, будем считать токи, пронизывающие контур, положительными, если их направление совпадает с направлением поступательного движения буравчика, рукоятка которого вращается в положительном направлении обхода контура. Например, на рис. 4-7 ток I_1 положительный, а ток I_2 — отрицательный. Полный ток, пронизывающий контур, $\Sigma I = I_1 - I_2$.

Напряженность поля в отдельных точках, расположенных на контуре, может иметь или различные или одинаковые значения. Допустим, что в точке A вектор напряженности поля образует с элементом длины контура dl угол α . Тогда $H_t = H \cos \alpha$ будет представлять собой касатель-

ную к контуру или тангенциальную составляющую вектора напряженности магнитного поля. Магнитное напряжение $H_l dl$ на элементарном участке контура dl положительно, если направление вектора H_l совпадает с выбранным направлением обхода контура, в противном случае оно будет отрицательным.

По закону полного тока н. с. вдоль контура равна полному току, который проходит сквозь поверхность, ограниченную этим контуром, т. е.

$$F = \sum I \text{ или } \oint H_l dl = \sum I. \quad (4-3)$$

Если контур совпадает с магнитной линией, то направление вектора напряженности поля совпадает с касательной к контуру и, следовательно $H_l = H$ (рис. 4-5).

Если, кроме того, напряженность поля H во всех точках контура одинакова (симметричные поля), то в формуле (4-3) ее можно вынести за знак суммирования и написать:

$$H \oint dl = \sum I,$$

где знак $\oint dl$ обозначает сумму элементарных длин замкнутого контура, т. е. длину этого контура l ; следовательно, в этом случае

$$Hl = \sum I. \quad (4-4)$$

Так, для поля прямолинейного провода с током I по закону полного тока $Hl = I$, что совпадает с ранее полученным выражением (4-1).

Выражение $\oint H_l dl$ иногда называют циркуляцией вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру. В соответствии с этим изменяют и формулировку закона полного тока.

4-4

Магнитная индукция, магнитная проницаемость, магнитный поток

При внесении внутрь катушки стального сердечника интенсивность поля внутри катушки значительно возрастает за счет молекулярных токов сердечника, т. е. за счет

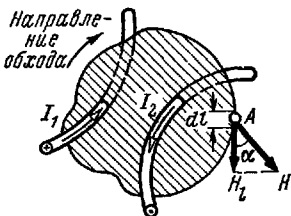


Рис. 4-7. Токи, пронизывающие поверхность, ограниченную контуром.

изменения состояния среды сердечника, в которой существует магнитное поле. Интенсивность поля, с учетом влияния среды характеризуется в каждой его точке **магнитной индукцией** B . Магнитная индукция — вектор, определяемый по силовому воздействию магнитного поля на ток (§ 4-9) или движущийся заряд. Таким образом, магнитная индукция является силовой характеристикой поля аналогично напряженности электрического поля.

Направление вектора магнитной индукции совпадает с направлением касательной к магнитным линиям и в изотропных средах с направлением вектора напряженности поля. Так как, кроме того, плотность магнитных линий пропорциональна интенсивности поля, которая характеризуется магнитной индукцией, то магнитные линии являются линиями магнитной индукции.

Магнитная индукция и напряженность поля в изотропной среде связаны простым соотношением

$$B = \mu_a H, \quad (4-5)$$

где μ_a — абсолютная магнитная проницаемость, характеризующая магнитные свойства среды.

Сравнивая магнитное поле тока в проводе, расположенном в данной среде и в вакууме, установили, что в зависимости от свойств среды (материала) поле получается более интенсивным, чем в вакууме (парамагнитные материалы), или наоборот, менее интенсивным (диамагнитные материалы). Таким образом, интенсивность магнитного поля, т.е. индукция B , зависит от среды, в которой существует поле.

Абсолютная магнитная проницаемость вакуума называется магнитной постоянной μ_0 . В системе СИ для нее принято значение $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Ом·с/м.

Единица ом-секунда (Ом·с) называется **генри** (Г), это единица измерения индуктивности (см. § 6-6). Таким образом:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Г/м} \approx 125 \cdot 10^{-8} \text{ Г/м}. \quad (4-6)$$

Абсолютную магнитную проницаемость различных материалов и сред сравнивают с магнитной постоянной. Отношение абсолютной магнитной проницаемости какого-либо материала к магнитной постоянной называется **магнитной проницаемостью** μ (или относительной магнитной проницаемостью), так что

$$\mu = \mu_a / \mu_0. \quad (4-7)$$

Магнитная проницаемость — отвлеченное число. Для диамагнитных материалов и сред $\mu < 1$, например для меди $\mu = 0,999995$. Для парамагнитных $\mu > 1$, например для воздуха $\mu = 1,0000031$. При технических расчетах магнитная проницаемость диамагнитных и парамагнитных материалов и сред принимается равной единице.

У ферромагнитных материалов (§ 5-1), играющих исключительно важную роль в электротехнике, магнитная проницаемость достигает десятков тысяч и зависит от магнитных свойств материала, температуры, интенсивности магнитного поля, т. е. величины индукции или от величины напряженности магнитного поля.

Из выражения (4-5) можно определить единицу измерения магнитной индукции

$$[B] = [\mu_a H] = [\mu_0 \mu H] = \frac{\Gamma}{\text{м}} \frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Ом} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{м}^2} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} = \text{Т}.$$

Единица вольт-секунда (В·с) называется вебер (Вб), это единица измерения магнитного потока. Единицу вебер на квадратный метр (Вб/м²) называют тесла (Т). Таким образом, в системе СИ магнитная индукция измеряется в веберах на квадратный метр, или теслах.

При расчетах магнитных полей часто пользуются единицей гаусс (Гс), не принадлежащей к системе СИ, при этом $1 \text{ Гс} = 10^{-4} \text{ Т} = 10^{-4} \text{ Вб/м}^2$.

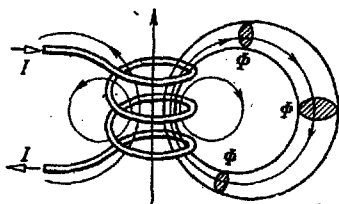


Рис. 4-8. Магнитная трубка.

Разобьем магнитное поле на отдельные части, проведя в нем поверхности в виде трубок, не пересекающих магнитные линии. Одна из таких трубок показана на рис. 4-8. Число магнитных линий (линий магнитной индукции), пересекающих любое поперечное сечение трубки S , одинаково. Такую трубку можно назвать трубкой потока магнитных линий или просто магнитной трубкой.

Плотность магнитных линий, т. е. число их, приходящихся на единичную площадку, перпендикулярную к магнитным линиям, характеризует интенсивность магнитного поля, или магнитную индукцию поля B . Произведение магнитной индукции B однородного поля и величины площадки S , перпендикулярной вектору этой индукции,

называется магнитным потоком, или потоком вектора магнитной индукции:

$$\Phi = BS. \quad (4-8)$$

В системе СИ, как указывалось, единицей магнитного потока служит вебер (Вб), или вольт-секунда (В·с):

$$[\Phi] = [BS] = \frac{В \cdot с}{м^2} \cdot м^2 = В \cdot с = Вб.$$

Более мелкой единицей магнитного потока, не принадлежащей к системе СИ, является максвелл (Мкс)

$$1 \text{ Мкс} = 10^{-8} \text{ Вб}.$$

Если вектор магнитной индукции не перпендикулярен к площадке S , а образует угол β с нормалью к площадке (рис. 4-9), то магнитный поток определяется как произведение нормальной составляющей вектора магнитной индукции $B_n = B \cos \beta$ и площадки S , т. е.

$$\Phi = B \cos \beta S = B_n S. \quad (4-8a)$$

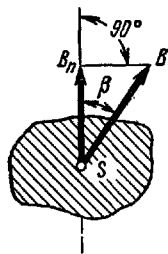


Рис. 4-9. Нормальная составляющая вектора магнитной индукции.

В неоднородном магнитном поле (рис. 4-8) сначала определяется элементарный магнитный поток $d\Phi$ через элементарную площадку dS или $d\Phi = B_n dS$, а затем определяется магнитный поток через заданную площадку конечных размеров суммированием (интегрированием) элементарных потоков

$$\Phi = \int B_n dS. \quad (4-8б)$$

Магнитные линии не имеют начала и конца, поэтому каждая линия, входящая в замкнутую поверхность, должна выйти из нее. То же можно сказать и в отношении магнитного потока, который рассматриваем как совокупность магнитных линий. Из сказанного следует, что суммарный магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность равен нулю, т. е.

$$\oint B_n dS = 0.$$

Магнитный поток является важной физической величиной; например, как будет показано ниже (§ 4-10), работа, совершенная проводником с током I , при пересечении им магнитного потока Φ равна произведению магнитного

потока и тока, т. е. $A = \Phi I$; как показано в § 6-1, скорость изменения магнитного потока, пронизывающего какой-либо проводящий контур (рамку), равна индуктированной в контуре э. д. с.

4-5 Закон Био — Савара

В некоторых случаях расчета магнитных полей применяют закон Био—Савара, который устанавливает, что каждому элементу провода длиной dl (рис. 4-10) с током I

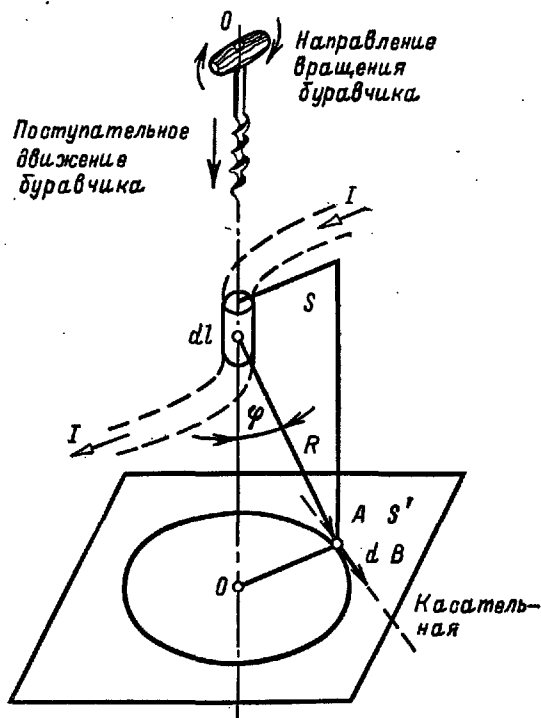


Рис. 4-10. Элемент длины провода с током и магнитная индукция его поля.

соответствует в точке A , удаленной на расстояние R от элемента dl , магнитное поле с индукцией

$$dB = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{I \cdot dl}{R^2} \sin \varphi. \quad (4-9)$$

Таким образом, индукция dB пропорциональна силе тока I , длине элемента dl , абсолютной магнитной проницаемости μ_a и синусу угла φ между направлением тока в элементе и радиус-вектором R , соединяющим элемент провода с точкой поля A , и обратно пропорциональна квадрату длины радиус-вектора.

Вектор магнитной индукции dB (рис. 4-10) направлен перпендикулярно к плоскости S , проведенной через элемент dl и радиус-вектор R . Если повернуть плоскость S вокруг оси OO на угол 2π , то точка A , расположенная на линии пересечения этой плоскости с перпендикулярной ей плоскостью S' , опишет окружность. Вектор dB в каждой точке этой окружности совпадает с касательной, проведенной через данную точку. Следовательно, окружность, проведенная через точку A , является магнитной линией. Направление вектора dB определяется по известному уже правилу буравчика.

Провод с током состоит из отдельных элементов dl . Вектор магнитной индукции B в любой точке поля равен геометрической сумме элементарных векторов dB , созданных в этой точке током, который проходит по всем элементарным участкам провода, т. е.

$$\vec{B} = \int d\vec{B}, \quad (4-10)$$

где черта над буквой указывает на геометрическое суммирование векторов, а знак $\int$ показывает, что берется сумма элементарных индукций dB .

Приведенная формула позволяет найти магнитную индукцию для поля проводов с током различной формы.

В качестве примера применения закона Био — Савара определим магнитную индукцию на оси $O'O''$ кольцевого проводника радиусом r_0 с током I (рис. 4-11).

По закону Био — Савара выражение элементарной магнитной индукции dB в произвольной точке A , которая находится на оси $O'O''$ кольцевого тока, вызванной током в элементе длины dl , определяется формулой (4-9). Не трудно понять, что для всех элементов кольца dl угол φ — прямой ($\varphi = \pi/2$) и, следовательно, $\sin \varphi = 1$.

Таким образом, на оси $O'O''$ элементарная индукция

$$dB = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{I dl}{R^2}.$$

Вектор dB_1 , обусловленный током I в элементе dl , перпендикулярен к плоскости, проведенной через радиус (на рис. 4-11 отрезок прямой CA) и элемент длины dl_1 .

Разложим вектор dB_1 на две составляющие: нормальную составляющую dB'_1 , перпендикулярную к оси $O'O''$ и продольную составляющую dB''_1 , совпадающую с осью $O'O''$. Из рис. 4-11 следует, что продольная составляющая

$$dB''_1 = dB_1 \sin \alpha = \frac{\mu_a I dl}{4\pi R^2} \sin \alpha.$$

Аналогично разложим на две составляющие вектор dB_2 , соответствующий току I в элементе длины $dl_2 = dl_1$, который расположен диаметрально противоположно элементу dl_1 . Нетрудно видеть (рис. 4-11), что нормальные составляющие dB'_1 и dB'_2 равны по величине и направлены противоположно

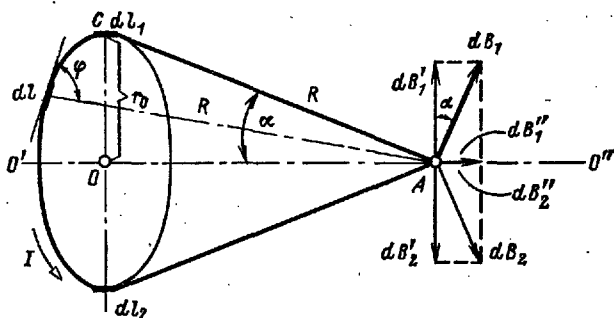


Рис. 4-11. Магнитная индукция на оси кольцевого проводника с током.

ложно и, следовательно, сумма их равна нулю. При суммировании элементарных индукций от всех элементов кругового тока нормальная составляющая dB' получится равной нулю, так как каждому элементу dl_1 можно противопоставить диаметрально противоположный и равный элемент dl_2 . Таким образом, результирующая магнитная индукция B в точке A равна сумме продольных составляющих dB'' , т. е.

$$B = \int dB'' = \int \frac{\mu_a I dl}{4\pi R^2} \sin \alpha = \frac{\mu_a I}{4\pi R^2} \sin \alpha \int dl,$$

или, так как $\int dl = 2\pi r_0$,

$$B = \frac{\mu_a I}{4\pi R^2} \sin \alpha 2\pi r_0.$$

Из треугольника AOC следует, что $r_0 = R \sin \alpha$, т. е.

$$B = \frac{\mu_a I}{4\pi r_0^2 / \sin^2 \alpha} \sin \alpha 2\pi r_0 = \mu_a \frac{I}{2r_0} \sin^3 \alpha. \quad (4-11)$$

Если точку A перемещать по оси $O'O''$, приближаясь к центру кольца O , то угол α , а значит, и магнитная индукция будут увеличиваться. При совпадении точки A с точкой O угол $\alpha = 0$, т. е. $\sin \alpha = 1$, и в центре кольцевого тока индукция

$$B = \mu_a \frac{I}{2r_0} = \mu_a \frac{I}{D_0}, \quad (4-12)$$

где D_0 — диаметр кольца.

В случае плотно сложенных витков ω с током I индукция в центре

$$B = \mu_a I \omega / D_0.$$

4-6

Магнитное поле провода с током

Напряженность поля в случае прямолинейного проводника с током I может быть найдена по закону полного тока в простейшей форме (4-4)

$$H = \Sigma I/l = I/(2\pi r), \quad (4-13)$$

так как полный ток равен току в проводе I , а длина контура (рис. 4-5) $l = 2\pi r$.

Произведение напряженности магнитного поля и абсолютной магнитной проницаемости равно магнитной индукции:

$$B = \mu_a H = \mu \mu_0 \frac{I}{2\pi r} = 125 \mu \frac{I}{2\pi r} 10^{-8}, \quad (4-14)$$

где B — магнитная индукция, Т; I — ток, А; r — расстояние, м.

Если проводник находится в неферромагнитной среде, то, полагая $\mu = 1$, получаем:

$$B = 125 \frac{I}{2\pi r} 10^{-8}, \quad (4-14a)$$

где B — магнитная индукция, Т.

Приведенная формула правильна при любом значении r , большем радиуса провода, и бесконечно большой длине провода; однако она применима и при конечной длине провода, если расстояние r значительно меньше длины провода и точка, в которой определяется индукция, не находится вблизи конца провода.

По закону полного тока нетрудно найти напряженность поля и внутри длинного цилиндрического провода радиуса a (рис. 4-12).

Во всех точках поперечного сечения провода плотность тока

$$\delta = I/S = I/(\pi a^2).$$

Окружность радиуса $r < a$ (рис. 4-12) с центром на оси провода представляет собой замкнутый контур. Обозначив площадь сечения, ограниченного замкнутым контуром, $S_r = \pi r^2$, а ток, пронизывающий это сечение, δS_r , по закону полного тока (4-4) можем написать выражение напряженности магнитного поля:

$$H = \Sigma I/l = \delta S_r/(2\pi r).$$

Подставив в последнюю формулу выражения плотности тока и площади замкнутого контура, получим:

$$H = \frac{I\pi r^2}{\pi a^2 2\pi r} = \frac{I}{2\pi a^2} r. \quad (4-15)$$

Таким образом, напряженность поля в произвольной точке внутри провода пропорциональна расстоянию r этой

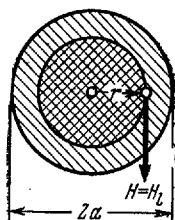


Рис. 4-12. Напряженность магнитного поля внутри провода с током.

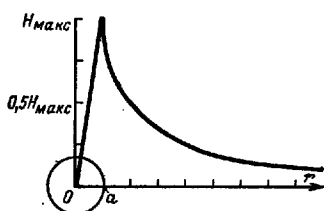


Рис. 4-13. График напряженности магнитного поля провода с током.

точки от оси провода. На оси провода $H = 0$, так как $r = 0$. На поверхности провода ($r = a$) напряженность поля имеет наибольшее значение:

$$H_{\text{макс}} = \frac{I}{2\pi a^2} a = \frac{I}{2\pi a}.$$

График напряженности магнитного поля внутри и вне провода дан на рис. 4-13.

Магнитная индукция внутри провода равна произведению напряженности магнитного поля и абсолютной магнитной проницаемости материала провода, т. е.

$$B = \mu_0 H = 125\mu \frac{I}{2\pi a^2} r \cdot 10^{-8},$$

где B — магнитная индукция, Т; I — ток, А; расстояния и a — м.

Магнитное поле токов, проходящих по двум параллельным проводам, можно получить наложением магнитных полей первого и второго токов. Значение и направление магнитной индукции в произвольной точке поля двух токов можно определить геометриче-

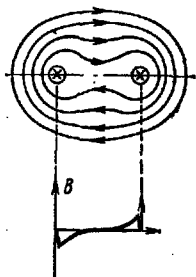


Рис. 4-14. Магнитное поле двух параллельных проводов с равными токами одинакового направления.

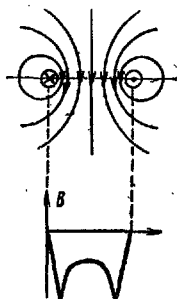


Рис. 4-15. Магнитное поле двух параллельных проводов с равными токами разного направления.

ским сложением составляющих векторов магнитной индукции, т. е.

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Магнитное поле двух одинаковых токов, проходящих по параллельно расположенным проводам, при одинаковом и при противоположном направлениях токов показаны на рис. 4-14 и 4-15. На тех же рисунках даны графики индукции поля между проводами.

Пример 4-1. Найти напряженность магнитного поля и магнитную индукцию в точках 1, 2 и 3, расположенных на расстояниях 0,1; 0 и 0,8 см от оси прямолинейного провода. Радиус провода $a = 0,2$ см, сила тока в проводе 40 А, магнитная проницаемость $\mu = 1$.

Решение. В точке 1, находящейся внутри провода, напряженность поля

$$H_1 = \frac{I r_1}{2\pi a^2} = \frac{40 \cdot 0,001}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,002^2} = 1600 \text{ А/м};$$

магнитная индукция в той же точке

$$B_1 = \mu_0 H_1 = 125 \cdot 1600 \cdot 10^{-8} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Т}.$$

В точке 2, находящейся на поверхности провода,

$$H_2 = \frac{I}{2\pi a} = \frac{40}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,002} = 3200 \text{ А/м};$$

$$B_2 = \mu_0 H_2 = 125 \cdot 3200 \cdot 10^{-8} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Т.}$$

В точке 3, находящейся вне провода,

$$H_3 = \frac{I}{2\pi r} = \frac{40}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,008} = 800 \text{ А/м};$$

$$B_3 = \mu_0 H_3 = 125 \cdot 800 \cdot 10^{-8} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Т.}$$

4-7

Магнитное поле трубчатого провода и коаксиального кабеля

Определим напряженность магнитного поля трубчатого провода (рис. 4-16) с внутренним радиусом R_2 и внешним R_3 , если по проводу проходит ток I .

Площадь поперечного сечения трубчатого провода $S = \pi (R_3^2 - R_2^2)$ и плотность тока в проводе

$$\delta = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi (R_3^2 - R_2^2)}.$$

Проведем окружность радиусом $r < R_2$, центр которой расположен на оси трубы. Так как внутри этой окружности (контура) ток отсутствует, то по закону полного тока (4-4) напряженность поля $H = 0$, что указывает на отсутствие магнитного поля внутри трубы.

Проведем окружность радиусом r , охватывающую большую или меньшую часть сечения провода, так, чтобы $R_2 \leq r \leq R_3$.

Найдем ток внутри этой окружности (контура):

$$I' = \delta S = \delta \pi (r^2 - R_2^2);$$

подставив плотность тока δ , получим:

$$I' = \frac{I \pi (r^2 - R_2^2)}{2\pi (R_3^2 - R_2^2)}.$$

Напряженность поля в любой точке этой окружности по закону полного тока (4-4)

$$H = \frac{\Sigma I}{l} = \frac{I'}{2\pi r} = \frac{I (r^2 - R_2^2)}{2\pi r (R_3^2 - R_2^2)}. \quad (4-16)$$

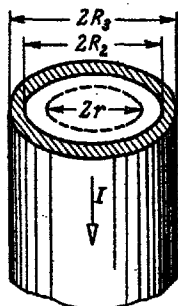


Рис. 4-16. Трубчатый провод.

Проведя окружность радиусом $r > R_3$, т. е. за пределами провода, найдем, что

$$H = \sum I/l = I/(2\pi r),$$

т. е. получим знакомую формулу (4-13).

Коаксиальный кабель (рис. 4-17) состоит из двух изолированных проводов, имеющих общую ось. Внутренний провод 1 цилиндрический, наружный 2 — трубчатый. Токи, идущие по проводам, равны, но направлены противоположно друг другу. Радиус цилиндрического провода обозначим R_1 , внутренний радиус трубчатого провода R_2 , а внешний R_3 .

Применим закон полного тока (4-4) для определения напряженности поля в точках, расположенных на различных расстояниях r от оси провода.

1) При $r < R_1$ напряженность поля определяется по формуле (4-15):

$$H = \frac{I}{2\pi R_1^2} r.$$

Рис. 4-17. Коаксиальный кабель.

2) При $R_1 < r < R_2$, т. е. между цилиндрическим проводом и трубчатым, поле создается только цилиндрическим проводом; напряженность поля определяется выражением (4-13):

$$H = I/(2\pi r).$$

3) При $R_2 < r < R_3$, т. е. в стенке трубчатого провода, напряженность поля определяется током, идущим по цилиндрическому проводу, и той частью тока противоположного направления, который идет по части сечения трубчатого провода, между окружностями радиуса r и R_2 . В соответствии с этим напряженность поля выражается разностью выражений (4-13) и (4-16), т. е.

$$H = \frac{I}{2\pi r} - \frac{I(r^2 - R_2^2)}{2\pi r(R_3^2 - R_2^2)} = \frac{I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right).$$

4) При $r > R_3$ полный ток, пронизывающий контур, равен нулю, поэтому $H = 0$. Таким образом, за пределами коаксиального кабеля магнитное поле, обусловленное током кабеля, отсутствует.

Магнитное поле катушки

Определим напряженность магнитного поля катушки (рис. 4-18) с кольцевым сердечником, на который с одинаковой плотностью наложена обмотка из ω витков.

Проведем замкнутый контур, совпадающий с магнитной линией, в виде окружности радиуса r и длиной $l = 2\pi r$. Поверхность, ограниченную контуром, пронизывают все ω проводов с током I одного направления, следовательно, полный ток, сцепленный с контуром, $\Sigma I = I\omega$.

Вследствие симметрии напряженность поля H будет во всех точках окружности радиуса r одинакова и направлена по касательной к окружности. Таким образом, по закону полного тока (4-4) можно написать, что

$$Hl = I\omega. \quad (4-17)$$

При радиусе контура $r < R_1$ или $r > R_2$ полный ток, который пронизывает поверхность, ограниченную контуром, равен нулю; следовательно, равна нулю и напряженность поля за пределами сердечника.

Магнитная индукция, выраженная в теслах (Т), внутри сердечника в любой точке окружности радиуса r равна:

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{I\omega}{l} = 125\mu \frac{I\omega}{l} \cdot 10^{-8}, \quad (4-18)$$

где I — ток, А, l — длина, м.

Напряженность поля и магнитная индукция в различных точках поперечного сечения сердечника имеют разные значения; максимальные — на внутренней поверхности кольцевого сердечника (на расстоянии R_1 от центра O) и минимальные — на наружной поверхности сердечника (на расстоянии R_2 от точки O).

На средней магнитной линии, совпадающей с окружностью радиуса $r_{cp} = (R_1 + R_2)/2$, магнитная индукция, выраженная в теслах (Т),

$$B = 125\mu \frac{I\omega}{2\pi r_{cp}} 10^{-8}. \quad (4-19)$$

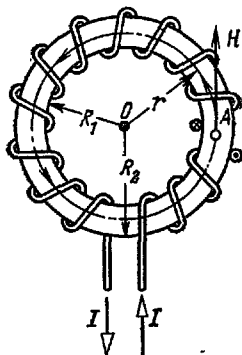


Рис. 4-18. Кольцевая катушка.

Напряженность магнитного поля кольцевой катушки (4-17) численно равна н. с., отнесенной к единице длины катушки; следовательно, напряженность магнитного поля в произвольной точке A можно выразить отношением н. с. на части дуги (Iw') к длине l' (рис. 4-19), т. е.

$$H = Iw/l = Iw'/l'. \quad (4-20)$$

Цилиндрическую катушку (рис. 4-20) можно рассматривать как кольцевую с достаточно большим радиусом, у которой обмотка расположена только на части сердечника длиной l . Напряженность магнитного поля на осевой линии

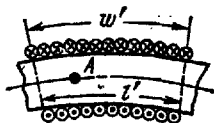


Рис. 4-19. Участок сердечника кольцевой катушки.

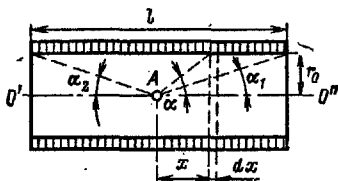


Рис. 4-20. Цилиндрическая катушка.

катушки в ее центральной части можно определить по приближенной формуле

$$H = Iw/l. \quad (4-21)$$

Ошибка при определении H будет тем меньше, чем больше отношение длины катушки к ее диаметру.

По более точной формуле напряженность поля на оси катушки (например, в точке A на рис. 4-20)

$$H = \frac{Iw}{2l} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2). \quad (4-22)$$

Найдем выражение напряженности магнитного поля в точке A (рис. 4-20), расположенной на оси $O'O''$ цилиндрической катушки. Предположим, что витки катушки w равномерно распределены по ее длине и по ним проходит постоянный ток I . Катушку (рис. 4-20) представим состоящей из тонких колец толщиной dx , по которым проходит ток I_k , который может быть выражен через отношение полного тока катушки (Iw) к длине катушки l :

$$I_k = \frac{Iw}{l} dx.$$

Напряженность поля кольцевого тока I_k в точке A на оси кольца, как показано выше (4-11),

$$dH = \frac{I_k}{2r_0} \sin^3 \alpha = \frac{Iw}{l} dx \frac{\sin^3 \alpha}{2r_0}.$$

Из рис. 4-20 находим, что $x = r_0 \operatorname{ctg} \alpha$; дифференцируя последнее выражение, получаем:

$$dx = d(r_0 \operatorname{ctg} \alpha) = -\frac{r_0}{\sin^2 \alpha} d\alpha.$$

Подставив значение dx в формулу для dH , после сокращения получим:

$$dH = -I\omega \frac{\sin \alpha}{2l} d\alpha.$$

Напряженность поля в точке A найдем, интегрируя написанное выражение в пределах от $\alpha = \pi - \alpha_2$ (соответствующее крайнему левому кольцевому току) до α_1 (соответствующее крайнему кольцевому току на другом конце катушки):

$$\begin{aligned} H &= \frac{I\omega}{2l} \int_{\pi - \alpha_2}^{\alpha_1} (-\sin \alpha) d\alpha = \frac{I\omega}{2l} \cos \alpha \Big|_{\pi - \alpha_2}^{\alpha_1} = \\ &= \frac{I\omega}{2l} [\cos \alpha_1 - \cos (\pi - \alpha_2)] = \frac{I\omega}{2l} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2). \end{aligned}$$

Это и есть формула (4-22).

Если катушка достаточно длинная ($l \gg r_0$), то для точки A , расположенной в средней части катушки, углы α_1 и α_2 малы и косинусы их близки к единице; поэтому

$$H \approx \frac{I\omega}{2l} 2 = \frac{I\omega}{l},$$

т. е. получается знакомая формула (4-21).

Если точка A находится на торце катушки, то один из углов (α_1 или α_2) равен 90° , косинус его равен нулю, так что у конца катушки напряженность поля

$$H_{\text{кон}} = I\omega/(2l),$$

т. е. в 2 раза меньше, чем в середине катушки. Приняв во внимание замкнутость магнитных линий, можно сделать заключение, что через поперечное сечение катушки без ферромагнитного сердечника у ее торца проходит только половина магнитных линий, а другая половина их выходит через боковую цилиндрическую поверхность катушки (рис. 4-2, б).

4-9

Электромагнитные силы

Провод с током в магнитном поле. Поместим в однородное магнитное поле перпендикулярно направлению магнитных линий и вектора индукции прямолинейный провод длиной l , по которому проходит ток I (рис. 4-21).

Из опыта можно убедиться в том, что магнитное поле действует на провод с током, помещенный в поле, с силой F , называемой электромагнитной силой. На-

правление вектора силы перпендикулярно направлению вектора индукции и направлению тока, а величина ее пропорциональна силе тока I , магнитной индукции поля B и активной длине провода l , т. е. той его части, которая расположена в магнитном поле. Таким образом, электромагнитная сила

$$F = IBl. \quad (4-23)$$

Выражая силу тока в амперах, магнитную индукцию в теслах и длину в метрах, получим силу, выраженную в ньютонах:

$$[F] = [IBl] = \text{А} \cdot \text{Т} \cdot \text{м} = \text{А} \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} \cdot \text{м} = \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}} = \text{Н}.$$

Направление вектора электромагнитной силы определяется по правилу левой руки: расположим ладонь

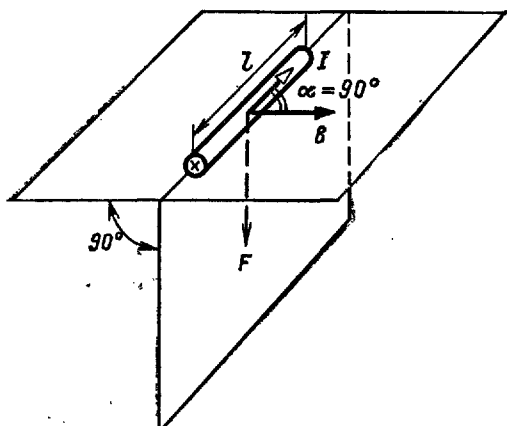


Рис. 4-21. Электромагнитная сила.

левой руки так, чтобы вектор магнитной индукции входил в нее и четыре вытянутых пальца совпадали с направлением тока, тогда отогнутый под прямым углом большой палец укажет направление электромагнитной силы (рис. 4-22).

Если угол α между направлением тока и направлением вектора магнитной индукции не равен 90° , то электромагнитная сила будет пропорциональна $\sin \alpha$, т. е. в этом случае

$$F = IBl \sin \alpha. \quad (4-24)$$

В более общем случае электромагнитную силу F , действующую на провод произвольной формы, расположенный в неоднородном магнитном поле, можно определить как геометрическую сумму элементарных сил dF , действующих на отдельные элементы

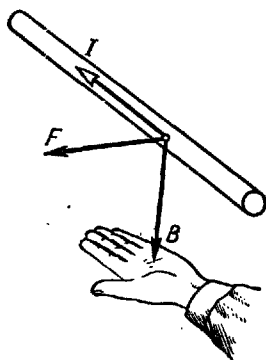


Рис. 4-22. Правило левой руки.

длины провода dl . Элемент провода бесконечно малой длины dl можно рассматри-

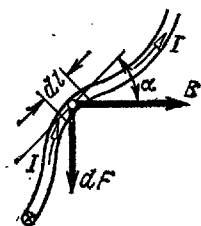


Рис. 4-23. Непрямолинейный провод с током в магнитном поле.

вать как прямолинейный, а магнитное поле, в котором он расположен, — однородным (рис. 4-23), поэтому элементарная сила

$$dF = IBdl \sin \alpha,$$

а сила, действующая на участок провода конечной длины l находится суммированием векторов элементарных сил по всей длине рассматриваемого участка, т. е.

$$\vec{F} = \int d\vec{F}. \quad (4-25)$$

Пример 4-2. В однородном поле перпендикулярно магнитным линиям расположен прямолинейный провод длиной $l = 0,5$ м с током силой $I = 200$ А. Магнитная индукция поля $B = 0,8$ Т. Определить силу, действующую на провод.

Решение. Электромагнитная сила

$$F = IlB \sin \alpha = 200 \cdot 0,8 \cdot 0,5 \cdot 1 = 80 \text{ Н.}$$

Параллельные провода. Пусть по двум параллельным прямолинейным проводам, находящимся на расстоянии a друг от друга, проходят различные токи I_1 и I_2 одного направления (рис. 4-24, а) или противоположных направлений (рис. 4-24, б). На провод с током I_1 , находящийся в магнитном поле тока I_2 , действует электромагнитная сила F_1 , а на провод с током I_2 , находящийся в магнитном поле тока I_1 , действует сила F_2 .

Если длина параллельно расположенных проводов значительно больше расстояния a между проводами, то по формуле (4-14) магнитная индукция поля каждого из токов на расстоянии a от провода

$$B_1 = \mu_a \frac{I_1}{2\pi a}; \quad B_2 = \mu_a \frac{I_2}{2\pi a}.$$

Направления векторов B_1 и B_2 перпендикулярны плоскости, проведенной через оси проводов, и определяются по правилу буравчика.

По формуле (4-23) сила, действующая на первый провод,

$$F_1 = I_1 B_2 l = \mu_a \frac{I_1 I_2}{2\pi a} l.$$

Сила, действующая на второй провод,

$$F_2 = I_2 B_1 l = \mu_a \frac{I_1 I_2}{2\pi a} l.$$

Из полученных выражений следует, что силы, действующие на провода, равны друг другу, т. е. $F_1 = F_2$.

Применяя правило левой руки, легко убедиться, что параллельные провода с токами одного на-

правления притягиваются друг к другу, а провода с токами противоположного направления отталкиваются друг от друга (рис. 4-24).

Иногда определяют силу взаимодействия между проводами, отнесенную к единице длины проводов:

$$F_0 = \frac{F_1}{l} = \mu \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi a}. \quad (4-26)$$

Заменив в последней формуле абсолютную магнитную проницаемость произведением $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м и $\mu = 1$ (для проводов, расположенных в воздухе), получим:

$$F_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{I_1 I_2}{2\pi a} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I_1 I_2}{a}, \quad (4-26a)$$

где F_0 — сила взаимодействия между проводами, Н/м; I_1 , I_2 — токи, А; a — расстояние, м.

Формула (4-26) дает возможность при $I_1 = I_2 = I$ по силе взаимодействия F_0 определить силу тока в проводах:

$$I = \sqrt{F_0 2\pi a / \mu_0 \mu}. \quad (4-27)$$

По силе взаимодействия двух проводов с равными токами в системе СИ определяется одна из основных единиц этой системы: единица тока — ампер (см. приложение 1). Если по двум прямолинейным длинным проводам ничтожно малого сечения, расположенным в вакууме ($\mu = 1$), на расстоянии 1 м друг от друга проходит один и тот же ток и сила взаимодействия $F_0 = 2 \cdot 10^{-7}$ Н/м, то

$$I = \sqrt{\frac{F_0 2\pi a}{\mu_0 \mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 1}{4\pi \cdot 10^{-7}}} = 1 \text{ А.}$$

Электрон в магнитном поле.

Действующую на провод с током, расположенный перпендикулярно направлению магнитных линий, электромагнитную силу можно рассматривать как сумму сил, действующих на свободные электроны проводника, направленное движение которых и представляет собой ток.

Число свободных электронов, заключенных в объеме проводника длиной l и сечением S , при концентрации их n составляет nSl . Поэтому электромагнитная сила, действующая на свободный электрон, движущийся в магнитном поле (рис. 4-25),

$$F_0 = \frac{F}{nSl} = \frac{Bil}{nSl}.$$

Подставив в полученную формулу выражение силы тока (1-14), т. е. $I = neSv$, получим:

$$F_0 = \frac{BneSvl}{nSl} = Bev. \quad (4-28)$$

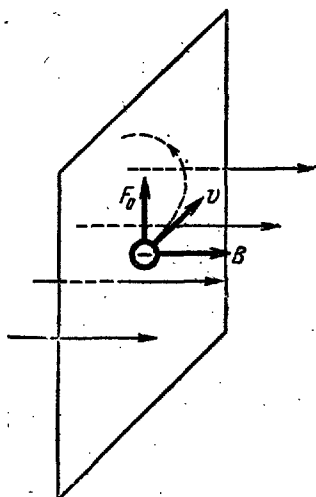


Рис. 4-25. Сила, действующая на электрон, который движется в магнитном поле.

Таким образом, сила, действующая на электрон, прямо пропорциональна магнитной индукции, заряду электрона и скорости, с которой электрон движется перпендикулярно направлению поля. Направление этой силы определяется по правилу левой руки, причем четыре вытянутых пальца руки должны совпадать с направлением тока, т. е. должны быть направлены в сторону, противоположную направлению движения электрона (рис. 4-25).

Из выражения (4-28) следует, что при $v = 0$ сила $F_0 = 0$, т. е. сила, действующая в магнитном поле на неподвижный заряд, равна нулю. Так как направление силы F_0 перпендикулярно направлению скорости, то работа, совершаемая ею, равна нулю. Энергия электрона и его скорость остаются неизменными.

Направление движения электрона под действием силы F_0 отклоняется от первоначального. Если на электрон действует только магнитное поле, то он будет перемещаться по окружности радиуса r . Сила F_0 является центростремительной, ее, как известно, можно выразить $F_0 = mv^2/r$, где m — масса электрона. Следовательно, можно записать:

$$mv^2/r = Bev,$$

откуда радиус окружности

$$r = mv/(Be).$$

Отношение массы электрона к его заряду m/e постоянно. Таким образом, радиус окружности прямо пропорционален не изменяющейся по величине скорости движения электрона и обратно пропорционален магнитной индукции поля B .

Воздействие магнитного поля на поток электронов находит широкое применение в технике, например для фокусировки электронного луча в электронно-лучевых трубках.

4-10

Работа электромагнитных сил

Провод с током. На прямолинейный провод с током, расположенный в магнитном поле, действует сила $F = IBl \sin \alpha$. В случае провода, расположенного перпендикулярно к направлению поля, т. е. при $\alpha = 90^\circ$ и $\sin \alpha = 1$, зависимость упрощается и сила $F = IBl$.

Если в однородном магнитном поле под действием силы F провод переместится на расстояние b (рис. 4-26) по направлению силы, то произведенная при этом работа

$$A = Fb = IBlb. \quad (4-29)$$

Площадь поверхности, описанной проводом при его перемещении перпендикулярно направлению поля, $S = lb$, а произведение $BS = \Phi$ представляет собой поток, пронизывающий эту поверхность; следовательно, работа

$$A = IBS = I\Phi. \quad (4-30)$$

Таким образом, при перемещении провода с постоянным током в однородном магнитном поле совершается механическая работа, равная произведению силы тока и пересеченного проводом магнитного потока.

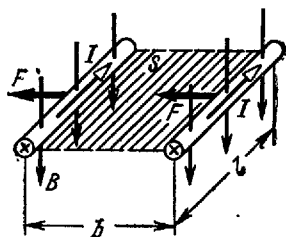


Рис. 4-26. Работа электромагнитных сил.

Пример 4-3. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 1,25$ Т в плоскости, перпендикулярной направлению поля, укреплены два рельса (рис. 4-27) длиной 4 м, отстоящие друг от друга на расстояние $l = 0,5$ м. По рельсам перемещается провод с укрепленным на

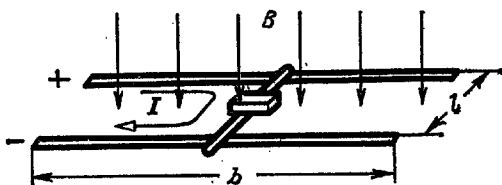


Рис. 4-27. К примеру 4-3.

нем грузом массой $m = 1$ кг. Какой силы ток проходит по цепи, если скорость груза в конце пути $v = 50$ м/с?

Решение. Кинетическая энергия груза в конце пути

$$W = mv^2/2 = 1 \cdot 50^2/2 = 1250 \text{ Дж.}$$

Эту энергию груз приобретает за счет работы перемещения в магнитном поле провода с током, следовательно,

$$mv^2/2 = I\Phi,$$

откуда ток

$$I = \frac{mv^2}{2\Phi} = \frac{W}{Blb} = \frac{1250}{1,25 \cdot 0,5 \cdot 4} = 500 \text{ А.}$$

Если провод произвольной формы с постоянным током перемещается в неоднородном магнитном поле (рис. 4-28), то работа, производимая при перемещении элемента длины провода dl в направлении силы,

$$dA = dFdb = Bldldb \sin \alpha,$$

где $dl db = dS$ — элементарная площадка.

Обозначим буквой β угол между вектором B и прямой nn , перпендикулярной к элементу dl и к силе dF , т. е. перпендикулярной площадке dS . Угол $\beta = \pi/2 - \alpha$, следовательно, $\sin \alpha = \cos \beta$.

Проекция вектора B на прямую nn , т. е. на нормаль к dS ,

$$B_n = B \cos \beta = B \sin \alpha.$$

Произведение $B_n dS$ представляет собой магнитный поток, пересеченный элементом dl при перемещении его на расстояние db , т. е.

$$d\Phi = B_n dS = B dS \sin \alpha,$$

а работа, совершенная при этом перемещении,

$$dA = Id\Phi = IB_n dS.$$

Рис. 4-28. Перемещение прямолинейного провода в магнитном поле.

Такое же выражение элементарной работы можно получить при перемещении элемента провода в направлении, не совпадающем с направлением силы dF . В таком случае перемещение db можно разложить на две составляющие, одну в направлении силы, другую в перпендикулярном направлении. Работа совершается только при перемещении вдоль первой составляющей, ее величина уже найдена.

Полная работа, совершенная при перемещении провода длиной l в магнитном поле, определяется суммой элементарных работ, т. е.

$$A = \int Id\Phi = I \int d\Phi = I\Phi.$$

В полученном выражении, как и раньше, Φ представляет собой весь магнитный поток, который пересечен проводом при его движении.

Из сопоставления полученного выражения с формулой (4-30) следует, что ее можно применять не только для прямолинейного провода, но и в более общих случаях расчета.

Отметим еще, что работа считается положительной, если она производится силами поля, и отрицательной, если она совершается против сил поля.

Контур с током. Так как протекание тока возможно только в замкнутом контуре, то, очевидно, любой провод с током является частью такого контура. Выражение (4-30) можно применить к замкнутому контуру, утверждая, что при перемещении контура с током (или части его) под действием сил поля совершается работа, если происходит изменение магнитного потока, пронизывающего контур.

Чтобы пояснить это утверждение, рассмотрим замкнутый контур с током I (рис. 4-29, на котором источник питания не изображен) и действующие на него электромагнитные силы, направление которых найдено по правилу левой руки. Магнитные линии поля направлены от наблюдателя за плоскость рисунка (изображены крестиками), причем плотность их возрастает при перемещении слева направо, так что $F_2 = F_4$, а $F_3 > F_1$, и результирующая сила $F = F_3 - F_1$, действующая на контур, совпадает по направлению с F_3 .

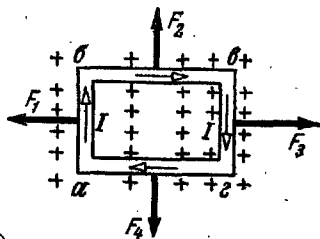


Рис. 4-29. Контур с током в магнитном поле.

Будем считать направление магнитных линий и магнитного потока, связанное с направлением тока в контуре правилом буравчика, положительным (например, поток Φ на рис. 4-29 положителен). Если контур под действием силы F перемещается направо, то магнитный поток, пронизывающий контур, увеличится на величину $\Delta\Phi > 0$, от значения Φ_1 в начале движения до значения

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Delta\Phi \quad (4-31)$$

в конце движения.

Обозначим Φ' поток, пересеченный стороной ab при ее движении в направлении силы F . Очевидно, начальный поток, пронизывающий контур Φ_1 , уменьшится на ту же величину Φ' . При этом совершенная работа $A_{ab} = -I\Phi'$ отрицательная, так как перемещение происходит против силы. Магнитный поток Φ'' , пересеченный стороной cd при ее движении, равен увеличению потока Φ_1 , пронизывающего контур. При этом совершенная работа $A_{cd} = I\Phi''$. Так как угол между направлением силы F_2 и направлением

движения рамки равен 90° , то работа, совершаемая при перемещении стороны $бв$, равна нулю. То же относится и к стороне $аг$.

Таким образом, суммарная работа, совершенная при перемещении контура,

$$A = A_{аб} + A_{аг} = -I\Phi' + I\Phi'' = I\Delta\Phi.$$

Если работа производится силами поля, то контур переместится направо ($F_2 > F_1$) и приращение потока $\Delta\Phi$ положительно ($\Phi_2 > \Phi_1$). При движении контура с током под действием сил поля магнитный поток, пронизывающий контур, всегда получает положительное приращение.

Рассмотренные явления приводят к важному выводу.

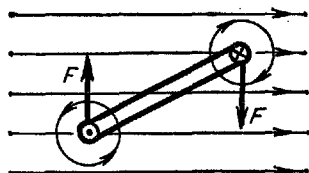


Рис. 4-30. Вращающий момент, действующий на контур с током в магнитном поле.

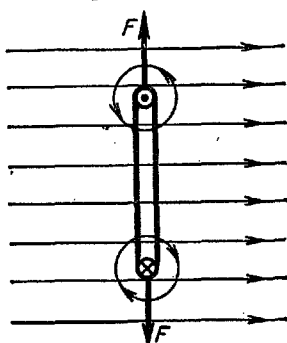


Рис. 4-31. Электромагнитные силы, стремящиеся растянуть виток.

Всякий контур с током, находящийся в магнитном поле, под действием электромагнитных сил стремится занять положение, при котором поток, пронизывающий контур, будет положительным и максимальным. Например, на виток с током (рис. 4-30), находящийся в однородном поле, действует вращающий момент, так что виток стремится занять положение, при котором плоскость витка будет перпендикулярна направлению внешнего поля и собственное магнитное поле внутри витка будет совпадать по направлению с внешним. По достижении устойчивого положения электромагнитные силы стремятся только растянуть его с тем, чтобы сцепленный с витком магнитный поток мог еще увеличиться (рис. 4-31).

Если виток с током расположен в неоднородном поле, то кроме вращательного момента действует и сила, направленная к участкам поля с большей магнитной индукцией.

При отрицательном приращении магнитного потока сквозь контур ($\Delta\Phi < 0$) совершаемая работа отрицательна, т. е. происходит под действием сил, направленных противоположно электромагнитным силам. Наконец, при нулевом приращении магнитного потока, пронизывающего контур ($\Delta\Phi = 0$), никакой работы не производится.

4-11

Магнитоэлектрический измерительный механизм

Измерительный механизм является основной частью приборов для измерения тока, напряжения, магнитного потока и других электрических и неэлектрических величин.

Подвижная часть магнитоэлектрического измерительного механизма (рис. 4-32) состоит из прямоугольной катушки — рамки B . Обмотка ее выполнена из тонкой медной изолированной проволоки; на рамке укреплены две полуоси с кернами, установленные в опорах. На одной из полуосей укреплены стрелка и концы спиральных пружин, через которые ток подводится к рамке.

Боковые стороны рамки расположены в узком воздушном зазоре между неподвижным стальным цилиндром B и полюсными башмаками $N'S'$. Магнитные линии постоянного магнита NS замыкаются через полюсные башмаки, воздушные зазоры и цилиндр B , так что магнитное поле в воздушном зазоре практически радиальное. На боковые стороны рамки, расположенные в магнитном поле, при прохождении тока действуют электромагнитные силы, так что возникает вращающий момент, пропорциональный силе тока.

Под действием этого момента рамка B поворачивается на угол α , при котором вращающий момент уравнивается противодействующим моментом пружин. Противодействующий момент пропорционален углу закручивания пружин; следовательно, большей силе тока, т. е. большему вращающему моменту, соответствует и больший угол поворота

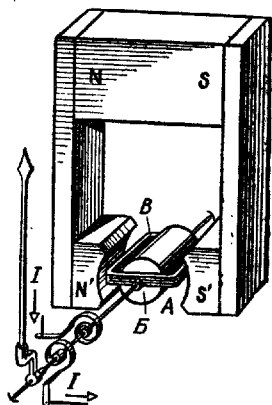


Рис. 4-32. Магнитоэлектрический измерительный механизм.

подвижной части. По углу поворота и определяют измеряемую величину, значения которой предварительно наносятся на шкале прибора, расположенной под концом указательной стрелки.

Глава пятая

Магнитная цепь

5-1

Намагничивание ферромагнетиков

Материалы (вещества), обладающие большой магнитной проницаемостью ($\mu \gg 1$), называются ферромагнитными или ферромагнетиками. К ферромагнетикам относятся: железо, сталь, никель, кобальт, их сплавы, а также ферриты — соединения окиси железа с окислами других металлов (цинка, никеля и т. д.), пермаллон и др.

Ферромагнетики в электротехнике играют очень важную роль, так как дают возможность при относительно небольших напряженностях магнитного поля получать сильные магнитные поля (большие магнитные потоки) и конструировать электромагнитные устройства, обладающие заданными характеристиками. Ферромагнитные сердечники применяются во всех электрических машинах, трансформаторах, электромагнитах, реле и многих других электромагнитных аппаратах и приборах.

Магнитные свойства тел зависят от магнитных свойств элементарных носителей магнетизма — движущихся внутри атомов и молекул электронов, а также от совместного действия отдельных их групп. Электроны, двигаясь по замкнутым орбитам или элементарным контурам, образуют элементарные (молекулярные) токи или магнитные диполи.

Магнитный диполь можно характеризовать вектором — магнитным моментом диполя m , величина которого равна произведению элементарного тока и элементарной площадки S (рис. 5-1, а), ограниченной контуром элементарного тока

$$m = iS.$$

Вектор m направлен перпендикулярно к площадке S по правилу буравчика. Магнитный момент измеряется в $A \cdot m^2$ или $A \cdot cm^2$ в зависимости от единиц измерения площади, $[m] = [iS] = A \cdot m^2$.

Векторная величина, равная геометрической сумме магнитных моментов всех элементарных (молекулярных) токов (рис. 5-1, б) в рассматриваемом теле (объеме вещества), представляет собой магнитный момент тела

$$\vec{M} = \sum \vec{m}.$$

Векторная величина, определяемая отношением магнитного момента тела к его объему V , называется средней на-

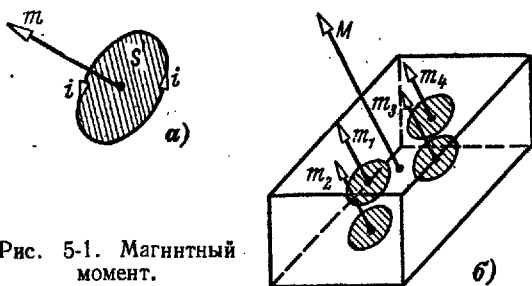


Рис. 5-1. Магнитный момент.

магниченностью тела или средней интенсивностью намагничивания:

$$J = M/V. \quad (5-1)$$

Намагниченность в системе СИ измеряется как и напряженность поля в А/м:

$$[J] = \left[\frac{M}{V} \right] = \frac{A \cdot m^2}{m^3} = A/m.$$

Магнитные моменты, обусловленные движением электронов по орбитам, называют орбитальными моментами. Однако и сами электроны обладают магнитным моментом, называемым спином или спиновым моментом, который соответствует как бы вращению электронов вокруг собственной оси. Установлено, что главную роль в намагничивании ферромагнетиков играют спиновые моменты. В ферромагнетиках образуются такие кристаллические структуры, в пределах отдельных областей которых, называемых магнитными доменами, спиновые моменты ориентируются параллельно. Таким образом, эти области оказываются самопроизвольно (спонтанно) намагниченными. Домены имеют размеры около 10^{-2} — 10^{-6} см.

Если ферромагнетик не находится во внешнем магнитном поле, то магнитные моменты отдельных доменов направ-

лены самым различным образом, так что суммарный магнитный момент тела оказывается равным нулю, т. е. ферромагнетик не намагничен. Внесение ферромагнетика во внешнее магнитное поле вызывает: 1) поворот магнитных моментов доменов в направлении внешнего поля — процесс ориентации; 2) рост размеров тех доменов, направления магнитных моментов которых близки к направлению поля, и уменьшение размеров доменов с противоположно направленными магнитными моментами — процесс смещения границ доменов. В результате ферромагнетик намагничивается.

Если при увеличении внешнего магнитного поля все спонтанно намагниченные участки будут ориентированы в направлении внешнего поля и прекратится рост доменов, то наступит состояние предельной намагниченности ферромагнетика, называемое **магнитным насыщением**.

Ферромагнитные материалы в большей или меньшей степени обладают магнитной **анизотропией**, т. е. свойством намагничиваться с различной степенью трудности в различных направлениях. Например, наиболее легкое намагничивание монокристалла железа происходит по ребру кристаллической решетки куба, и наиболее трудное — по диагонали куба. Хаотическому расположению кристаллов в ферромагнитном материале соответствует меньшая анизотропия по сравнению с упорядоченным расположением кристаллов, чему способствует, например, прокатка стали в одном направлении. Материалы с явно выраженной анизотропией называются **текстурованными**.

При намагничивании ферромагнетиков происходит и небольшое изменение их линейных размеров, т. е. увеличение или уменьшение длины с одновременным уменьшением или увеличением поперечного сечения. Это явление, называемое **магнитострикцией** и зависящее от строения кристаллической решетки ферромагнетика и напряженности внешнего магнитного поля, наиболее ярко выражено у никеля.

Магнитные свойства ферромагнитных материалов сохраняются до тех пор, пока их температура не достигнет значения, называемого точкой Кюри. Точка Кюри для различных материалов различна: для железа (Fe) $+770^{\circ}\text{C}$, для никеля (Ni) $+365^{\circ}\text{C}$; для кобальта (Co) $+1130^{\circ}\text{C}$.

Как было сказано выше, под действием внешнего магнитного поля, например, созданного током в катушке, наложенной на стальной сердечник, происходит процесс ориентации доменов в сердечнике и смещение их границ.

Это приводит к намагничиванию стального сердечника, причем намагниченность увеличивается с усилением внешнего магнитного поля. Магнитное поле сердечника, обусловленное его намагниченностью, складывается с внешним полем катушки сердечника и усиливает его.

При напряженности поля H магнитная индукция в неферромагнитной среде ($\mu = 1$) была бы равна $B_0 = \mu_0 H$. В ферромагнитной среде к этой индукции прибавляется индукция добавочного магнитного поля $B_d = \mu_0 J$. Результирующая магнитная индукция в ферромагнитном материале

$$B = B_0 + B_d = \mu_0 (H + J). \quad (5-2)$$

Так как магнитная индукция связана с напряженностью магнитного поля соотношением (4-5)

$$B = \mu \mu_0 H = \mu_a H,$$

то

$$\mu_a = \mu_0 (1 + J/H). \quad (5-3)$$

Намагниченность J ферромагнитного материала растет, как указывалось, только до предельного значения, называемого намагниченностью насыщения J_s . Зависимость намагниченности J от напряженности поля показана на рис. 5-2 пунктирной кривой. На том же рисунке показана линейная зависимость $B_0 = \mu_0 H$. Складывая ординаты кривой $\mu_0 J(H)$ и прямой $B_0 = \mu_0 H$, получаем ординаты новой кривой $B(H)$ — кривой начального намагничивания (рис. 5-2). Кривую $B(H)$ можно разделить на четыре участка: 1) почти линейный участок oa , соответствующий малым напряженностям поля, показывает, что магнитная индукция увеличивается относительно медленно и почти пропорционально напряженности поля; 2) прямолинейный участок ab , на котором магнитная индукция B растет также почти пропорционально напряженности поля, но значительно быстрее, чем на начальном участке; 3) участок bc — колено кривой намагничивания, который характеризует замедление роста индукции B ; 4) участок магнитного насыщения — участок, расположенный выше точки c , здесь

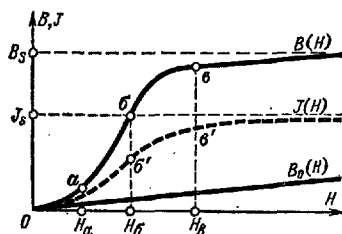


Рис. 5-2. Кривая начального намагничивания.

намагничивания (рис. 5-2). Кривую $B(H)$ можно разделить на четыре участка: 1) почти линейный участок oa , соответствующий малым напряженностям поля, показывает, что магнитная индукция увеличивается относительно медленно и почти пропорционально напряженности поля; 2) прямолинейный участок ab , на котором магнитная индукция B растет также почти пропорционально напряженности поля, но значительно быстрее, чем на начальном участке; 3) участок bc — колено кривой намагничивания, который характеризует замедление роста индукции B ; 4) участок магнитного насыщения — участок, расположенный выше точки c , здесь

зависимость снова линейная, но рост индукции B очень сильно замедлен по сравнению со вторым участком. Магнитная индукция, которая соответствует намагниченности насыщения, называется индукцией насыщения B_s .

Таким образом, зависимость магнитной индукции от напряженности поля достаточно сложная и не может быть выражена простой расчетной формулой. Поэтому при расчете магнитных цепей, содержащих ферромагнетики, применяют снятые экспериментально кривые намагничивания $B(H)$ для заданных магнитных материалов. Кривая намагничивания впервые была получена экспериментально в 1872 г. профессором Московского университета А. Г. Столетовым.

Абсолютная магнитная проницаемость $\mu_a = \mu \mu_0$ ферромагнетика определяется для произвольной точки A кривой намагничивания (рис. 5-3) через тангенс угла наклона секущей OA к оси абсцисс, т. е.

$$\mu_a \mu_0 = M_\mu \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_B}{M_H} \frac{B_A}{H_A}, \quad (5-4)$$

где M_B , M_H , M_μ — масштабы соответствующих величин.

Кривая магнитной проницаемости μ для ферромагнитного материала дана на том же рис. 5-3. Как видно из графика, магнитная проницаемость с ростом напряженности поля изменяется в весьма широких границах, что затрудняет ее применение для расчетов. На кривой $\mu(H)$ отмечают два характерных значения магнитной проницаемости: 1) начальное (рис. 5-3)

$$\mu_H = M_\mu \operatorname{tg} \alpha_H, \quad (5-5)$$

2) максимальное

$$\mu_{\max} = M_\mu \operatorname{tg} \alpha_{\max}. \quad (5-6)$$

Начальная магнитная проницаемость характеризует возможность использования ферромагнетика в слабых магнитных полях. Максимальная магнитная проницаемость определяет верхнюю границу использования материала. Так, например, для листовой электротехнической стали $\mu_H = 250 \div 1000$, а $\mu_{\max} = 5000 \div 30\,000$.

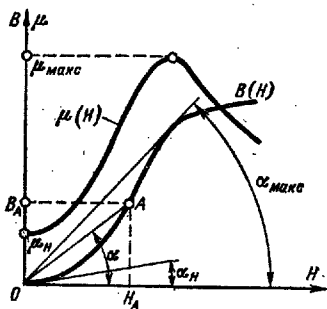


Рис. 5-3. Кривые намагничивания и магнитной проницаемости.

5-2

Циклическое перемagnичивание

Рассмотрим процесс перемagnичивания ферромагнетиков при работе их в цепях переменного тока.

Допустим, что кольцевой сердечник (см. рис. 4-18) не намагничен и тока в витках катушки нет, т. е. $B = 0$ и $H = 0$ (начало координат на рис. 5-4, а): При постепенном увеличении тока (намагничивающей силы), а следовательно, и напряженности поля от нуля до некоторого наибольшего значения $H_a = I_a w / l$ магнитная индукция увеличивается по кривой начального намагничивания ($0a$) и достигнет соответствующего максимального значения $B_a = +B_m$.

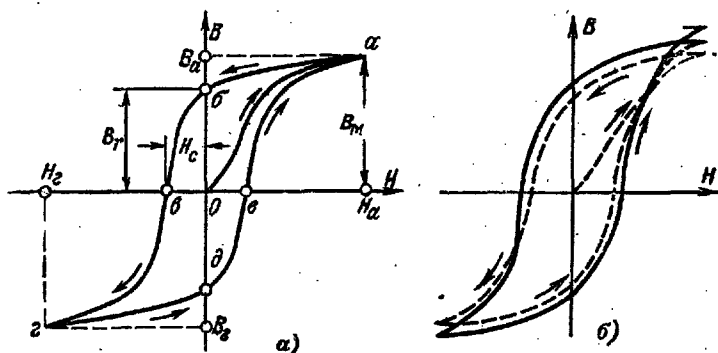


Рис. 5-4. Гистерезисный цикл.

а — установившийся; б — неустойчивый.

Если затем сила тока и напряженность поля уменьшаются, то и магнитная индукция уменьшается, но при соответствующих значениях напряженности магнитная индукция несколько больше, чем при увеличении напряженности. Кривая изменения магнитной индукции (участок ab на рис. 5-4, а) располагается выше кривой начального намагничивания. При нулевых значениях силы тока и напряженности поля магнитная индукция имеет некоторое значение B_r , называемое остаточной индукцией (отрезок $0b$ на рис. 5-4, а).

Таким образом, величина магнитной индукции зависит не только от напряженности поля, но и от предшествующего состояния ферромагнетика. Это явление называется магнитным гистерезисом. Оно обусловлено как бы

внутренним трением, возникающим при изменении ориентации магнитных моментов доменов.

При изменении направления намагничивающего тока, а следовательно, и направления напряженности поля и постепенном увеличении тока обратного направления напряженность поля достигает значения H_c , называемого коэрцитивной силой (отрезок Oa), при котором магнитная индукция $B = 0$. При дальнейшем увеличении тока и напряженности поля сердечник намагничивается в противоположном направлении и при напряженности поля $H_z = H_a$ магнитная индукция достигнет величины $B_z = -B_a$. Затем при уменьшении тока и напряженности

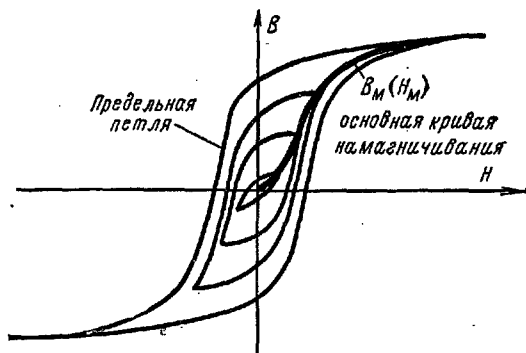


Рис. 5-5. Предельная петля и основная кривая намагничивания.

поля до нуля магнитная индукция B_a становится равной $-B_b$. Наконец, при следующем изменении направления тока и напряженности поля и увеличении ее до прежней величины H_a магнитная индукция увеличится до прежнего значения B_a . Рассмотренный цикл перемагничивания ферромагнетика по кривой $abcbda$ называется гистерезисным циклом (петлей гистерезиса).

Если несколько раз повторить рассмотренный цикл, изменяя напряженность поля от H_a до $H_z = -H_a$ и обратно, то петля гистерезиса будет несколько смещаться (рис. 5-4, б) и только после нескольких циклов получим установившийся гистерезисный цикл. Таким образом, на рис. 5-4, а дана установившаяся симметричная петля гистерезиса. Наибольшая петля, которая может быть получена для данного ферромагнетика, называется предельной (рис. 5-5).

Если для данного ферромагнетика получить несколько симметричных петель гистерезиса с различными B_m (рис. 5-5) и соединить вершины петель, то получим кривую, называемую основной кривой намагничивания, близкую к кривой начального намагничивания.

Циклическое перемагничивание можно применить для размагничивания ферромагнитного сердечника, т. е. для уменьшения остаточной индукции намагниченного сердечника до нулевого значения. С этой целью сердечник подвергают воздействию переменного по направлению и постепенно уменьшающегося по величине магнитного поля.

Перемагничивание ферромагнитного сердечника связано с затратой энергии, которая, превращаясь в тепло, вызывает нагрев сердечника. Площадь петли гистерезиса пропорциональна энергии, затраченной при одном цикле перемагничивания. Энергия, затраченная на процесс перемагничивания, называется потерей от гистерезиса. Мощность потерь на циклическое перемагничивание, выражаемая обычно в ваттах на килограмм, зависит от материала, максимальной магнитной индукции и числа циклов перемагничивания в секунду или, что то же, частоты перемагничивания.

5-3

Ферромагнитные материалы

Ферромагнитные материалы делятся на две группы: магнитно-мягкие и магнитно-твердые.

Магнитно-мягкие материалы применяются в качестве магнитопроводов (сердечников) в устройствах и приборах, где магнитный поток постоянен (полюсные башмаки и сердечники измерительного механизма по рис. 4-32) или переменный (например, сердечник трансформатора). Они обладают низким значением коэрцитивной силы H_c (ниже 400 А/м), высокой магнитной проницаемостью и малыми потерями от гистерезиса. К этой группе материалов относятся: техническое железо и низкоуглеродистые стали, листовые электротехнические стали, железо-никелевые сплавы с высокой проницаемостью (пермаллой) и оксидные ферромагнетики — ферриты и оксиферы.

Техническое железо с содержанием углерода до 0,04%, углеродистые стали и чугун широко применяются для магнитопроводов, работающих в условиях постоянных магнитных полей. Техническое железо обладает высокой индукцией

насыщения (до 2,2 Т), высокой магнитной проницаемостью и низкой коэрцитивной силой.

Электротехнические стали — это сплавы железа с кремнием (1—4%). Путем изменения содержания кремния и применением различных технологических приемов получают стали с широким диапазоном магнитных свойств. Кремний улучшает свойства технического железа: увеличиваются начальная и максимальная магнитные проницаемости, уменьшается коэрцитивная сила, уменьшаются потери энергии от гистерезиса, увеличивается удельное электрическое сопротивление, что важно для уменьшения так называемых вихревых токов, возникающих в сердечнике при циклически изменяющемся магнитном поле и нагревающих сердечник.

Стали с низким содержанием кремния имеют низкую магнитную проницаемость, большую индукцию насыщения и большие удельные потери, они применяются в установках и приборах цепей постоянного тока или переменного тока низкой частоты. Стали с высоким содержанием кремния применяются в тех случаях, когда нужно иметь высокую магнитную проницаемость в слабых и средних полях и малые потери от гистерезиса и вихревых токов, вследствие чего они могут применяться для сердечников, работающих при повышенной частоте тока и магнитного поля.

Согласно ГОСТ 802-58 электротехнические стали обозначаются буквой Э и цифрами. Первая цифра обозначает процент содержания кремния, вторая характеризует магнитные свойства: 1, 2, 3 и буква А соответственно обозначают нормальные, пониженные, низкие и особо низкие потери при частоте 50 Гц; 4 — обозначает, что сталь предназначена для работы при частоте 400 Гц; 5—6 — соответственно нормальная и повышенная проницаемость в полях 0,2—0,8 А/м; 7—8 — соответственно нормальная и повышенная проницаемость в полях 3—1000 А/м; третья цифра 0 указывает на то, что сталь холоднокатаная, текстурованная, два нуля обозначают малотекстурованную сталь.

Основные кривые намагничивания некоторых ферромагнитных материалов даны на рис. 5-6.

Пермаллои — это сплавы различного процентного содержания железа и никеля, а некоторые из них, кроме того, молибдена, хрома, кремния, алюминия. Пермаллои имеют высокую магнитную проницаемость, в 10—50 раз большую, чем у листовой электротехнической стали. В этих сплавах индукция насыщения достигается при малых напря-

женностях поля (от десятых долей до нескольких сотен ампер на метр). Одни из них имеют низкую индукцию насыщения B_s (около 0,6—0,8 Т), другие — относительно высокую (1,3—1,6 Т). К первой группе относятся высоконикелевые пермаллои, например 79НМ, содержащий 79% никеля и 3,8% молибдена, у которого $\mu_n = 22\,000$; $\mu_{\max} = 120\,000$; $B_s = 0,75$ Т. Ко второй группе относятся низконикелевые пермаллои, например 45Н, содержащий 45% никеля, у которого $\mu_n = 2500$; $\mu_{\max} = 23\,000$; $B_s = 1,5$ Т.

Буква П обозначает материал с прямоугольной петлей гистерезиса (рис. 5-7). Степень прямоугольности петли характеризуется отношением остаточной индукции B_r к максимальной индукции B_m , под которой понимают индукцию при напряжен-

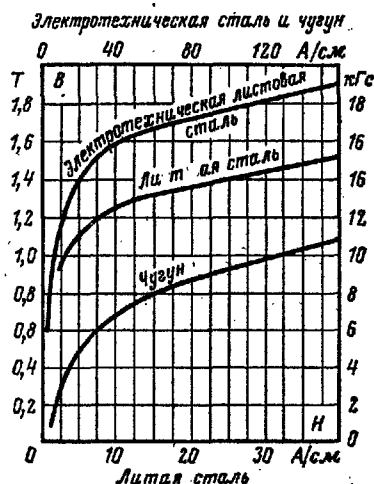


Рис. 5-6. Кривые намагничивания некоторых ферромагнитных материалов.

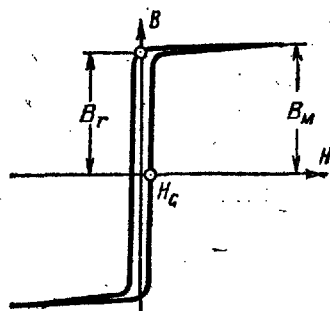


Рис. 5-7. Прямоугольная петля гистерезиса.

ности поля, в 5—10 раз превышающую коэрцитивную силу. Это отношение достигает 0,85—0,99. Коэрцитивная сила таких пермаллоев лежит в пределах от 1 до 30 А/м.

Магнитные свойства пермаллоев в сильной степени зависят от технологии их изготовления.

Ферриты называют ферромагнитные материалы, получаемые из смеси окислов железа, цинка и других элементов. При изготовлении сердечников смесь размалывают, прессуют, и отжигают при температуре около 1200°C ; таким образом получают сердечники нужной формы. Ферриты обладают очень большим удельным сопротивлением, вследствие чего потери на вихревые токи чрезвычайно малы

и их можно применять при высокой частоте. Никель-цинковые ферриты, получаемые путем термического разложения солей, называют оксиферами или оксидными ферромагнетиками. Ферриты и оксиферы обладают значительной начальной магнитной проницаемостью, незначительной индукцией насыщения (0,18—0,32 Т) и малой коэрцитивной силой (8—80 А/м).

Магнитодиэлектрики — это материалы, получаемые из смеси мелкозернистого ферромагнитного порошка с диэлектриком (поливинилхлорид, полиэтилен). Смесь формуют, прессуют и запекают; в результате мельчайшие частицы ферромагнетика оказываются разделенными электроизолирующей пленкой из немагнитного материала.

Ферриты и магнитодиэлектрики широко применяются в качестве сердечников в аппаратуре проводной и радиосвязи, в магнитных усилителях, вычислительных машинах и в других областях техники.

Магнитно-твердые материалы предназначены для изготовления постоянных магнитов самого различного назначения. Эти материалы характеризуются большой коэрцитивной силой и большой остаточной индукцией.

К магнитно-твердым материалам относятся: углеродистые, вольфрамовые, хромистые и кобальтовые стали; их коэрцитивная сила 5000—8000 А/м, остаточная индукция

Таблица 5-1

Материал	Состав, % (остальное железо)						H_c , А/м	B_r , Т
	Вольфрам	Алюминий	Хром	Кобальт	Никель	Медь		
Вольфрамовая сталь	6	—	—	—	—	—	4 800	1
Хромистая сталь	—	—	3	—	—	—	4 800	0,9
Кобальтовая сталь	—	—	5	5	—	—	7 200	0,9
Альни	—	14	—	—	25	5	44 000	0,44
Альнис	—	14	—	—	34	—	64 000	0,4
Альнико	—	10	—	12	17	6	40 000	0,7
Магнико	—	8	—	24	13	3	44 000	1,25
Металлокерамические из сплава типа аль- нико	—	—	—	—	—	—	45 000	1,1
Бариевые ферриты	—	—	—	—	—	—	130 000	0,35

0,8—1 Т. Они обладают ковкостью, поддаются прокатке, механической обработке и выпускаются промышленностью в виде полос или листов.

К магнитно-твердым материалам, обладающим лучшими магнитными свойствами, относятся сплавы: альни, альниси, альнико и др. Они характеризуются коэрцитивной силой $H_c = 20\,000 \div 60\,000$ А/м и остаточной индукцией $B_r = 0,4 \div 0,7$ Т (табл. 5-1).

Магниты из указанных сплавов изготавливаются отливкой и поддаются обработке только шлифованием. Металлокерамические магниты изготавливают путем спекания порошков из сплавов альни и альнико; основным их достоинством является возможность получения магнитов очень малых размеров. Из магнитно-твердых ферритов получили применение оксидные магниты на основе феррита бария — бариевые магниты. К преимуществам этих магнитов относятся невысокая стоимость и высокое удельное сопротивление, что позволяет применять их в установках высокой частоты.

5-4

Магнитное поле на границе двух сред

Так как линии магнитной индукции непрерывны, то магнитный поток при переходе из одной среды в другую сохраняет свою величину. Однако значения магнитной индукции в двух средах с разными значениями магнитной проницаемости неодинаковы.

Допустим, что через небольшой плоский участок поверхности раздела площадью S двух изотропных сред с известными магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 проходит магнитный поток Φ (рис. 5-8); B_1 — вектор магнитной индукции у границы раздела сред в первой среде, B_2 — во второй. Вследствие непрерывности магнитного потока произведение нормальной составляющей вектора магнитной индукции в первой среде B_{n1} (проекция на нормаль n к поверхности раздела) и площади S (4-8а) должно быть равно такому же произведению для второй среды, т. е.

$$B_{n1}S = B_{n2}S,$$

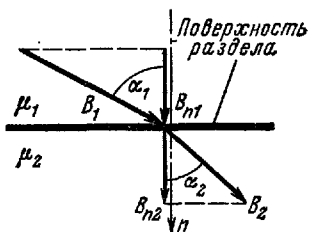


Рис. 5-8. Изменение индукции магнитного поля на границе раздела двух сред.

откуда, сократив общий множитель S , получим:

$$B_{n1} = B_1 \cos \alpha_1 = B_{n2} = B_2 \cos \alpha_2, \quad (5-7)$$

или

$$\mu_1 H_1 \cos \alpha_1 = \mu_2 H_2 \cos \alpha_2. \quad (5-7a)$$

Как известно (§ 4-4), вектор напряженности магнитного поля в изотропной среде совпадает по направлению с вектором магнитной индукции. Поэтому H_1 — вектор напряженности магнитного поля в первой среде параллелен B_1 ; аналогично H_2 — параллелен B_2 (рис. 5-9).

Составляющая H_t вектора напряженности поля H , касательная к плоскому участку поверхности раздела (тангенциальная составляющая),

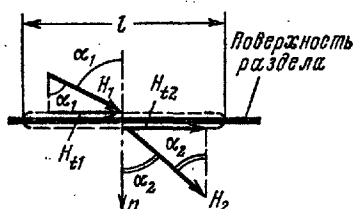


Рис. 5-9. Изменение напряженности магнитного поля на границе раздела двух сред.

имеет по обе стороны одинаковые значения: $H_{t1} = H_{t2}$. Действительно, проведем на поверхности раздела замкнутый контур длиной $2l$, так чтобы одна его сторона лежала в первой среде, а другая — во второй (на рис. 5-9 показан пунктиром). Пусть поперечные размеры контура столь малы, что их можно не

учитывать. Обойдем контур, например, по направлению движения часовой стрелки, тогда по закону полного тока (4-3) можем записать $H_{t1}l - H_{t2}l = \Sigma I$; площадь, охваченную контуром, вследствие малых поперечных размеров можно считать равной нулю; поэтому и ток, пронизывающий контур, равен нулю ($\Sigma I = 0$) и

$$H_{t1} = H_{t2}, \quad (5-8)$$

или

$$H_1 \sin \alpha_1 = H_2 \sin \alpha_2. \quad (5-8a)$$

Выражения (5-7) и (5-8) называют граничными условиями для магнитного поля.

Разделив почленно уравнение (5-8a) на (5-7a), получим:

$$\frac{H_1 \sin \alpha_1}{\mu_1 H_1 \cos \alpha_1} = \frac{H_2 \sin \alpha_2}{\mu_2 H_2 \cos \alpha_2},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha_1 / \operatorname{tg} \alpha_2 = \mu_1 / \mu_2, \quad (5-9)$$

т. е. отношения тангенсов углов, образованных векторами магнитной индукции в двух средах и нормалью n к поверхности их раздела (рис. 5-8), равно отношению магнитных проницаемостей этих сред. Так как вектор магнитной индукции направлен в каждой точке магнитной линии по касательной к ней, то уравнение (5-9) можно рассматривать как закон преломления магнитных линий на границе раздела сред.

Из уравнения (5-9) следует, что $\operatorname{tg} \alpha_2 = \mu_2 \operatorname{tg} \alpha_1 / \mu_1$. Если $\mu_1 \gg \mu_2$, то $\operatorname{tg} \alpha_2 \approx 0$ и $\alpha_2 \approx 0$. Таким образом, если линии магнитной индукции из ферромагнитного материала (μ_1) переходят в неферромагнитную среду (μ_2), то в этой второй среде у поверхности раздела они будут направлены практически перпендикулярно к поверхности раздела.

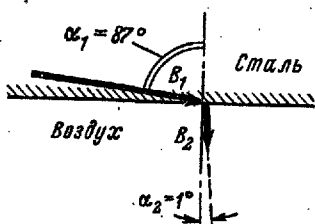


Рис. 5-10. К примеру 5-1.

Пример 5-1. При заданной напряженности поля магнитная проницаемость стали $\mu = 1100$. Вектор магнитной индукции в стали составляет с нормалью к поверхности раздела двух сред угол $\alpha_1 = 87^\circ$ (рис. 5-10). Определить угол, образуемый вектором магнитной индукции в воздухе с нормалью к поверхности раздела.

Решение.

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{1100} \operatorname{tg} 87^\circ = \frac{19,1'}{1100} = 0,0175.$$

По тригонометрическим таблицам находим $\alpha_2 \approx 1^\circ$, т. е. во второй среде вектор магнитной индукции практически перпендикулярен границе раздела.

5-5 Магнитные цепи

Магнитной цепью называется устройство, отдельные участки которого выполнены из ферромагнитных материалов, по которым замыкается магнитный поток. Примерами простейших цепей могут служить сердечник кольцевой катушки (рис. 4-18) и сердечник электромагнита, изображенный на рис. 5-11, а. Электрические машины и трансформаторы, электромагнитные аппараты и приборы имеют обычно магнитные цепи более сложной формы. Если магнитная цепь выполнена из одного и того же мате-

риала и имеет по всей длине одинаковое сечение, то цепь называется однородной. Если же отдельные участки цепи изготовлены из различных ферромагнитных материалов и имеют разные длины и сечения, то цепь — неоднородна. Магнитные цепи, так же как и электрические, бывают разветвленные (рис. 5-11, б) и неразветвленные (рис. 5-11, а). Последние можно рассматривать как одну трубку магнитной индукции, магнитный поток Φ которой во всех сечениях имеет одно и то же значение.

Разветвленные цепи могут быть симметричными и несимметричными. Цепь, представленная на рис. 5-11, б, считается симметричной, если правая и левая части ее имеют

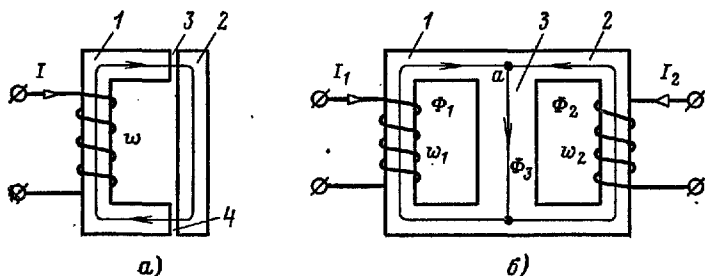


Рис. 5-11. Магнитные цепи.

а — неразветвленная; б — разветвленная.

одинаковые размеры, выполнены из одного и того же материала и если н. с. $I_1 w_1$ и $I_2 w_2$ одинаковы. При невыполнении хотя бы одного из указанных условий цепь будет несимметричной.

Разобьем неразветвленную магнитную цепь на ряд однородных участков, каждый из которых выполнен из определенного материала и имеет одинаковое поперечное сечение S вдоль всей своей длины. Длину каждого участка l будем считать равной длине средней магнитной линии в пределах этого участка. Из сказанного выше следует, что магнитные потоки всех участков неразветвленной цепи равны, т. е. $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \dots = \Phi_n$ и поле на каждом участке можно считать однородным, т. е. $\Phi = BS$; поэтому $B_1 S_1 = B_2 S_2 = \dots = B_n S_n$, где n — число участков цепи. Магнитное напряжение (4-2 а) на любом из участков магнитной цепи

$$U_m = Hl = \frac{B}{\mu\mu_0} l = \frac{\Phi}{S} \frac{l}{\mu\mu_0}.$$

По аналогии с электрической цепью величину

$$R_m = \frac{l}{S\mu\mu_0}$$

называют магнитным сопротивлением участка магнитной цепи. Например, неразветвленная магнитная цепь на рис. 5-11, а состоит из четырех участков, причем два из них — воздушные зазоры. При заданном направлении тока в обмотке направление потока и н. с. $I\omega$ определяется по правилу буравчика.

В системе СИ единица измерения магнитного сопротивления $1/\Gamma$, так как

$$[R_m] = \left[\frac{l}{S\mu\mu_0} \right] = \frac{м}{м^2 \cdot \Gamma/м} = \frac{1}{\Gamma}.$$

Таким образом, магнитное напряжение

$$U_m = \Phi R_m. \quad (5-10)$$

Выражение (5-10) по аналогии с электрической цепью часто называют законом Ома для магнитной цепи. Однако вследствие нелинейности цепи, вызванной непостоянством магнитной проницаемости μ ферромагнетиков, оно практически не применяется для расчета магнитных цепей.

При расчетах разветвленных магнитных цепей пользуются двумя законами Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа непосредственно вытекает из непрерывности магнитного потока и магнитных линий: алгебраическая сумма магнитных потоков в точке разветвления равна нулю:

$$\Sigma \Phi = 0. \quad (5-11)$$

Например, для узла а на рис. 5-11, б: $\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0$.

Второй закон Кирхгофа для магнитной цепи основывается на законе полного тока: алгебраическая сумма магнитных напряжений на отдельных участках цепи равна алгебраической сумме н. с.

$$\Sigma U_m = \Sigma F = \Sigma I\omega. \quad (5-12)$$

Например, для левого контура на рис. 5-11, б: $U_{m1} + U_{m3} = I_1\omega_1$.

Как следует из закона Ома для получения наибольшего магнитного потока при наименьшей н. с. у магнитной цепи должно быть возможно меньшее магнитное сопротивление. Большая магнитная проницаемость ферромагнитных материалов обеспечивает получение малых магнитных сопро-

тивлений магнитопроводов, выполненных из этих материалов. Поэтому магнитные цепи электрических машин выполняют преимущественно из ферромагнетиков, а участки цепей из неферромагнитных материалов, т. е. неизбежные или необходимые воздушные зазоры делают, как правило, возможно малыми.

Схема устройства магнитной цепи двухполюсной машины с явно выраженными полюсами показана на рис. 5-12. Плоскость OO' , проведенная через середины полюсов N и S и ось машины, делит магнитную цепь на две симметричные части. Каждую из них можно рассматривать как магнитную трубку с потоком $\Phi/2$, кото-

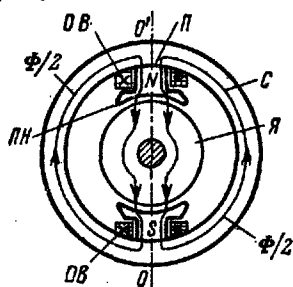


Рис. 5-12. Магнитная цепь электрической машины с явно выраженными полюсами.

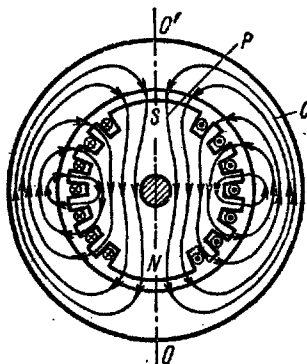


Рис. 5-13. Магнитная цепь электрической машины с неявно выраженными полюсами.

рый замыкается через полюсы P , полюсные наконечники PN , воздушные зазоры, якорь $Я$ и станину машины C . Намагничивающая сила создается током, проходящим по обмотке возбуждения OB , расположенной на полюсах N и S . Из северного полюса N магнитные линии выходят и в южный полюс S входят.

Схема устройства магнитной цепи двухполюсной машины с неявно выраженными полюсами показана на рис. 5-13. Здесь обмотка возбуждения заложена в пазы ротора P — вращающейся части машины, укрепленной на валу. Как и в предыдущем случае, плоскость OO' , проведенная через середины полюсов N и S , делит магнитную цепь машины на две симметричные части, каждую из которых можно рассматривать как магнитную трубку с потоком $\Phi/2$. Магнитный поток замыкается через ротор машины, воздушные зазоры и станину машины C , представляющую собой неподвижный наружный стальной цилиндр — статор машины.

Неразветвленная цепь. Обычно расчет неразветвленной магнитной цепи (рис. 5-11, а) состоит в определении н. с., необходимой для получения заданного магнитного потока в цепи, размеры отдельных участков которой и материалы их известны.

Расчет производится в следующем порядке: 1) проводят среднюю магнитную линию (показана на рис. 5-11, а); 2) разбивают магнитную цепь на однородные участки с неизменными сечениями и определяют сечения участков S и длины их l по средней магнитной линии; 3) по величине заданного магнитного потока Φ и известным сечениям S отдельных участков находят магнитную индукцию на каждом из участков по формуле

$$B = \Phi/S;$$

4) по кривым намагничивания для каждого ферромагнитного участка определяют напряженность магнитного поля H . Напряженность поля в воздушном зазоре или неферромагнитном участке

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{B_0}{125 \cdot 10^{-8}} = 0,8 \cdot 10^6 B_0, \quad (5-13)$$

где H_0 выражено в амперах на метр, а B_0 — в теслах, или

$$H_0 = 0,8 B_0, \quad (5-13a)$$

если H_0 выражено в амперах на сантиметр, а B_0 — в гауссах;

5) по второму закону Кирхгофа сумма магнитных напряжений на отдельных участках равна искомой н. с., т. е.

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_0 l_0 + \dots = I w.$$

Определив н. с. $I w$ и задавшись числом витков катушки, легко определить ток в ней:

$$I = I w / w.$$

Рассмотренный расчет сделан в предположении, что магнитный поток на всех участках магнитной цепи одинаков. В действительности незначительная часть магнитного потока, называемая потоком рассеяния, замыкается вокруг катушки с током, частично проходя по воздуху и частично по той части магнитопровода, которая непосредственно прилегает к виткам катушки.

Пример 5-2. Определить н. с. катушки, расположенной на магнитопроводе, который выполнен из листовой электротехнической стали (рис. 5-14), с тем чтобы получить на первом участке магнитную индукцию $B_1 = 1,6$ Т. Размеры сердечника в миллиметрах указаны на рис. 5-14. Стыки имеют воздушный зазор по 0,1 мм.

Таблица 5-2

№ участка	Материал	l , см	S , см ²	B , Т	H , А/см	$U_m = Hl$, А
1	Электротехническая сталь	26	30	1,6	40	1040
2	То же	65	36	1,33	17	1105
3	Воздушный зазор a	0,01	30	1,6	12 800	128
4	Воздушный зазор b	0,01	36	1,33	10 640	106

Решение. Проведем среднюю магнитную линию и по данным на рис. 5-14 размерам определим длину средней линии для каждого участка (l_1 , l_2 , l_3 и l_4) магнитной цепи (табл. 5-2). Пренебрегая рассеянием, получим на всех участках одинаковый магнитный поток, т. е. $B_1 S_1 = B_2 S_2 = B_3 S_3 = B_4 S_4$, откуда

$$B_2 = B_1 S_1 / S_2 = 1,6 \cdot 30 / 36 = 1,33 \text{ Т.}$$

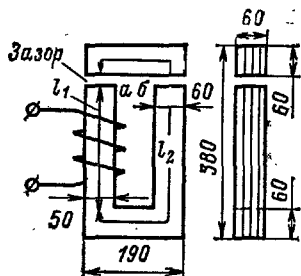
Искомая н. с.

$$Iw = \Sigma (Hl) \approx 2380 \text{ А.}$$

Задавшись числом витков обмотки, например 238, получим необходимый ток в обмотке:

$$I = Iw / w = 2380 / 238 = 10 \text{ А.}$$

Рис. 5-14. Магнитная цепь к примеру 5-2.



Обратная задача заключается в том, чтобы для заданной н. с. определить магнитный поток и магнитную индукцию неразветвленной цепи, размеры и материалы которой известны.

При решении этой задачи заданную неразветвленную цепь (рис. 5-11, а) рассматривают состоящей из двух частей: ферромагнитного сердечника с нелинейной зависимостью между Φ и U_m и суммарного воздушного зазора с линейной зависимостью между Φ и U_{0m} .

Пользуясь кривыми намагничивания (рис. 5-6), строят для нелинейной части цепи магнитную характеристику $\Phi(U_m)$. Для этого определяют по заданным размерам магнитной цепи длину средней магнитной линии в сердечнике l

и поперечное сечение сердечника S . Далее выбирают несколько (4-5) произвольных значений H из имеющихся на кривой намагничивания (рис. 5-6) и умножают эти значения на длину l , находя таким образом величины $U_m = Hl$; соответствующие значения индукции B , взятые на той же кривой намагничивания, умножают на сечение магнитопровода S , находя значения потока $\Phi = BS$, по полученным данным строят магнитную характеристику $\Phi(U_m)$, как показано на рис. 5-15.

По второму закону Кирхгофа

$$U_m + U_{0m} = I\omega,$$

где $U_{0m} = \Phi R_{0m} = \frac{\Phi l_0}{\mu_0 S}$ — магнитное напряжение на линейном участке магнитной цепи (воздушных зазорах).

Из написанного уравнения получим:

$$U_m = I\omega - \Phi R_{0m}. \quad (5-14)$$

Уравнение (5-14) линейное, графически изображается прямой линией, которую можно построить по двум точкам. Полагая $\Phi = 0$, найдем $U_m = I\omega$. Отложив по оси абсцисс заданное значение $I\omega$, получим одну точку (А) прямой (рис. 5-15). Полагая $U_m = 0$, находим магнитный поток

$$\Phi_0 = \frac{I\omega}{R_{0m}}.$$

Отложив по оси ординат найденное значение Φ_0 , получим вторую точку (Б) прямой. Прямая, проведенная через найденные точки, представляющая график уравнения (5-14), пересекает магнитную характеристику в точке Г (рис. 5-15), ордината которой и определяет искомый магнитный поток Φ . Соответствующая найденному значению магнитного потока индукция $B = \Phi/S$.

Если сердечник неразветвленной магнитной цепи состоит из нескольких участков с различными сечениями или выполненными из различных материалов, то магнитное напряжение U_m надо искать как сумму магнитных напряжений на отдельных участках.

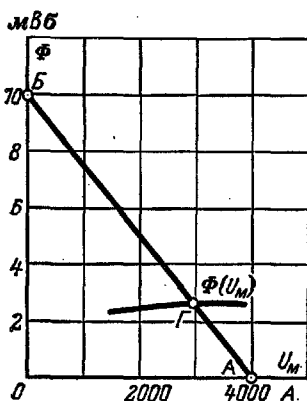


Рис. 5-15. Магнитная цепь к примеру 5-3.

Пример 5-3. На сердечник, состоящий из четырех пакетов листовой электротехнической стали (рис. 5-16), наложена обмотка с числом витков $w = 2000$. На стыках пакетов имеются воздушные зазоры по 0,2 мм. Определить магнитную индукцию в стальном сердечнике при токе в обмотке $I = 2$ А.

Решение. По размерам, данным на рис. 5-16, найдем длину средней магнитной линии в стали $l = 48$ см и сечение стали $S = 16$ см². Для произвольно выбранных значений напряженности поля $H = 30, 40, 50, 60, 70$ и 80 А/см по кривой (рис. 5-6) найдем соответствующие значения магнитной индукции B (табл. 5-3). Умножив напряженности

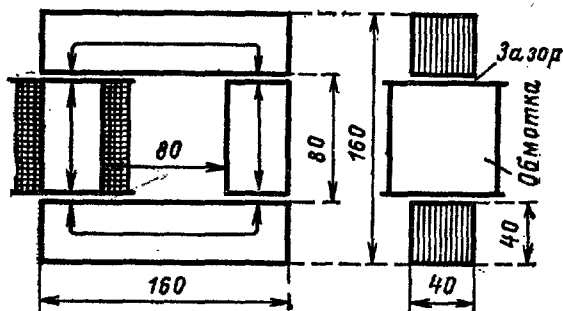


Рис. 5-16. К расчету неразветвленной магнитной цепи.

поля H на длину магнитной линии, получим соответствующие величины магнитного напряжения U_m (табл. 5-3). Умножив значение магнитной индукции на поперечное сечение стали, получим значения магнитного потока (табл. 5-3) и построим (рис. 5-15) магнитную характеристику $\Phi(U_m)$.

Таблица 5-3

H , А/см	30	40	50	60	70	80
B , Т	1,5	1,58	1,62	1,64	1,65	1,66
$U_m = Hl$, А	1440	1920	2400	2880	3360	3840
$\Phi = BS$, мВб	2,4	2,53	2,59	2,62	2,64	2,67

Подставив в уравнение (5-14) $\Phi = 0$, имеем:

$$U_m = Iw = 2 \cdot 2000 = 4000 \text{ А};$$

отложив это напряжение на оси абсцисс, получим точку А.

Подставив в уравнение (5-14) напряжение $U_m = 0$, найдем магнитный поток

$$\Phi_0 = \frac{I\omega}{R_{0m}} = \frac{I\omega}{l_0/(\mu_0 S)} = \frac{4000}{0,2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} / (4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 16 \cdot 10^{-4})} = 0,01 \text{ Вб} = 10 \text{ мВб}.$$

Отложив по оси ординат $\Phi_0 = 10$ мВб, найдем вторую точку B прямой AB . Ордината точки Γ пересечения магнитной характеристики и прямой AB определяет магнитный поток, равный 2,7 мВб, которому соответствует магнитная индукция

$$B = 2,7 \cdot 10^{-3} / 16 \cdot 10^{-4} \approx 1,7 \text{ Т}.$$

Разветвленная симметричная цепь. На рис. 5-17 показана разветвленная симметричная магнитная цепь. Магнитный поток Φ , проходящий через средний стержень, делится на две равные части $\Phi/2$, которые замыкаются через крайние стержни магнитопровода.

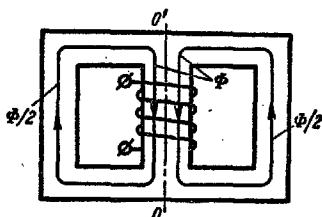


Рис. 5-17. Разветвленная симметричная магнитная цепь.

Для расчета такой цепи делят ее плоскостью OO' , проходящей через середину среднего стержня, на две части с одинаковыми магнитными сопротивлениями, а следовательно, и с одинаковыми магнитными токами $\Phi/2$. Намагничивающая сила определяется так же, как было показано выше для неразветвленной цепи.

Разветвленная несимметричная цепь. Расчет разветвленной несимметричной магнитной цепи при заданных н. с. рассмотрим на примере.

Пример 5-4. На сердечнике из листовой электротехнической стали, размеры которого даны на рис. 5-18, находятся две обмотки с числами витков $\omega_1 = 300$ и $\omega_2 = 75$, по которым проходят токи $I_1 = 15$ А и $I_2 = 20$ А заданного направления. Определить значения магнитных потоков и магнитной индукции в стержнях сердечника, если воздушный зазор $l_B = 5$ мм.

Решение. Так как магнитная цепь выполнена из ферромагнитного материала, то зависимость между магнитной индукцией и напряженностью поля в стержнях сердечника нелинейна; поэтому расчет цепи выполним графическим методом.

При расчете магнитной цепи сначала необходимо задаться положительными направлениями магнитных потоков и указать направление действующих н. с. Направление н. с. и направление тока в обмотке связаны между собой правилом буравчика. Из рис. 5-18 видно, что при заданных направлениях токов н. с. F_1 направлена вниз, а н. с. F_2 — вверх. На рис. 5-18 показаны также выбранные положительные направления потоков Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 .

Учитывая направления магнитных потоков, составим три уравнения. Из них одно по первому закону Кирхгофа (цепь с двумя узлами *A* и *B*) и два по второму.

Узловое уравнение для узла *B* по первому закону Кирхгофа

$$\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0. \quad (1)$$

Контурные уравнения по второму закону Кирхгофа по внешнему контуру (обход по часовой стрелке)

$$H_1 l_1 + H_3 l_3 = F_1 = I_1 w_1 \quad (2)$$

и по левому контуру (обход против часовой стрелки)

$$H_2 l_2 + H_B l_B - H_3 l_3 = F_2 = I_2 w_2, \quad (3)$$

где

$$H_3 l_3 = U_{BA} = U_m \quad (4)$$

— магнитное напряжение между узловыми точками.

Для расчета магнитной цепи необходимо для каждой из трех ее ветвей (участков) построить магнитную характеристику, т. е. график зависимости магнитного потока от магнитного напряжения $\Phi(U_m)$, предварительно определив по рис. 5-18 размеры: $l_1 = l_3 = 49$ см, $l_2 = 22,5$ см, $S_1 = S_2 = S_3 = 30$ см².

Для первого стержня, задавшись значениями магнитной индукции B_1 (например, 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4 и 1,6 Т), сначала найдем соответствующие им величины магнитного потока ($\Phi_1 = B_1 S$), а затем по кривой намагничивания (рис. 5-6) определим соответствующие этим индукциям значения напряженности поля H_1 (табл. 5-4).

Значения магнитного напряжения между концами первого стержня (точками *AB*) при этих значениях B_1 и H_1 найдем из уравнений (2) и (4):

$$U_{m1} = I_1 w_1 - H_1 l_1.$$

По полученным данным на рис. 5-19 построена магнитная характеристика $\Phi_1(U_{m1})$.

Для второго стержня аналогично задаемся значениями индукции B_2 , находим $\Phi_2 = B_2 S_2$, затем определяем по кривой намагничивания H_2 , по формуле (5-13) H_B и перемножением $H_2 l_2$ и $H_B l_B$. Значения магнитного напряжения между концами второго стержня при этих значениях H_2 и B_2 определяем из уравнений (3) и (4):

$$U_{m2} = H_2 l_2 + H_B l_B - I_2 w_2.$$

В табл. 5-4 значения B_2 отдельно не записаны, потому что для построения магнитной характеристики второго стержня выбраны такие же значения B_2 , как B_1 (0,4; 0,6; 0,8; ... Т). Так как $S_2 = S_1$ и второй

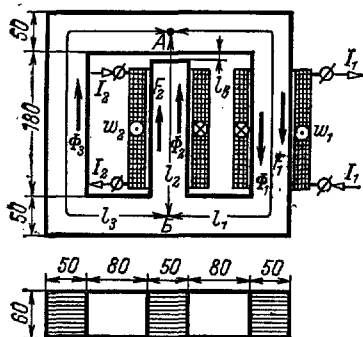


Рис. 5-18. Разветвленная несимметричная магнитная цепь.

Таблица 5-4

B_1 , Т	$\Phi_1 = B_1 S_1$, мВб	H_1 , А/см	H_{1L} , А	U_{M1} , А	H_{2L} , А	H_B , А/см	$H_{B'}$, А	$H_{2'3} + H_{B'}$, А	U_{M2} , А	U_{M3} , А
0,4	1,2	2	98	4402	45	3200	1600	1645	145	98
0,6	1,8	3	147	4353	67,5	4800	2400	2467,5	967	147
0,8	2,4	4,5	220	4279	101	6400	3200	3301	1801	220
1,0	3,0	6	294	4206	132	8000	4000	4135	2635	294
1,2	3,6	11	539	3961	247	9600	4800	1547	3547	539
1,4	4,2	21	1029	3471	472	11 200	5600	6072	4572	1029
1,6	4,8	40	1960	2540	900	1280	6040	6940	5440	1960

стержень выполнен из того же материала, что и первый, то при этих значениях B_2 получаются Φ_2 и H_2 такие же, как Φ_1 и H_1 , и их отдельно в табл. 5-4 можно не записывать. Магнитная характеристика Φ_2 (U_{M2}) построена на рис. 5-19.

Для третьего стержня аналогично задаемся значениями B_3 , находим Φ_3 и H_3 и по уравнению (4)

$$U_{M3} = H_3 l_3.$$

Значения U_{M3} даны в табл. 5-4, а на рис. 5-19 построена магнитная характеристика Φ_3 (U_{M3}).

Так как значения магнитных потоков должны удовлетворять первому закону Кирхгофа (1) $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$, то строим еще одну вспомогательную зависимость $\Phi_2 + \Phi_3 = \Phi_{2-3}$ (U_M) (рис. 5-19). Ординаты этой зависимости находим суммированием соответствующих ординат кривых Φ_2 (U_{M2}) и Φ_3 (U_{M3}).

Точка пересечения a кривых Φ_{2-3} (U_M) и Φ_1 (U_{M1}) определяет величину U_M , так как магнитное напряжение на зажимах каждой ветви должно быть одно и то же: $U_{M1} = U_{M2} = U_{M3} = U_{BA}$. Соответствующие этому магнитному напряжению магнитные потоки Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 определяются ординатами ga и gb , а именно $\Phi_1 = 5,4$ мВб, $\Phi_2 = 1,7$ мВб и $\Phi_3 = 3,7$ мВб. Напомним, что 1 мВб = 100 кМкс.

Найденные значения магнитных потоков, конечно, удовлетворяют закону Кирхгофа: $5,4 = 1,7 + 3,7$.

Разделив эти значения магнитных потоков на сечения стержней S , получим искомые значения магнитных индукций

$$B_1 = 18,0 \text{ Т}; B_2 \approx 5,7 \text{ Т}; B_3 \approx 1,23 \text{ Т}.$$

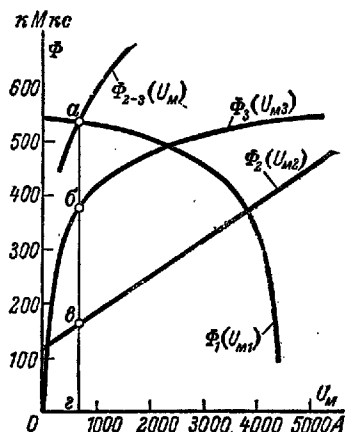


Рис. 5-19. Графики к примеру 5-4.

Постоянные магниты

Постоянные магниты широко применяются в ряде областей электротехники, в частности в устройствах автоматики, телемеханики, связи, измерительной техники и т. д.

Постоянные магниты изготовляют из магнитно-твердых ферромагнитных материалов, обладающих высокой остаточной индукцией и большой коэрцитивной силой. Свойства постоянного магнита характеризуются участком петли гистерезиса при $B > 0$ и $H < 0$, который называют кривой размагничивания гистерезисного цикла (рис. 5-20).

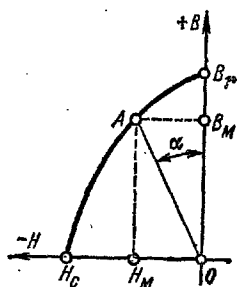


Рис. 5-20. Кривая размагничивания гистерезисного цикла.

Качество материала для изготовления магнитов в известной степени определяется произведением остаточной индукции B_r и коэрцитивной силы H_c . Чем больше это произведение, тем лучше материал для магнитов.

Кривая размагничивания (рис. 5-20) получается при размагничивании предварительно намагниченного до состояния насыщения замкнутого сердечника из ферромагнитного материала, но обычно магнитная цепь

постоянного магнита не замкнута. Она состоит собственно из магнита NS , присоединенной к его концам арматуры из магнитно-мягкой стали и воздушных зазоров (рис. 5-21).

Воздушный зазор в магнитной цепи постоянного магнита вызывает уменьшение остаточной магнитной индукции по сравнению с той, которая получилась бы при замкнутой магнитной цепи. Если, например, подковообразный сердечник, замкнутый якорем из магнитно-мягкой стали (рис. 5-22, а), намагнитить, то после отключения тока I будет получена остаточная индукция B_r , а при удалении якоря на расстояние l_0 (рис. 5-22, б) индукция уменьшится до некоторого значения B_m (рис. 5-20).

Уменьшение индукции можно объяснить следующим образом. Проведя среднюю магнитную линию через магнит, воздушный зазор и якорь (рис. 5-22, б) и обозначив напряженности поля на участках цепи соответственно H_m , H_0 и H_a , запишем по второму закону Кирхгофа уравнение для

замкнутого контура (намагничивающая обмотка снята и н. с. равна нулю):

$$H_m l_m + 2H_0 l_0 + H_{я} l_{я} = 0. \quad (5-15)$$

Пренебрегая практически малой величиной магнитного напряжения якоря $H_{я} l_{я}$ по сравнению с $2H_0 l_0$ (вследствие

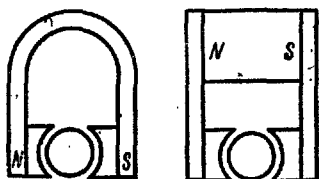


Рис. 5-21. Армированные постоянные магниты.

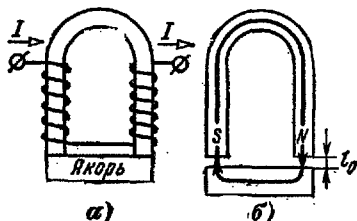


Рис. 5-22. Подковообразный электромагнит (а), магнит (б).

большой магнитной проницаемости материала якоря), уравнение (5-15) переписываем в виде

$$H_m l_m + 2H_0 l_0 = 0,$$

откуда

$$H_m = -H_0 2l_0 / l_m. \quad (5-16)$$

Вектор магнитной индукции в зазоре $B_0 = \mu_0 H_0$ совпадает по направлению с вектором напряженности поля. Так как магнитные линии непрерывны, то направления векторов магнитной индукции в сердечнике и в зазоре у границ их раздела одинаковы (рис. 5-23). Направления векторов напряженности поля в сердечнике и зазоре противоположны, что непосредственно следует из выражения (5-16). Поэтому введение воздушного зазора в магнитную цепь эквивалентно размагничивающему действию некоторого воображаемого тока, направленного обратно току I в обмотке при намагничивании без воздушного зазора (рис. 5-22, а).

Таким образом, воздушный зазор оказывает размагничивающее действие.

Тангенс угла α (рис. 5-20), образованного осью ординат и прямой, соединяющей начало координат с точкой

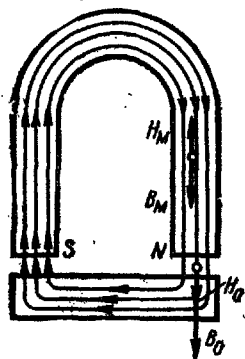


Рис. 5-23. Индукция и напряженность поля постоянного магнита.

петли A , координаты которой H_m и B_m , определяет коэффициент размагничивания

$$N = \frac{|H_m|}{B_m} = \operatorname{tg} \alpha \frac{M_H}{M_B}, \quad (5-17)$$

где M_H и M_B — масштабы.

Зная коэффициент размагничивания N , по кривой размагничивания материала магнита можно найти магнитную индукцию B_m в магните, т. е. точку A .

Для определения N магнита по рис. 5-22, считая индукции в зазоре B_0 и в сердечнике B_m одинаковыми (зазор мал), перепишем уравнение (5-16) в виде

$$|H_m| = H_0 \frac{2l_0}{l_m} = \frac{B_m}{\mu_0} \frac{2l_0}{l_m},$$

откуда

$$N = \frac{|H_m|}{B_m} = \frac{1}{\mu_0} \frac{2l_0}{l_m} = \frac{1 \cdot 10^6}{1,25} \frac{2l_0}{l_m} = 0,8 \cdot 10^6 \frac{2l_0}{l_m}. \quad (5-17a)$$

Следовательно, коэффициент размагничивания N пропорционален длине воздушного зазора и обратно пропорционален длине магнита.

Материалы, применяемые для изготовления постоянных магнитов, были рассмотрены в § 5-3.

Пример 5-5. Определить магнитные индукции B_m , B_0 и напряженность поля H_m и H_0 , если постоянный подковообразный магнит (рис. 5-22, б) имеет длину $l_m = 13$ см, а воздушный зазор $l_0 = 0,2$ см. Кривая размагничивания материала магнита дана на рис. 5-24.

Решение. При малом воздушном зазоре допустим, что $S_0 = S_m$ и, следовательно, $B_0 = B_m$.

Коэффициент размагничивания

$$\begin{aligned} N &= 0,8 \cdot 10^6 \frac{2l_0}{l_m} = \\ &= 0,8 \cdot 10^6 \frac{2 \cdot 0,2}{13} = 24\,000. \end{aligned}$$

Из выражения (5-17)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= N \frac{M_B}{M_H} = 24\,000 \frac{0,02}{200} = \\ &= 2,4, \end{aligned}$$

где M_B и M_H — масштабы магнитной индукции, Т/мм, и напряженности поля, (А/м)/мм, принятые для кривой рис. 5-24.

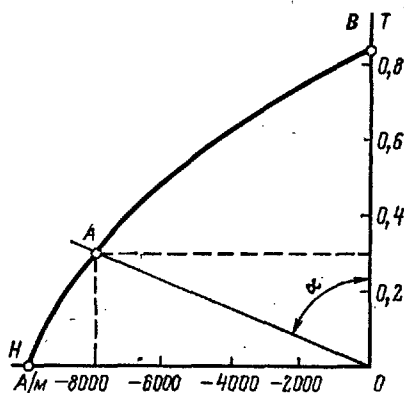


Рис. 5-24. Кривая размагничивания к примеру 5-5.

Найдя по таблице значение угла $\alpha = 67^\circ 20'$, соответствующего тангенсу угла 2,4, проведем под этим углом через начало координат прямую OA . Точка пересечения этой прямой с кривой размагничивания дает значение $B_m = 0,3$ Т и $H_m = 8000$ А/м.

Так как магнитная индукция в зазоре $B_0 = \mu_0 H_0$, то напряженность поля в воздушном зазоре

$$H_0 = B_0 / \mu_0 = B_m / \mu_0 = 0,8 \cdot 10^6 \cdot 0,3 = 0,24 \cdot 10^6 \text{ А/м.}$$

Глава шестая

Электромагнитная индукция

6-1

Электродвижущая сила электромагнитной индукции

Электродвижущая сила, наводимая в проводе. В проводе, который при движении в магнитном поле пересекает магнитные линии, возбуждается электродвижущая сила, получившая название э. д. с. электромагнитной индукции, а само явление названо электромагнитной индукцией. Это явление было открыто М. Фарадеем в 1831 г.

На рис. 6-1 показан провод, движущийся с постоянной скоростью v в однородном поле перпендикулярно вектору магнитной индукции B и оси провода. При движении провода свободные электроны и положительные ионы провода перемещаются с той же скоростью v . Следовательно, на каждую заряженную частицу действует электромагнитная сила (4-28). Электро-

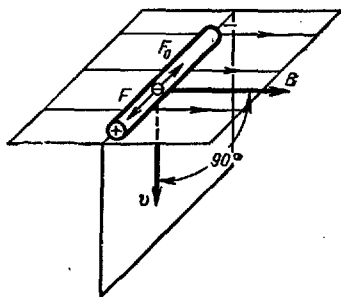


Рис. 6-1. Перемещение электронов в проводнике под действием электромагнитных сил.

магнитную силу называют еще силой Лоренца. Направление электромагнитной силы определяется по правилу левой руки. Электромагнитные силы вызывают перемещение электронов на один конец провода, создавая на нем отрицательный заряд. На другом конце провода недостаток электронов соответствует положительному заряду. Таким образом, на концах провода возникают заряды противоположных знаков. Разделение зарядов прекратится, когда электромагнитные силы уравниваются силами электрического поля, созданного разделенными зарядами в про-

воде, т. е. кулоновскими силами. Электромагнитная сила, действующая на каждый электрон,

$$F_0 = Bqv,$$

где q — заряд электрона.

Отношение силы к заряду выражает напряженность электрического поля индукции (1-27)

$$\mathcal{E}_n = F_0/q = Bv. \quad (6-1)$$

Заряды противоположных знаков, скопившиеся на концах провода, создают в нем однородное электрическое поле, сила которого

$$F = \mathcal{E}q.$$

Равновесие сил, действующих на электроны, означает равенство сил F_0 и F , а следовательно, и равенство

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_n = Bv.$$

Разделение зарядов, происходящее под действием электромагнитных сил, можно рассматривать как результат действия э. д. с. электромагнитной индукции. Если концы провода не замкнуты, то напряжение между ними равно э. д. с. При длине провода l э. д. с. электромагнитной индукции

$$E_n = \mathcal{E}_n l = \mathcal{E}l = Bvl. \quad (6-2)$$

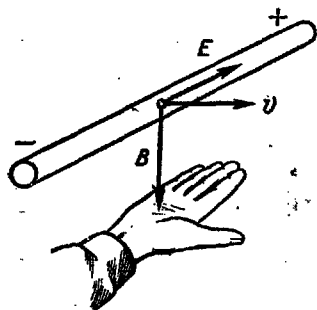


Рис. 6-2. Правило правой руки.

Наведенная в прямолинейном проводе, перемещающемся перпендикулярно линиям магнитной индукции, э. д. с. электромагнитной индукции пропорциональна

магнитной индукции поля, длине провода и скорости его движения. Это первая формулировка закона электромагнитной индукции.

Направление наведенной э. д. с. определяется правилом правой руки. Ладонь правой руки располагают так, чтобы магнитные линии входили в нее, отогнутый под прямым углом большой палец совмещают с направлением движения проводника, тогда вытянутые четыре пальца укажут направление индуктированной э. д. с. (рис. 6-2).

Если вектор скорости v движения проводника в магнитном поле составляет с вектором магнитной индукции B произвольный угол α (рис. 6-3), то значение наведенной э. д. с. определяется только нормальной к вектору B составляющей вектора скорости $v_n = v \sin \alpha$. При совпадении направлений векторов v и B электромагнитная сила, действующая на переносимые при таком движении заряды, равна нулю, что непосредственно следует из (4-24).

Таким образом, при определении напряженности электрического поля в проводе следует брать только проекцию вектора скорости на направление, перпендикулярное вектору B (рис. 6-3), т. е.

$$\mathcal{E}_n = Bv \sin \alpha, \quad (6-1a)$$

и э. д. с., наведенная в проводе,

$$E_n = Blv \sin \alpha. \quad (6-2a)$$

Следовательно, э. д. с. электромагнитной индукции зависит в общем случае не только от произведения Blv , но и от синуса угла между векторами скорости и магнитной индукции.

Замкнув концы провода с наводимой в нем э. д. с. на внешний участок цепи, получим в ней непрерывное перемещение электронов, т. е. электрический ток, сила которого определяется э. д. с. E_n и суммарным сопротивлением цепи:

$$I = E_n / (\Sigma r).$$

Так как направление тока совпадает с направлением наведенной э. д. с., то его можно определить, пользуясь правилом правой руки.

Электродвижущая сила, наводимая в контуре. Если прямолинейный провод при движении в однородном поле в направлении, перпендикулярном вектору магнитной индукции, за время dt проходит путь db , то скорость движения его

$$v = db/dt,$$

а наводимая в проводе в произвольный момент времени t э. д. с. или, как принято говорить, мгновенное значение э. д. с.

$$e = Blv = Bl \frac{db}{dt}.$$

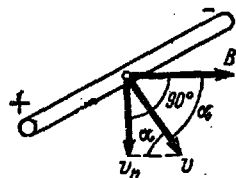


Рис. 6-3. К определению нормальной составляющей скорости.

Если скорость v не остается постоянной, то э. д. с. также будет непостоянной и ее обозначают строчной буквой e .

Произведение $l \cdot db = dS$ выражает площадку, описанную проводом длиной l при его движении перпендикулярно магнитным линиям; следовательно, величина $BdS = d\Phi$ представляет собой магнитный поток, пересекаемый проводом при его движении. Таким образом, мгновенное значение э. д. с., наведенной в проводе,

$$e = \frac{B dS}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (6-3)$$

При движении провода под углом $\alpha \neq 90^\circ$ к направлению вектора магнитной индукции поток, пересеченный проводом, $d\Phi = B_n dS$, где $B_n = B \sin \alpha$ выражает нормальную составляющую вектора B

к площадке dS . В этом случае э. д. с. также может быть найдена по (6-3). При движении провода произвольной формы (рис. 4-23) в неоднородном поле его можно рассматривать состоящим из большого числа прямолинейных участков, а суммарную э. д. с. опять определять по (6-3).

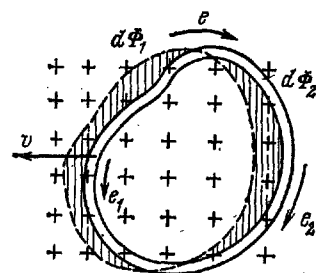


Рис. 6-4. Электродвижущая сила, наводимая в контуре.

На рис. 6-4 показан замкнутый контур, расположенный в неоднородном поле, магнитные линии которого направлены за плоскость рисунка. При перемещении контура на малое расстояние справа налево за время dt левая часть его пересечет магнитный поток $d\Phi_1$, который войдет в контур; при этом наводится э. д. с. $e_1 = d\Phi_1/dt$. Правая часть контура за то же время пересечет магнитный поток $d\Phi_2$, который выйдет из контура, и э. д. с., наводимая в этой части контура, $e_2 = d\Phi_2/dt$. Результирующее приращение магнитного потока в контуре

$$d\Phi = d\Phi_1 - d\Phi_2.$$

Наведенные э. д. с. e_1 и e_2 направлены навстречу друг другу (рис. 6-4), в чем можно убедиться, пользуясь правилом правой руки. Так как на отдельных участках контура наводятся э. д. с. разного направления, то в контуре выбирают положительное направление э. д. с. электромагнитной индукции. При этом положительное направление э. д. с.

связывают с направлением магнитного потока правилом буравчика. Поэтому направление э. д. с. e_2 (по часовой стрелке) надо считать положительным, а e_1 — отрицательным.

Таким образом, результирующая э. д. с., наводимая в контуре,

$$e = e_2 - e_1 = \frac{d\Phi_2 - d\Phi_1}{dt} = - \frac{d\Phi_1 - d\Phi_2}{dt} = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (6-4)$$

Из полученной формулы следует, что э. д. с. электромагнитной индукции равна скорости уменьшения (изменения) магнитного потока, пронизывающего контур. Это вторая формулировка закона электромагнитной индукции.

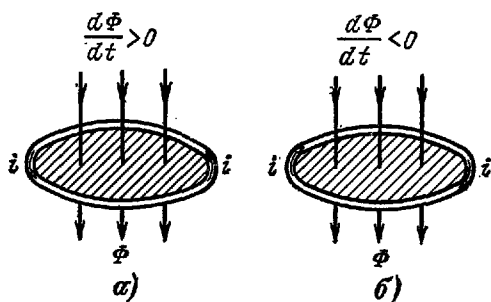


Рис. 6-5. Направление наведенного тока в контуре при возрастании (а) и убывании (б) магнитного потока.

ции. Опыт показывает, что совершенно безразлично, происходит ли это изменение потока при движении контура в магнитном поле или в результате изменения магнитного потока, пронизывающего неподвижный контур.

Наводимая э. д. с. равна скорости изменения потока в контуре. Направление наведенной э. д. с. зависит от того, получится ли положительное или отрицательное значение э. д. с. при вычислении по (6-4). При возрастании потока (направление которого связано с направлением э. д. с. правилом буравчика), т. е. при $d\Phi/dt > 0$, знак э. д. с. отрицателен, наоборот, при убывании магнитного потока, т. е. при $d\Phi/dt < 0$, знак э. д. с. положителен.

На рис. 6-5 показан магнитный поток, пронизывающий неподвижный замкнутый контур. Магнитные линии его направлены сверху вниз. Совместим с этим направлением поступательное движение буравчика; тогда направление

вращения его рукоятки укажет положительное направление э. д. с., совпадающее с направлением движения стрелки часов. В случае рис. 6-5, а поток нарастает, т. е. $d\Phi/dt > 0$, следовательно, по (6-4) э. д. с. отрицательна, т. е. в действительности направлена против хода часовой стрелки. То же направление будет иметь и ток i , вызванный в контуре этой э. д. с. Убывающему магнитному потоку $d\Phi/dt < 0$ (рис. 6-5, б) соответствует положительная э. д. с., т. е. направленная по движению часовой стрелки.

Для определения действительного направления наведенной э. д. с. и тока можно пользоваться общим законом,

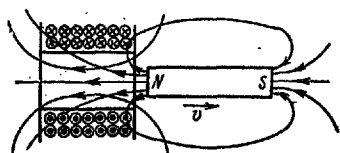


Рис. 6-6. Электродвижущая сила, наводимая в катушке.

сформулированным русским академиком Э. Х. Ленцем и называемым законом Ленца: ток i , возникающий в контуре под действием наведенной э. д. с., всегда направлен таким образом, что противо-

действует изменению магнитного потока, пронизывающего контур.

Согласно (6-2) э. д. с. в замкнутом контуре можно представить и как сумму произведений $\mathcal{E}_n dl$ во всех участках dl этого контура, что записывают в виде

$$e = \oint \mathcal{E}_n dl.$$

Следовательно,

$$\oint \mathcal{E}_n dl = - d\Phi/dt. \quad (6-5)$$

Уравнение (6-5) показывает, в частности, что э. д. с., наведенная в контуре, не зависит от материала контура. Уравнение (6-5) распространяют на любые замкнутые контуры, которые можно выделить и в проводящей среде, и в диэлектрике. В любом замкнутом контуре, ограничивающем поверхность, которую пронизывает переменный магнитный поток, возникает э. д. с. электромагнитной индукции.

Электродвижущая сила, наводимая в катушке. На рис. 6-6 показана неподвижная катушка, имеющая w витков. Вдоль ее оси перемещается постоянный магнит. В результате этого меняется поток, сцепленный с витками катушки, и в катушке наводится э. д. с. индукции. Электро-

движущая сила возникает в каждом из соединенных последовательно витков; суммарная э. д. с.

$$e = e_1 + e_2 + \dots + e_w = -\frac{1}{dt}(d\Phi_1 + d\Phi_2 + \dots + d\Phi_w) = \\ = -\frac{d}{dt}(\Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_w).$$

Алгебраическая сумма потоков, сцепленных с отдельными витками цепи, называется потоко-сцепле-нием и обозначается буквой Ψ . Таким образом,

$$\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_w$$

и суммарная э. д. с.

$$e = -d\Psi/dt. \quad (6-6)$$

Если каждый из витков катушки сцеплен с одинаковым магнитным потоком ($\Phi_1 = \Phi_2 = \dots \Phi_w$), например практически у катушек с ферромагнитным сердечником, то э. д. с. катушки в w раз больше э. д. с. одного витка,

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt}, \quad (6-7)$$

и потоко-сцепление равно произведению числа витков и сцепленного с витком магнитного потока

$$\Psi = w\Phi. \quad (6-8)$$

6-2

Преобразование механической энергии в электрическую. Электрические генераторы

Замкнем прямолинейный провод длиной l , расположенный в однородном магнитном поле перпендикулярно вектору магнитной индукции B , на внешний участок цепи с сопротивлением r (рис. 6-7). При движении провода с постоянной скоростью v перпендикулярно магнитным линиям в нем индуцируется неизменяющаяся э. д. с. E_n и в замкнутой цепи возникает постоянный ток I .

На провод с током в магнитном поле действует электро-магнитная сила

$$F = BIl.$$

Направление этой силы, найденное по правилу левой руки, противоположно направлению вектора скорости v

(рис. 6-7); следовательно, она является тормозной. Для преодоления этой силы, т. е. для движения провода, необходима внешняя сила, равная тормозной силе и направленная противоположно. Иначе говоря, для движения провода необходим первичный двигатель, развивающий механическую мощность

$$P_m = Fv,$$

или

$$P_m = BIlv = IE_n = P, \quad (6-9)$$

т. е. развиваемая двигателем мощность равна электрической мощности цепи. Следовательно, при движении в магнитном поле под действием внешних сил замкнутого на внешний участок цепи проводника, пересекающего

Рис. 6-7. Движение проводника в магнитном поле и возникновение тормозной силы.

магнитные линии, происходит преобразование механической энергии в электрическую.

Электрические машины, в которых происходит преобразование механической энергии в электрическую, называются

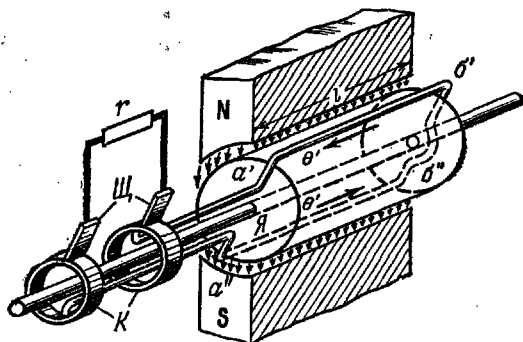


Рис. 6-8. Устройство простейшего генератора переменного тока.

электрическими (электромашинными) генераторами. Схема устройства электрического генератора была показана на рис. 5-12, более подробно подвижная часть приведена на рис. 6-8. К сказанному выше (§ 5-5) следует добавить, что на якоре машины в пазах укреплены провода обмотки, в которых при вращении якоря наводится

не постоянная, а переменная (изменяющаяся) э. д. с. В технике стремятся получить переменные э. д. с., токи и напряжения, изменяющиеся по простому периодическому — синусоидальному закону (см. § 8-1).

Принцип устройства генератора переменного тока поясняют рис. 6-8 и 6-9. На поверхности цилиндрического якоря $Я$ укреплен виток проволоки, концы которого присоединены к медным изолированным кольцам $К$. Щетки $Щ$, наложенные на кольца, служат для соединения с внешней частью цепи $г$.

Индукция B магнитного поля, создаваемая токами в обмотках возбуждения $ОВ$ (рис. 6-9, а), нормальна к поверхности якоря $Я$. Форма полюсов N и S выбирается такой,

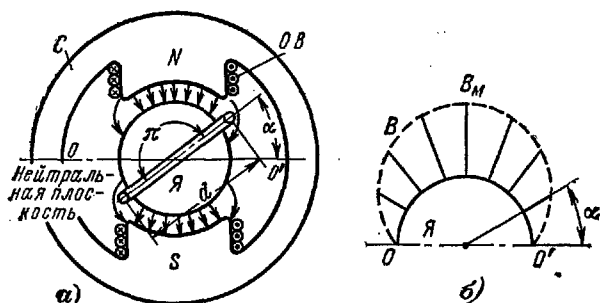


Рис. 6-9. Устройство генератора переменного тока (а) и диаграмма магнитного поля в его воздушном зазоре (б).

чтобы индукция изменялась вдоль окружности якоря по закону синуса от $B = 0$ на линии пересечения якоря с нейтральной плоскостью $00'$ до максимального значения B_m под серединой полюсов, как показано на диаграмме рис. 6-9, б. На этом рисунке индукция изображена отрезками радиусов между окружностью (поверхность якоря) и кривой B (пунктир). Если α — угол, образованный нейтральной плоскостью $00'$ и плоскостью, проходящей через ось якоря и произвольную точку его поверхности, то индукция в произвольной точке

$$B = B_m \sin \alpha.$$

При равномерном вращении якоря в таком магнитном поле в проводниках $a'b'$ и $a''b''$ (рис. 6-8), соединенных последовательно, будут индуцироваться одинаковые э. д. с. e' и, следовательно, суммарная э. д. с. с учетом (6-2а)

$$e = 2e' = 2B_m l v \sin \alpha = E_m \sin \alpha, \quad (6-10)$$

где $E_m = 2B_m l v$ — максимальное значение э. д. с. в витке.

Наложив на якорь плоскую катушку из ω витков, получим в ω раз большую э. д. с., т. е.

$$E_m = 2B_m l v \omega. \quad (6-11)$$

За один оборот вращения якоря в магнитном поле, т. е. при изменении угла α на 2π , происходит полный цикл изменения э. д. с. Продолжительность одного цикла изменения э. д. с. называется периодом и обозначается буквой T . Период измеряется в секундах. Величина, обратная периоду, называется частотой и обозначается буквой f , так что $f = 1/T$; частота измеряется в 1/с; эту единицу называют герц (Гц).

При равномерном вращении якоря его угловая скорость постоянна:

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f. \quad (6-12)$$

Угол поворота якоря α при постоянной угловой скорости ω пропорционален времени:

$$\alpha = \omega t = \frac{2\pi}{T} t = 2\pi f t.$$

Электродвижущая сила по (6-10), наведенная в обмотке якоря,

$$e = E_m \sin \alpha = E_m \sin \omega t = E_m \sin 2\pi f t. \quad (6-13)$$

При диаметре якоря d угловая скорость $\omega = \frac{v}{d/2} = 2v/d$ и максимальное значение э. д. с.

$$E_m = \omega \omega B_m l d = 2\pi f \omega B_m l d. \quad (6-11a)$$

Генераторы переменного тока изготавливаются обычно на номинальные напряжения 3—15 кВ. У реальных генераторов э. д. с. индуцируется в обмотке, расположенной в пазах на внутренней поверхности статора S , а ротор является электромагнитом, возбуждающим магнитный поток машины (см. рис. 5-13).

Такая конструкция обеспечивает большую надежность изоляции и более простой отвод тока во внешний участок цепи.

Пример 6-1. Плоская прямоугольная катушка длиной $l = 0,25$ м, шириной $d = 0,2$ м, с числом витков $\omega = 25$ наложена на якорь, который вращается с частотой $n = 3000$ об/мин в магнитном поле с максимальной индукцией $B_m = 1$ Т. Магнитная индукция в зазоре изменяется по закону синуса. Определить: f , T и E_m .

Решение. Одному обороту якоря соответствует один цикл изменения э. д. с., следовательно, частота, или, что то же, число циклов в секунду равно числу оборотов якоря в секунду:

$$f = n/60 = 3000/60 = 50 \text{ Гц.}$$

Период

$$T = 1/f = 1/50 = 0,02 \text{ с.}$$

Максимальная э. д. с. (6-11a)

$$E_m = 2\pi f \omega B_m l d = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 25 \cdot 1 \cdot 0,25 \cdot 0,2 = 392,5 \text{ В.}$$

На рис. 6-10 показана схема устройства простейшего генератора постоянного тока. Концы витка присоединены к металлическим изолированным полукольцам с наложенными на них двумя неподвижными щетками *A* и *B*, при помощи которых присоединяется внешний участок цепи.

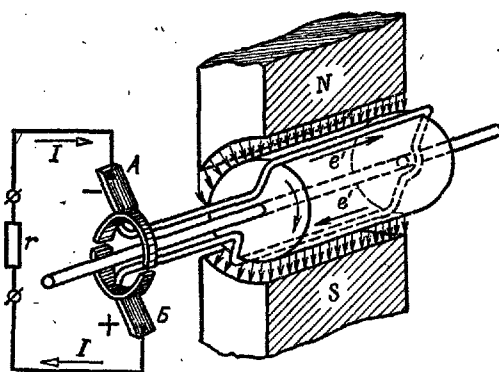
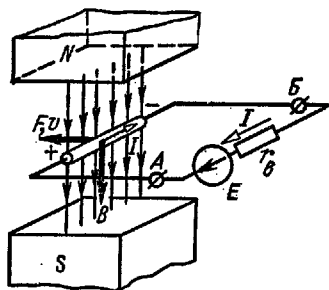


Рис. 6-10. Простейший генератор постоянного тока.

Два полукольца образуют простейший коллектор, а полукольцо — коллекторную пластину. При вращении якоря щетка *A* все время соединяется с проводом витка, расположенным под северным полюсом, а щетка *B* — с проводом витка, расположенным под южным полюсом. Переключение щетки с одной пластины на другую происходит в момент прохождения витка через нейтральную плоскость. Вследствие этого полярность напряжения на щетках не изменяется. При двух коллекторных пластинах напряжение на щетках изменяется от нуля до E_m (если не учитывать сопротивление витка). Обмотка реального генератора состоит из большого числа витков и коллекторных пластин, так что колебания напряжения и тока I в цепи получаются ничтожными.

Преобразование электрической энергии в механическую. Электродвигатели

На рис. 6-11 показан прямолинейный провод длиной l , расположенный в однородном магнитном поле перпендикулярно вектору магнитной индукции B и присоединенный к источнику питания с постоянной э. д. с. E и внутренним сопротивлением $r_{\text{в}}$; по проводу проходит ток I .



Электромагнитная сила, действующая на провод с током,

$$F = BIl,$$

ее направление определяется по правилу левой руки.

Под действием силы F провод движется со скоростью v , поэтому в нем будет индуцироваться э. д. с., направленная навстречу току, в чем можно убедиться, применяя правило правой руки. Значение встречной э. д. с. по (6-2)

Рис. 6-11. Возникновение встречной э. д. с.

$$E_{\text{и}} = Blv.$$

Учитывая сопротивление прямолинейного провода r и применяя для замкнутого контура второй закон Кирхгофа, получаем:

$$E - E_{\text{и}} = Ir_{\text{в}} + Ir.$$

Так как напряжение на зажимах AB

$$U_{AB} = E - Ir_{\text{в}},$$

то из написанных уравнений получим:

$$U_{AB} = Ir + E_{\text{и}}. \quad (6-14)$$

Умножив полученное уравнение на ток, определим электрическую мощность

$$U_{AB}I = I^2r + E_{\text{и}}I,$$

или

$$U_{AB}I = I^2r + BlvI = I^2r + Fv. \quad (6-15)$$

Произведение Fv представляет собой механическую мощность, а I^2r — мощность тепловых потерь в проводе. Следовательно, при движении провода с током в магнитном поле

под действием сил этого поля происходит преобразование электрической энергии в механическую и тепловую.

Электрические машины, в которых происходит преобразование электрической энергии в механическую, называются электродвигателями. Таким образом, рассмотренный случай движения проводника с током в магнитном поле под действием сил этого поля представляет собой пример элементарного электродвигателя.

В § 2-9 было отмечено, что каждый генератор постоянного тока переходит в режим работы электродвигателя, если его э. д. с. окажется меньше напряжения на зажимах. Этот принцип обратимости электрических машин был открыт в 1833 г. русским академиком Э. Х. Ленцем. Таким образом, каждый электрический генератор может работать электродвигателем и наоборот.

На рис. 6-12 дана одна из возможных схем включения электродвигателя в сеть питания. Этот электродвигатель имеет две параллельные ветви. В одну ветвь включены якорь и пусковой реостат r_n , в другую обмотка возбуждения OB и реостат для регулирования тока в OB и тем самым магнитного потока.

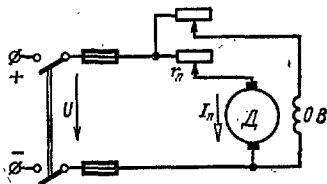


Рис. 6-12. Схема включения электродвигателя.

В момент пуска электродвигателя, когда якорь еще неподвижен, при отсутствии пускового реостата ток в якоре был бы

$$I_n = U/r_a.$$

Так как сопротивление якоря r_a мало, то пусковой ток I_n велик, в десятки раз больше номинального (допустимого). Включая последовательно с якорем пусковой реостат, ограничивают пусковой ток до допустимых значений:

$$I_n = U/(r_a + r_n). \quad (6-16)$$

При вращении якоря в нем индуцируется встречная э. д. с., которая увеличивается по мере нарастания частоты вращения. Эта э. д. с. компенсирует часть напряжения U и уменьшает пусковой ток, так как

$$I_n = (U - E_n)/(r_a + r_n).$$

По мере увеличения частоты вращения сопротивление r_n реостата постепенно уменьшают до нуля.

Пример 6-2. Электродвигатель включен в сеть с напряжением $U = 220$ В. При нормальной частоте вращения двигателя встречная э. д. с. $E_n = 210$ В. Сопротивление обмотки якоря $r_a = 0,5$ Ом.

Определить: номинальный ток двигателя; сопротивление пускового реостата, при котором пусковой ток не превышает удвоенного номинального тока; пусковой ток двигателя при включении его без реостата.

Решение. Номинальный ток

$$I_n = \frac{U - E_n}{r_a} = \frac{220 - 210}{0,5} = 20 \text{ А.}$$

Сопротивление пускового реостата (6-16)

$$r_n = \frac{U}{I_n} - r_a = \frac{U}{2I_n} - r_a = \frac{220}{2 \cdot 20} - 0,5 = 5 \text{ Ом.}$$

Пусковой ток при включении двигателя без реостата

$$I_n = U/r_a = 220/0,5 = 440 \text{ А.}$$

6-4

Вихревые токи

Как было показано выше (§ 6-1), в замкнутом контуре, который пронизывается изменяющимся магнитным потоком, возникает э. д. с. электромагнитной индукции. Если контур выполнен из проводника, то под действием э. д. с.

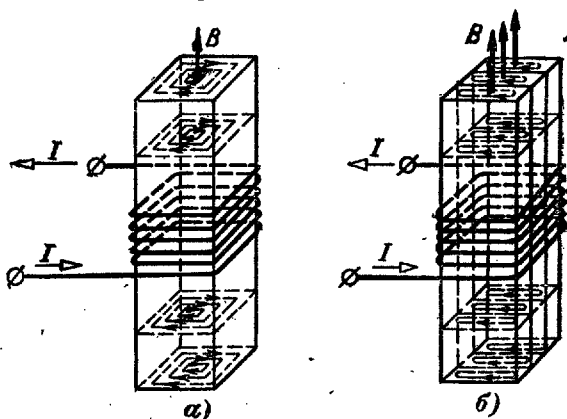


Рис. 6-13. Вихревые токи в стальном сердечнике.

в нем протекает ток. Токи возникают и в телах из проводящих материалов (сталь, медь, алюминий и др.), расположенных в изменяющемся магнитном поле. Эти токи замыкаются в контурах, плоскости которых перпендикулярны направлению изменяющегося магнитного потока, и назы-

ваются вихревыми токами. Например, при прохождении переменного тока I по катушке со сплошным стальным сердечником (рис. 6-13, а) в нем будут наводиться вихревые токи (показаны пунктиром). Они создают свое магнитное поле, оказывающее размагничивающее действие на магнитное поле катушки. Кроме того, вихревые токи, нагревая сердечник (сталь), вызывают непроизводительный расход энергии и снижают к. п. д. электромагнитных механизмов. Эти потери энергии называются потерями от вихревых токов.

Для уменьшения вихревых токов применяются:

1) сердечники из электротехнической стали с примесью кремния, обладающие увеличенным удельным электрическим сопротивлением; 2) сердечники, выполненные из отдельных, изолированных друг от друга листов стали (рис. 6-13, б) толщиной 0,35—0,5 мм, вследствие чего увеличивается сопротивление сердечника для вихревых токов и уменьшаются вихревые токи.

Вихревые токи возникают и в якоре электрической машины при вращении его в магнитном поле. Уменьшение их достигается теми же способами. На рис. 6-14, а, б пунктирными линиями показаны вихревые токи в якоре из сплошной и из листовой стали.

В трансформаторах, электрических машинах и других аппаратах и механизмах вихревые токи отрицательно влияют на работу и их необходимо подавлять. В других устройствах, наоборот, они могут быть использованы для приведения в действие механизмов и приборов или для получения необходимого режима работы.

На рис. 6-15 показан укрепленный на оси диск индукционного прибора и следы полюсов двух магнитных пото-

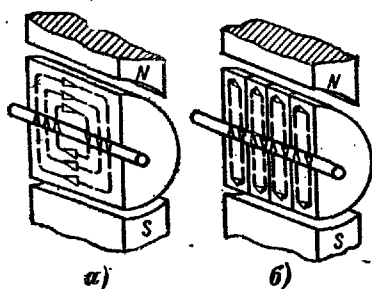


Рис. 6-14. Вихревые токи в якоре электрической машины.

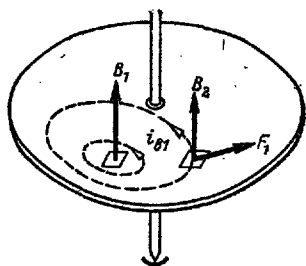


Рис. 6-15. Вихревые токи в диске и возникновение вращающего момента.

ков, пронизывающих диск (векторы магнитной индукции B_1 и B_2).

Первый изменяющийся магнитный поток индуцирует в диске вихревые токи $i_{в1}$. В результате взаимодействия этих токов со вторым магнитным потоком возникает электромагнитная сила F_1 , вызывающая вращение диска.

На рис. 6-16 показан диск счетчика электроэнергии. При вращении диска в магнитном поле постоянного магнита

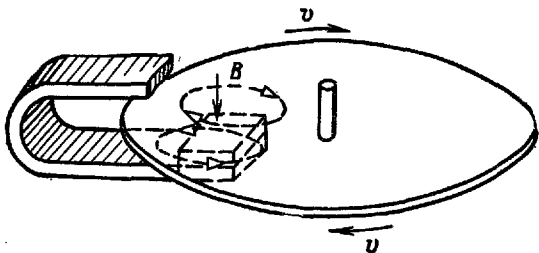


Рис. 6-16. Вихревые токи в диске при движении его в магнитном поле постоянного магнита.

в нем возникают вихревые токи. Электромагнитная сила взаимодействия этих токов с магнитным полем того же магнита создает тормозной момент, необходимый для нормальной работы прибора.

Вихревые токи широко применяются для индукционной плавки металлов и для индукционного нагрева при поверхностной закалке стальных деталей, в частности шестерен и коленчатых валов.

6-5

Измерение магнитного потока, магнитной индукции и магнитного напряжения

Одним из распространенных методов измерений магнитных характеристик является баллистический метод, основанный на применении баллистического гальванометра. Этот гальванометр отличается от рассмотренного в § 4-11 измерительного механизма только большим моментом инерции подвижной части и вследствие этого увеличенным периодом ее колебаний.

При баллистических измерениях по обмотке гальванометра проходит импульс тока, т. е. кратковременный ток (доли секунды), и на подвижную часть действует импульс силы — толчок. Под действием толчка подвижная часть отбрасывается на некоторый угол. Затем под действием пружин подвижная часть возвращается в исходное положение, переходит его, отклоняется в обратную сторону и после нескольких колебаний возвращается в исходное положение. Таким образом, подвижная часть подобна маятнику.

При малой длительности импульса τ по сравнению с периодом собственных колебаний T подвижной части первый наибольший ее отброс α пропорционален заряду Q , прошедшему через гальванометр, т. е.

$$Q = c\alpha, \quad (6-17)$$

где c — коэффициент пропорциональности, называемый баллистической постоянной и зависящий от параметров гальванометра.

Написанное соотношение (6-17) можно пояснить следующим образом. Электромагнитная сила, действующая на подвижную часть, пропорциональна силе тока в рамке; кроме того, сила пропорциональна ускорению или изменению скорости v . Таким образом, отношение v/τ пропорционально силе тока в рамке I , а скорость v , с которой подвижная часть выходит из положения равновесия, пропорциональна $I\tau$, т. е. заряду Q , прошедшему через гальванометр. Из механики известно, что амплитуда колебания маятника и соответствующий ей первый отброс α подвижной части гальванометра, пропорциональны скорости v

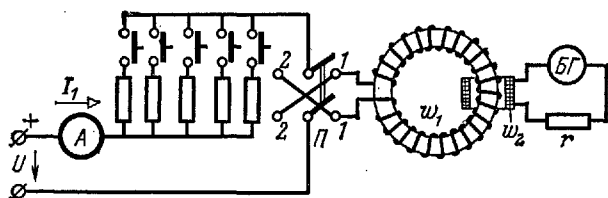


Рис. 6-17. Схема для снятия кривой намагничивания и гистерезисного цикла.

в положении равновесия; следовательно, α пропорционально Q , что и выражено уравнением (6-17).

Так как угол поворота подвижной части гальванометра отмечается числом миллиметров его шкалы, то баллистическая постоянная $c = Q/\alpha$ измеряется в мкКл/мм, а обратная ей величина $s = 1/c = \alpha/Q$, называемая чувствительностью гальванометра, измеряется в мм/мкКл.

На рис. 6-17 показан кольцевой сердечник с двумя обмотками. Первая намагничивающая обмотка с числом витков w_1 подключена к источнику постоянного напряжения U . Вторая — измерительная с числом витков w_2 , замкнута на баллистический гальванометр БГ. Изменение намагничивающего тока I_1 производится включением в цепь (при помощи кнопок) различных сопротивлений.

После замыкания переключателя P в одно из двух положений ток в намагничивающей обмотке изменится от 0 до I_1 , а магнитный поток в сердечнике от 0 до $\Phi = BS$.

Магнитная индукция в сердечнике, если проницаемость μ можно считать неизменной,

$$B = \Phi/S = \mu\mu_0 I_1 w_1/l, \quad (6-18)$$

где l и S — длина средней магнитной линии и сечение сердечника.

При изменении магнитного потока в измерительной обмотке индуцируется э. д. с.

$$e_2 = -w_2 d\Phi/dt,$$

под действием которой проходит ток

$$i_2 = \frac{e_2}{r_2} = - \frac{w_2}{r_2} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (6-19)$$

где r_2 — суммарное сопротивление цепи гальванометра.

Электрический заряд $dQ = i_2 dt$, протекающий при изменении магнитного потока на величину $d\Phi$ за время dt ,

$$dQ = i_2 dt = - w_2 \frac{d\Phi}{r_2}.$$

Электрический заряд, который пройдет по измерительной обмотке за время τ , при изменении магнитного потока от Φ до 0

$$Q = \int_0^\tau i dt = - \frac{w_2}{r_2} \int_\Phi^0 d\Phi = - w_2 \Phi / r_2, \quad (6-20)$$

а если поток изменится от Φ до 0, то

$$Q = w_2 \Phi / r_2. \quad (6-20a)$$

Из (6-20a) следует, что магнитный поток

$$\Phi = Q r_2 / w_2.$$

Заряд Q , проходя по измерительной цепи, вызовет отброс подвижной части гальванометра, который пропорционален заряду (6-17). Таким образом, магнитный поток

$$\Phi = c \frac{r_2}{w_2} \alpha \quad (6-21)$$

может быть найден по показанию гальванометра α .

Разделив магнитный поток на площадь сечения образца, найдем магнитную индукцию в образце:

$$B = \frac{\Phi}{S} = c \frac{r_2}{w_2 S} \alpha. \quad (6-22)$$

Измерив амперметром (рис. 6-17) намагничивающий ток I_1 и воспользовавшись (6-18), найдем магнитную проницаемость сердечника

$$\mu = \frac{Bl}{\mu_0 I_1 w_1}. \quad (6-23)$$

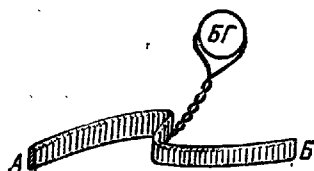


Рис. 6-18. Магнитный пояс.

Измерение магнитного напряжения производят при помощи магнитного пояса. Он состоит из длинной гибкой плоской катушки (рис. 4-18) с w витками; обмотка имеет четное число слоев (2; 4), намотанных в одну сторону с одинаковой плотностью ($w_0 = w/l$) на сердечник из неферромагнитного материала; полное потокоцепление пояса $\Psi = \Phi w$. К концам обмотки, выведенным на середине пояса, присоединяется баллистический гальванометр БГ (рис. 6-18).

Согласно (6-21) можно написать:

$$c\alpha = \Psi/r_2, \quad (6-24)$$

где r_2 — сопротивление цепи пояс — гальванометр.

Потокосцепление пояса состоит из суммы потокосцеплений отдельных его участков длиной Δl , в пределах каждого из которых поле можно считать однородным. Таким образом,

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \dots = \Phi_1 \omega_0 \Delta l_1 + \Phi_2 \omega_0 \Delta l_2 + \dots \quad (6-25)$$

Обозначив B_n — проекцию вектора магнитной индукции на нормаль к плоскости витка, запишем выражение магнитного потока, пронизывающего какой-либо виток пояса,

$$\Phi = B_n S,$$

причем для разных витков пояса B_n могут быть различными, а сечение S всех витков одинаково.

Нормальная составляющая B_n совпадает по направлению с вектором продольной (вдоль пояса) составляющей напряженности поля H_l ; поэтому

$$B_n = \mu_0 H_l$$

и, следовательно, магнитный поток, пронизывающий виток пояса,

$$\Phi = \mu_0 H_l S.$$

Магнитное напряжение между концами A и B пояса, состоящего из участков длиной Δl :

$$U_m = \sum H_l \Delta l.$$

Подставив выражение магнитного потока через виток в (6-25), получим:

$$\Psi = \omega_0 \mu_0 S (H_{l1} \Delta l_1 + H_{l2} \Delta l_2 + \dots) = \omega_0 \mu_0 S \sum H_l \Delta l = \omega_0 \mu_0 S U_m,$$

откуда, учитывая (6-24), получаем:

$$U_m = \frac{\Psi}{\omega_0 \mu_0 S} = \frac{c r_2 \alpha}{\omega_0 \mu_0 S} = c_n \alpha, \quad (6-26)$$

где $c_n = c r_2 / \omega_0 \mu_0 S$ — постоянная пояса.

Таким образом, зная постоянную пояса c_n и отметив баллистический отброс α , по (6-26) находят магнитное напряжение между любыми точками магнитного поля, в которые помещены концы A и B пояса.

Для измерения н. с. катушки $F = I \omega$ охватывают поясом витки катушки, совмещая концы пояса A и B . Включая или выключая ток в катушке, изменяют магнитный поток, сцепленный с поясом, и наблюдают отброс α . Намагничивающая сила $F = c_n \alpha$.

6-6

Индуктивность

Вокруг замкнутого контура с током всегда существует магнитный поток, пронизывающий контур. Этот магнитный поток называют магнитным потоком самоиндукции Φ_L . При постоянной магнитной проницаемости среды магнитный поток самоиндукции пропорционален силе тока. Алгебраическая сумма потоков самоиндукции всех

витков катушки называется потокосцеплением самоиндукции Ψ_L .

Коэффициент пропорциональности между потокосцеплением самоиндукции и током I катушки или контура при неизменной магнитной проницаемости среды называется индуктивностью (катушки или контура)

$$L = \Psi_L / I. \quad (6-27)$$

Индуктивность характеризует связь потокосцепления самоиндукции с током данной цепи. Ее необходимо знать, чтобы при заданной силе тока в цепи найти магнитный поток или потокосцепление самоиндукции.

Единица измерения индуктивности

$$[L] = [\Psi_L / I] = \text{В} \cdot \text{с} / \text{А} = \text{Ом} \cdot \text{с}.$$

Как указывалось, единица $\text{Ом} \cdot \text{с}$ называется генри (Г). Так как генри — крупная единица, то часто применяются дольные единицы миллигенри (мГ) и микрогенри (мкГ).

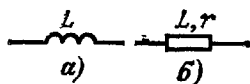


Рис. 6-19. Условные обозначения индуктивности (а) и катушки с индуктивностью и сопротивлением (б).

Условное обозначение индуктивности на схемах показано на рис. 6-19, а, а катушки с индуктивностью L и сопротивлением r — на рис. 6-19, б.

Определим индуктивность кольцевой катушки (см. рис. 4-18) при среднем радиусе сердечника катушки $r = (R_1 + R_2) / 2$, значительно большем радиуса витков катушки. В этом случае среднее значение магнитной индукции в поперечном сечении сердечника можно считать равным значению магнитной индукции на осевой линии катушки (§ 4-8). Таким образом, магнитный поток катушки с достаточной точностью можно определить по формуле

$$\Phi = BS = \mu \mu_0 \frac{I \omega}{l} S = 125 \mu \frac{I \omega}{l} S \cdot 10^{-8},$$

где Φ — магнитный поток, Вб; I — ток, А; l — длина, м; S — сечение, м^2 .

Магнитный поток Φ пронизывает все витки катушки, поэтому потокосцепление самоиндукции, Вб,

$$\Psi_L = \Phi \omega = 125 \mu \frac{I \omega^2}{l} S \cdot 10^{-8},$$

откуда индуктивность катушки, Г,

$$L = \frac{\Psi_L}{I} = 125 \mu \frac{\omega^2 S}{l} 10^{-8}. \quad (6-28)$$

Цилиндрическую катушку можно рассматривать как кольцевую с достаточно большим радиусом сердечника, у которой обмотка расположена только на части сердечника длиной l ; поэтому приближенное значение ее индуктивности можно определять по (6-28), если длина l много больше радиуса витков.

Рассчитаем еще индуктивность двухпроводной воздушной линии (рис. 6-20), радиус проводов которой r_0 и расстояние между проводами D .

По закону полного тока (4-14) магнитная индукция поля тока I первого провода на расстоянии $r > r_0$ от его оси

$$B_1 = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}.$$

Магнитный поток, проходящий через элементарную площадку $dS = l dr$ (рис. 6-20), созданный током I первого провода,

$$d\Phi_1 = B_1 dS = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} l dr.$$

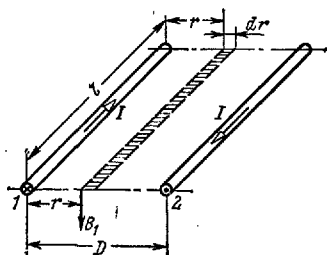


Рис. 6-20. Двухпроводная линия.

Полный магнитный поток, созданный между проводами током первого провода,

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \int_{r=r_0}^{r=D-r_0} d\Phi_1 = \mu_0 \frac{Il}{2\pi} \int_{r_0}^{D-r_0} \frac{dr}{r} = \\ &= \mu_0 \frac{Il}{2\pi} \ln \frac{D-r_0}{r_0} \approx \mu_0 \frac{Il}{2\pi} \ln \frac{D}{r_0}; \end{aligned} \quad (6-29)$$

так как расстояние между проводами всегда значительно больше радиуса ($D \gg r_0$), то разность $D - r_0$ мало отличается от D .

Вследствие того что токи в проводах равны и направлены противоположно друг другу, они создают одинаковые магнитные потоки между проводами. Поэтому результирующий магнитный поток между проводами

$$\Phi = 2\Phi_1 = 2\mu_0 \frac{Il}{2\pi} \ln \frac{D}{r_0} = \frac{\mu_0}{\pi} Il \ln \frac{D}{r_0}.$$

Индуктивность двухпроводной воздушной линии

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} l \ln \frac{D}{r_0} = 4 \cdot 10^{-7} l \ln \frac{D}{r_0}, \quad (6-30)$$

где l — длина линии, м.

При расчетах линии удобнее пользоваться значением индуктивности, отнесенной к 1 км ее длины, Г/км; учитывая, что 1 км = 10^3 м, получаем:

$$L_0 = 4 \cdot 10^{-4} \ln \frac{D}{r_0}. \quad (6-31a)$$

При этих выводах не были учтены магнитные потоки внутри самих проводов; если их учесть, то индуктивность, отнесенная к 1 км длины, Г/км, выразится формулой

$$L_0 = \left(4 \ln \frac{D}{r_0} + \mu \right) \cdot 10^{-4}, \quad (6-31b)$$

где μ — магнитная проницаемость материала провода, которая для всех проводов, кроме стальных, принимается равной единице. При высоких частотах из-за поверхностного эффекта магнитное поле внутри проводов почти отсутствует и следует пользоваться формулой (6-31a).

Пример 6-3. При силе тока в обмотке кольцевой катушки $I = 5$ А значение магнитной индукции в сердечнике $B = 0,5$ Т. Определить индуктивность катушки, если число ее витков $w = 1000$, а площадь поперечного сечения ее сердечника $S = 20$ см².

Решение. Согласно (6-27)

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{w\Phi}{I} = \frac{wBS}{I} = \frac{1000 \cdot 0,5 \cdot 20 \cdot 10^{-4}}{5} = 0,2 \text{ Г.}$$

6-7

Электродвижущая сила самоиндукции

Всякое изменение тока в электрической цепи неизбежно вызывает изменение магнитного потока и потокосцепления самоиндукции цепи, а изменение потокосцепления влечет за собой согласно (6-5) возникновение э. д. с., которая в этом случае называется э. д. с. самоиндукции. Явление возникновения э. д. с. в контуре, вызванное изменением тока i в этом же контуре, называют самоиндукцией.

Электродвижущая сила самоиндукции, как и всякая наведенная э. д. с., определяется по (6-6), т. е.

$$e_L = -d\Psi_L/dt,$$

или, учитывая (6-27)

$$e_L = -d\Psi_L/dt = -d(Li)/dt = -L di/dt, \quad (6-32)$$

где предполагается, что индуктивность L не зависит от тока i , например у катушки без ферромагнитного сердеч-

ника или у катушки с сердечником, магнитная проницаемость которого можно считать не зависящей от тока.

Следовательно, э. д. с. самоиндукции пропорциональна индуктивности и скорости изменения тока в цепи.

Направление э. д. с. самоиндукции определяется по закону Ленца. При увеличении тока, т. е. при $di/dt > 0$, э. д. с. самоиндукции отрицательна и, следовательно, направлена встречно по отношению к току, наоборот, при уменьшении тока, т. е. при $di/dt < 0$, э. д. с. самоиндукции положительна и, следовательно, направлена одинаково с током. Таким образом, и в том и в другом случае э. д. с. самоиндукции стремится противодействовать изменению режима цепи.

Вследствие явления самоиндукции зависимость между током и напряжением в цепи с изменяющимся током нельзя просто определить по закону Ома $I = U/r$.

Если цепь обладает только сопротивлением r (индуктивность ничтожно мала), то в момент подключения цепи к источнику с постоянным напряжением U ток в цепи скачком увеличивается от 0 до значения $I = U/r$ и далее не изменяется. При наличии в цепи сопротивления r и индуктивности L (рис. 6-21) появление тока i в цепи сопровождается возникновением э. д. с. самоиндукции e_L и, следовательно, по второму закону Кирхгофа можно записать:

$$U + e_L = ir,$$

или, так как $e_L = -L di/dt$,

$$U - L di/dt = ir. \quad (6-33)$$

Таким образом, ток в цепи в любой момент времени должен быть таким, чтобы падение напряжения ir было равно алгебраической сумме напряжения U и э. д. с. e_L .

Оказывается, что в цепи с индуктивностью при подключении ее к источнику в начальный момент ток $i = 0$; следовательно, согласно (6-33) $U + e_L = 0$, т. е. э. д. с. e_L должна иметь наибольшее значение, равное напряжению питания U , и уравновешивать последнее, так как э. д. с. направлена встречно ($di/dt > 0$). Очевидно и скорость нарастания тока в этот момент будет наибольшей ($di/dt = U/L$). Появление в цепи тока означает появление падения напряжения ir

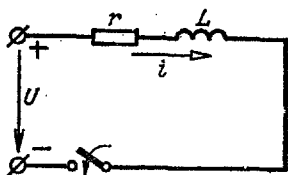


Рис. 6-21. Включение катушки к источнику постоянного напряжения.

и, следовательно, согласно (6-33) уменьшение e_L , что возможно только при уменьшении скорости нарастания тока. Таким образом, скорость нарастания тока, наибольшая в первый момент включения, постепенно уменьшается (рис. 6-22), вместе с тем уменьшается и э. д. с. самоиндукции e_L .

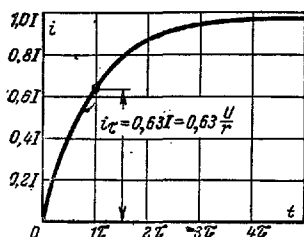


Рис. 6-22. График изменения тока при включении катушки к источнику постоянного напряжения.

Когда ток достигнет конечного значения $I = U/r$ (теоретически только через бесконечно большой интервал времени), нарастание тока прекратится и э. д. с. самоиндукции индуцироваться не будет.

Практически процесс установления тока в цепи тем продолжительнее, чем больше отношение L/r , так как влияние индуктивности тем сильнее, чем больше э. д. с. самоиндукции по сравнению с падением напряжения на сопротивлении r . Величина $\tau = L/r$ называется постоянной времени цепи. Она имеет размерность времени, так как

$$[\tau] = [L/r] = \text{Ом} \cdot \text{с}/\text{Ом} = \text{с}.$$

Постоянная времени характеризует скорость протекания процесса, и, как будет показано ниже (гл. 15), через время τ с момента подключения источника с постоянным напряжением U сила тока в цепи рис. 6-21 достигает примерно 63% своего конечного значения $I = U/r$; через время 5τ ток достигает 99% конечного значения и процесс установления тока в цепи можно считать законченным.

Рассмотрим процесс короткого замыкания участка цепи с сопротивлением r и индуктивностью L (рис. 6-23), в которой до короткого замыкания проходил ток $I = U/r$ (рубильник переключается из положения 1 в положение 2).

Если цепь обладает только сопротивлением r (индуктивность ничтожно мала), то при коротком замыкании участка ток $i = I$ скачком падает до нуля. Если замкнуть нако-

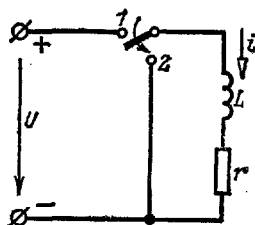


Рис. 6-23. Короткое замыкание участка цепи с индуктивностью и сопротивлением.

ротно участок (рис. 6-23) с сопротивлением r и индуктивностью L , то ток не спадает скачком до нуля, а начнет уменьшаться со значения $I = U/r$. С момента замыкания участка напряжение питания U отключится, ток i начнет уменьшаться и возникнет э. д. с. самоиндукции e_L . Следовательно, согласно второму закону Кирхгофа можно записать:

$$0 + e_L = ir \text{ или } -L di/dt = ir,$$

откуда сила тока в цепи

$$i = e_L/r = \frac{L di/dt}{r}.$$

В начальный момент замыкания участка ток $i = I$ и из последних уравнений следует, что э. д. с. самоиндукции $e_L = Ir = U$, а так как $di/dt = -ri/L < 0$, то э. д. с. самоиндукции по направлению совпадает с током, как бы заменяя отключенный источник. Таким образом, скорость изменения тока в начальный момент имеет наибольшее абсолютное значение

$$|di/dt| = rI/L = U/L.$$

Затем скорость изменения тока становится меньше (рис. 6-24), следовательно, уменьшается и э. д. с. самоиндукции.

Продолжительность процесса, как и при включении цепи, зависит от постоянной времени $\tau = L/r$. По прошествии времени 5τ ток уменьшается до значения, составляющего 1% начального значения $I = U/r$, и процесс можно считать закончившимся.

Пример 6-4. По цепи с сопротивлением $r = 6$ Ом и индуктивностью $L = 0,2$ Г проходит ток, увеличивающийся со скоростью $di/dt = 100$ А/с.

Определить напряжение на зажимах цепи в момент прохождения тока через значение $i = 20$ А.

Решение. По второму закону Кирхгофа для рассматриваемой цепи

$$u + e_L = ir,$$

откуда

$$u = ir - e_L = ir + L di/dt = 20 \cdot 6 + 0,2 \cdot 100 = 140 \text{ В.}$$

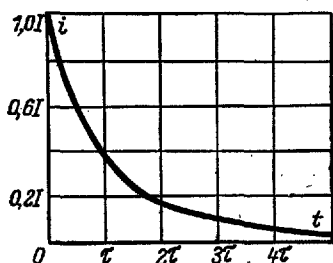


Рис. 6-24. График изменения тока при коротком замыкании цепи, изображенной на рис. 6-23.

Пример 6-5. Определить: 1) постоянную времени цепи по рис. 6-21, если индуктивность ее $L = 0,2$ Г, а сопротивление $r = 10$ Ом; 2) продолжительность установления тока в цепи после ее включения.

Решение. Постоянная времени

$$\tau = L/r = 0,2/10 = 0,02 \text{ с.}$$

Время установления тока в цепи

$$t = 5 \tau = 5 \cdot 0,02 = 0,1 \text{ с.}$$

6-8

Индуктивность катушки с ферромагнитным сердечником

Выше (6-27) дано определение индуктивности как отношение потокосцепления самоиндукции к силе тока катушки, т. е.

$$L = \Psi_L / I.$$

Далее из выражения э. д. с. самоиндукции (6-32) $e_L = -d\Psi/dt = -L di/dt$ следует определение индуктивности как отношение элементарного приращения потокосцепления к элементарному приращению силы тока, т. е.

$$L = d\Psi_L / di. \quad (6-34)$$

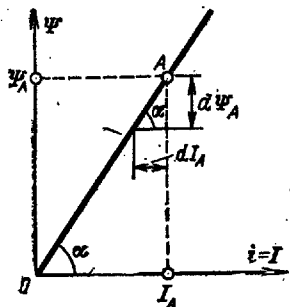


Рис. 6-25. График зависимости потокосцепления от тока для цепи без ферромагнитных сердечников.

При неизменной магнитной проницаемости среды (сердечника), когда потокосцепление Ψ пропорционально силе тока, индуктивность постоянна и не зависит от силы тока; ее значение одинаково при определении по любой из написанных формул. Это наглядно иллюстрирует график (рис. 6-25)

линейной зависимости потокосцепления от силы тока этой цепи; так как для произвольной точки A

$$L = \Psi_A / I_A = d\Psi_A / dI_A = M_L \operatorname{tg} \alpha,$$

где $M_L = M_\Psi / M_I$ и M_Ψ , M_I — масштабы потокосцепления и тока.

Если магнитная проницаемость среды, в которой создается магнитный поток, непостоянна, например в стальном сердечнике катушки, то зависимость потокосцепления Ψ от тока можно представить кривой, аналогичной кривой намагничивания (рис. 6-26), которая нелинейна. В этом

случае индуктивности, найденные по (6-27) и (6-34), будут различны.

Первая из них называется статической индуктивностью и определяется для произвольной точки A (рис. 6-26) отношением

$$L_{ст} = \Psi_A / I_A = M_L \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол наклона секущей, проведенной через точку A кривой $\Psi(I)$ и начало координат. Она, как уже отмечалось, применяется для определения потокоцепления по заданному постоянному току.

Вторая из них называется дифференциальной индуктивностью и для той же точки A (рис. 6-26) определяется отношением

$$L_A = d\Psi_A / dI_A = M_L \operatorname{tg} \beta,$$

где β — угол наклона касательной, проведенной через точку A кривой $\Psi(I)$. Она применяется для определения э. д. с. самоиндукции по заданной скорости изменения силы тока.

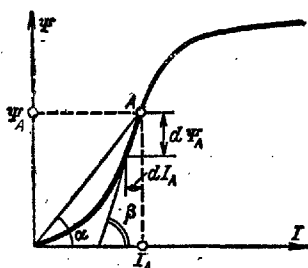


Рис. 6-26. График зависимости потокоцепления от тока для цепи с ферромагнитным сердечником.

6-9

Энергия магнитного поля

При включении цепи с сопротивлением r и индуктивностью L (рис. 6-21) на постоянное напряжение U сила тока в цепи от нуля увеличивается до установившегося значения $I = U/r$ (рис. 6-22). Увеличение тока в цепи сопровождается нарастанием в окружающей среде магнитного поля, в котором запасается определенное количество энергии, полученной от источника питания. Эта энергия проявляет себя, например, при коротком замыкании цепи (§ 6-7), обеспечивая прохождение тока до тех пор, пока не будет полностью преобразована в тепло (в сопротивлении цепи).

Для рассматриваемой цепи (рис. 6-27) согласно (6-33) по второму закону Кирхгофа можно написать:

$$U = ir + L \, di/dt.$$

Умножив обе части этого уравнения на произведение idt , получим:

$$Ui \, dt = i^2 r \, dt + Li \, di \quad (6-35)$$

и, заменив по (6-34) произведение $L di$ элементарным приращением потокоцепления $d\Psi$, окончательно запишем:

$$Ui dt = i^2 r dt + i d\Psi. \quad (6-35a)$$

Левая часть написанного уравнения $Ui dt$ представляет собой энергию, полученную цепью от источника питания за время dt . Первое слагаемое правой части уравнения $i^2 r dt$ представляет собой энергию, преобразованную за время dt в тепло в сопротивлении r (нагревание). Второе слагаемое правой части уравнения $Li di = i d\Psi$ представляет собой приращение энергии магнитного поля, вызванное увеличе-

нием силы тока на величину di и связанного с ним приращением потокоцепления $d\Psi$.

Суммируя приращения энергии при увеличении силы тока от нуля до значения I , получим энергию, запасенную в магнитном поле цепи:

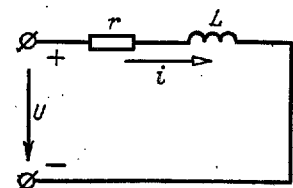


Рис. 6-27. Цепь с сопротивлением и индуктивностью.

$$W = \int_0^I Li di = LI^2/2 = \Psi I/2. \quad (6-36)$$

Если магнитное поле возбуждается током I , проходящим по кольцевой катушке (рис. 4-18), причем магнитная индукция B имеет одинаковое значение в любой точке сердечника катушки, то ее потокоцепление

$$\Psi = \Phi w = BS w.$$

Так как напряженность поля катушки $H = Iw/l$, то сила тока в катушке

$$I = Hl/w.$$

Подставив в (6-36) написанные выражения для потокоцепления и силы тока, получим выражение энергии магнитного поля кольцевой катушки:

$$W = \frac{\Psi I}{2} = \frac{BS w H l}{2 w} = \frac{BH}{2} Sl.$$

Учитывая, что произведение $Sl = V$ выражает объем сердечника, находим:

$$W = \frac{BH}{2} V = \frac{B^2}{2\mu_0} V. \quad (6-37)$$

Магнитная энергия, отнесенная к единице объема, или, что то же, плотность энергии

$$W_0 = \frac{W}{V} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (6-38)$$

Формула (6-38) применима как для однородного, так и для неоднородного магнитного поля.

Пример 6-6. Кольцевая катушка с сердечником из неферромагнитного материала ($\mu = 1$) имеет $w = 1600$ витков, длина средней магнитной линии $l = 200$ см, сечение сердечника $S = 20$ см². Определить энергию магнитного поля катушки, если по ее обмотке проходит ток $I = 50$ А.

Решение. Напряженность поля

$$H = Iw/l = 50 \cdot 1600/200 = 400 \text{ А/см} = 4 \cdot 10^4 \text{ А/м.}$$

Магнитная индукция поля

$$B = \mu_0 H = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^4 = 0,05 \text{ Т.}$$

Объем сердечника

$$V = Sl = 20 \cdot 200 = 4000 \text{ см}^3 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Энергия магнитного поля

$$W = \frac{HB}{2} V = \frac{4 \cdot 10^4 \cdot 0,05}{2} 4 \cdot 10^{-3} = 4 \text{ Дж.}$$

Пример 6-7. Определить энергию магнитного поля контура, если сила тока в нем $I = 60$ А, а потокосцепление $\Psi = 2 \cdot 10^{-2}$ Вб.

Решение. Энергия магнитного поля

$$W = \frac{\Psi I}{2} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 60}{2} = 0,6 \text{ Дж.}$$

6-10

Взаимная индукция

Два контура (катушки) называются **индуктивными** или **магнитно связанными**, если часть магнитного потока, созданного током первого контура, пронизывает второй контур, а часть магнитного потока, вызванного током второго контура, пронизывает первый контур.

При прохождении тока i_1 по виткам первой катушки возбуждается магнитный поток самоиндукции $\Phi_{L1} = \Phi_{11}$, пронизывающий витки этой катушки. Часть потока Φ_{11} , пронизывающая вторую катушку (рис. 6-28, а) и называемая потоком взаимной индукции $\Phi_{M1} = \Phi_{12}$, образует с витками второй катушки потокосцепление

$$\Psi_{12} = w_2 \Phi_{12}, \quad (6-39)$$

пропорциональное току i_1 в первой катушке.

Аналогично при прохождении тока i_2 по виткам второй катушки возникает магнитный поток самоиндукции $\Phi_{L2} = \Phi_{22}$, пронизывающий витки этой катушки. Часть потока Φ_{22} , пронизывающая первую катушку (рис. 6-28, б) и называемая потоком взаимной индукции $\Phi_{M2} = \Phi_{21}$, образует с витками первой катушки потокосцепление

$$\Psi_{21} = w_1 \Phi_{21}, \quad (6-40)$$

пропорциональное току i_2 .

Отношение потокосцепления второго контура (катушки) Ψ_{12} к силе тока i_1 первого контура (катушки), возбуждаю-

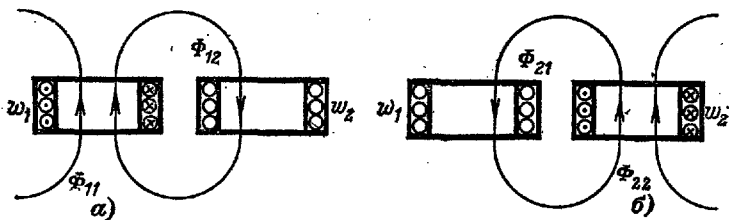


Рис. 6-28. Магнитная связь двух катушек.

щего это потокосцепление, называется **взаимной индуктивностью** контуров (катушек):

$$M_{12} = \Psi_{12}/i_1 = w_2 \Phi_{12}/i_1. \quad (6-41)$$

Аналогично

$$M_{21} = \Psi_{21}/i_2 = w_1 \Phi_{21}/i_2. \quad (6-42)$$

Для двух контуров (катушек) всегда имеет место равенство (принцип взаимности)

$$M_{12} = M_{21} = M, \quad (6-43)$$

поэтому необходимость в индексах отпадает.

Взаимная индуктивность, так же как и индуктивность, измеряется в генри (Г).

Взаимная индуктивность зависит от числа витков контуров (катушек), от их размеров, конфигурации, взаимного расположения и от магнитной проницаемости среды.

Из (6-41) и (6-42) следует, что

$$\Psi_{12} = M i_1 \text{ и } \Psi_{21} = M i_2. \quad (6-44)$$

При изменении тока i_1 изменяются:

1) потокосцепление первого контура

$$\Psi_{11} = w_1 \Phi_{11} = L_1 i_1$$

и в контуре индуцируется э. д. с. самоиндукции

$$e_{L1} = -d\Psi_{11}/dt = -L_1 di_1/dt; \quad (6-45)$$

2) потокосцепления второго контура Ψ_{12} (6-44) и в нем индуцируется э. д. с.

$$e_{M2} = -d\Psi_{12}/dt = -M di_1/dt, \quad (6-46)$$

которая называется э. д. с. взаимной индукции.

При изменении силы тока i_2 во втором контуре изменяются:

1) потокосцепление второго контура

$$\Psi_{22} = \omega_2 \Phi_{22} = L_2 i_2$$

и в контуре индуцируется э. д. с. самоиндукции

$$e_{L2} = -d\Psi_{22}/dt = -L_2 di_2/dt; \quad (6-47)$$

2) потокосцепление первого контура Ψ_{21} (6-44) и в нем индуцируется э. д. с. взаимной индукции

$$e_{M1} = -d\Psi_{21}/dt = -M di_2/dt. \quad (6-48)$$

Если первый контур с индуктивностью L_1 и сопротивлением r_1 подключен к источнику с напряжением U_1 , а второй (L_2, r_2) — к источнику U_2 , то согласно второму закону Кирхгофа

$$U_1 + e_{L1} \pm e_{M1} = i_1 r_1,$$

где знак «+» соответствует такому расположению контуров катушек и направлению токов i_1 и i_2 , при котором э. д. с. самоиндукции e_{L1} и взаимной индукции e_{M1} суммируются — согласное включение, а знак «—» такому расположению контуров и направлению токов, при котором э. д. с. вычитаются — встречное включение. Из написанного следует, что напряжение на зажимах первого контура

$$U_1 = i_1 r_1 + L_1 di_1/dt \pm M di_2/dt \quad (6-49)$$

и аналогично напряжение на зажимах второго контура

$$U_2 = i_2 r_2 + L_2 di_2/dt \pm M di_1/dt. \quad (6-50)$$

Энергия, запасенная в магнитном поле двух контуров (катушек) с токами i_1 и i_2 , определяется как сумма двух слагаемых вида (6-36):

$$W = \Psi_1 i_1 / 2 + \Psi_2 i_2 / 2.$$

Приняв во внимание, что полное потокоцепление первого контура

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{21} = L_1 i_1 \pm M i_2,$$

а второго контура

$$\Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{12} = L_2 i_2 \pm M i_1,$$

получим окончательное выражение энергии, запасаемой в магнитном поле двух контуров:

$$\begin{aligned} W &= (L_1 i_1 \pm M i_2) i_1 / 2 + (L_2 i_2 \pm M i_1) i_2 / 2 = \\ &= L_1 i_1^2 / 2 + L_2 i_2^2 / 2 \pm M i_1 i_2. \end{aligned} \quad (6-51)$$

В формулах полных потокоцеплений первого и второго контуров знак плюс ставится при одинаковом (согласном) направлении магнитных потоков Φ_{11} и Φ_{21} , пронизывающих первый контур, а также Φ_{22} и Φ_{12} , пронизывающих второй контур, т. е. в случае их суммирования. Если потоки Φ_{11} и Φ_{21} , а также Φ_{22} и Φ_{12} направлены встречно, т. е. в случае их вычитания, в формулах необходимо ставить знак минус.

В (6-51) третье слагаемое может быть положительным или отрицательным в зависимости от направлений потоков Φ_{11} и Φ_{21} , а также Φ_{22} и Φ_{12} . Таким образом, общая энергия системы может быть больше или меньше суммы энергии магнитных полей отдельных контуров.

Отношение потока Φ_{12} , пронизывающего второй контур, ко всему потоку Φ_{11} , созданному током первого контура:

$$\frac{\Phi_{12}}{\Phi_{11}} = \frac{\Psi_{12}/w_2}{\Psi_{11}/w_1} = \frac{\Psi_{12}w_1}{\Psi_{11}w_2} = \frac{M i_1 w_1}{L_1 i_1 w_2} = \frac{M w_1}{L_1 w_2}.$$

Аналогично отношение

$$\Phi_{21}/\Phi_{22} = M w_2 / L_2 w_1.$$

Каждое из написанных отношений показывает, какая часть потока, созданного током одного контура, сцепляется с другим контуром. Среднее геометрическое этих отношений

$$k = \sqrt{\frac{\Phi_{12}\Phi_{21}}{\Phi_{11}\Phi_{22}}} = \sqrt{\frac{M^2 w_1 w_2}{L_1 L_2 w_2 w_1}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (6-52)$$

представляет собой коэффициент индуктивной связи контуров (катушек). Так как $\Phi_{11} > \Phi_{12}$ и $\Phi_{22} > \Phi_{21}$, то $k < 1$. В некоторых случаях коэффициент связи приближается к единице, например у трансформаторов с замкнутым стальным сердечником.

Устройство, дающее возможность изменять магнитную связь двух катушек (контуров), называется вариометром. Вариометр обычно представляет собой две катушки (рис. 6-29), одна из которых может поворачиваться.

При последовательном соединении катушек зависимость между изменяющимся током и напряжением на каждой катушке или общим напряжением (питания) будет не одинаковой при различных взаимных расположениях катушек или способах их соединения. Соединение катушек называется согласным, если потоки Φ_{11} и Φ_{21} , и соответственно Φ_{22} и Φ_{12} суммируются, т. е. угол между векторами магнитной индукции B_1 поля, созданного током в первой ка-

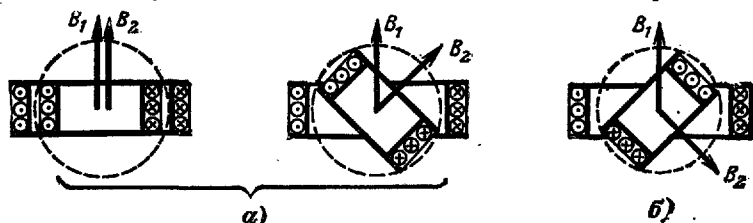


Рис. 6-29. Соединение катушек.

а — согласное; б — встречное.

тушке, и B_2 , поля, созданного током во второй катушке (рис. 6-29, а), не превышает 90° .

При последовательном согласном соединении катушек напряжение питания (на зажимах цепи)

$$U = i(r_1 + r_2) + L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + 2M \frac{di}{dt} = \\ = i(r_1 + r_2) + \frac{di}{dt} (L_1 + L_2 + 2M) = ir + L \frac{di}{dt},$$

где L_1 и r_1 — индуктивность и сопротивление первой катушки; L_2 и r_2 — индуктивность и сопротивление второй катушки; M — взаимная индуктивность катушек; $r = r_1 + r_2$ — общее сопротивление цепи (двух последовательно соединенных катушек) и индуктивность цепи или вариометра

$$L = L_1 + L_2 + 2M. \quad (6-53)$$

Соединение катушек называется встречным, если магнитные потоки катушек Φ_{11} и Φ_{21} , а также Φ_{22} и Φ_{12} вычитаются, т. е. угол между векторами магнитной индукции B_1 и B_2 двух катушек (рис. 6-29, б) больше 90° .

При встречном соединении катушек напряжение на зажимах цепи

$$U = i(r_1 + r_2) + L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - 2M \frac{di}{dt} = ir + L \frac{di}{dt},$$

где $r = r_1 + r_2$ и

$$L = L_1 + L_2 - 2M. \quad (6-54)$$

Если выполнить обмотку катушки двумя рядом расположенными изолированными жилами (или двумя изолированными проводами, расположенными параллельно), то потокосцепления

$$\Psi_{11} = \Psi_{22} = \Psi_{12} = \Psi_{21}.$$

Соединив концы (или начала) двух жил (проводов), получим встречное соединение обмоток, при котором $L_1 = L_2 = M$. При этом общая (совместная) индуктивность согласно (6-54) будет равна нулю:

$$L = L_1 + L_2 - 2M = 0.$$

Такие безындуктивные катушки, намотанные двойным проводом, называются б и ф и л я р н ы м и.

В ряде случаев явление взаимной индукции бывает полезным, например для передачи энергии из одной электрической цепи в другую (§ 11-11 и 14-9). Иногда оно крайне нежелательно, например, если параллельно воздушной линии электропередачи расположена линия связи, то в последней может индуцироваться э. д. с. взаимной индукции, создающая помехи в работе линии связи.

6-11

Электромагниты

Расположенный вблизи катушки с током стальной сердечник (рис. 6-30) намагничивается и втягивается в катушку под действием силы, которая растет с увеличением силы тока. Стальной сердечник, подобно контуру с током, расположенному в магнитном поле (§ 4-10), под действием электромагнитных сил стремится занять положение, при котором проходящий через него магнитный поток будет максимальным. Работа, производимая при перемещении сердечника, и увеличение энергии магнитного поля происходят за счет энергии источника питания катушки.

На рис. 6-31 показана схема устройства измерительного механизма электромагнитной системы. Стальной листок-сердечник 1, эксцентрично укрепленный на оси 2, удерживается пружиной 3 в начальном положении. При прохождении измеряемого тока по виткам неподвижной катушки 4 сердечник намагничивается и втягивается внутрь катушки, преодолевая противодействующий момент пружины 3. Каждой силе тока соответствует определенный угол поворота сердечника и указательной стрелки 5, укрепленной на одной оси с сердечником. Под концом стрелки укреплена шкала отсчета измеряемой величины тока (или напряжения).

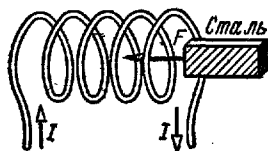


Рис. 6-30. Взаимодействие катушки с током и стального сердечника.

У электромагнитных механизмов обмотка 1 (рис. 6-32) часто накладывается на неподвижный стальной сердечник 2, к которому притягивается стальной якорь 3. Такое и подобные ему устройства называются электромагнитами и находят широкое и разнообразное применение в реле, автоматах, тормозных устройствах, подъемных кранах для погрузки лома черных металлов и т. д.

Сила, необходимая для отрыва якоря от сердечника, называется отрывной силой; рассчитаем ее величину.

Предположим, что внешняя сила F отрывает якорь (рис. 6-33) и он удаляется от сердечника на бесконечно малое расстояние db , тогда можно допустить, что магнитный поток в сердечнике и потоко-сцепление остаются неизменными. При удалении якоря от сердечника возрастают объем

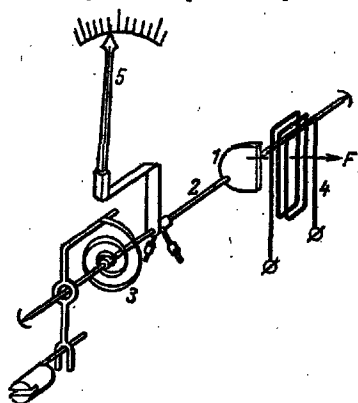


Рис. 6-31. Измерительный механизм электромагнитной системы.

магнитного поля на величину $dV = Sdb$ и энергия магнитного поля на величину dW за счет работы dA , выполненной внешней силой F при перемещении якоря. От источника питания дополнительная энергия в магнитное поле не поступает, так как потоко-сцепление принято неизменным (6-35а).

Таким образом, приращение энергии магнитного поля

$$dW = dA = F db.$$

По (6-37) энергия магнитного поля $W = B^2 V / (2\mu_0)$, и так как для воздушного зазора $\mu = 1$, то приращение энергии поля

$$dW = B^2 dV / (2\mu_0) = F db,$$

откуда определяется отрывная сила электромагнита

$$F = \frac{B^2}{2\mu_0} \frac{dV}{db} = \frac{B^2}{2\mu_0} S, \quad (6-55)$$

где S — сечение полюса.

Подставив численное значение магнитной постоянной μ_0 , окончательно получим выражение отрывной силы, Н,

$$F = \frac{10^7}{2 \cdot 4\pi} B^2 S \approx 4 \cdot 10^5 B^2 S, \quad (6-56)$$

где B — магнитная индукция, Т; а S — сечение полюса, м².

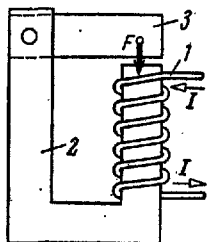


Рис. 6-32. Электромагнит.

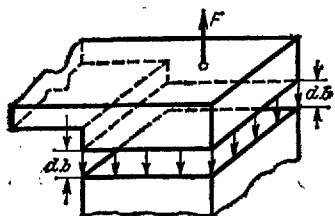


Рис. 6-33. К определению отрывной силы электромагнита.

Выражая магнитную индукцию в гауссах, а площадь сечения полюса в квадратных сантиметрах, получаем:

$$F = (B/5000)^2 S; \quad (6-57)$$

здесь F — сила электромагнита, кгс.

Если сердечник электромагнита работает в ненасыщенном состоянии, то изменением силы тока можно изменять магнитную индукцию, а следовательно, и отрывную силу электромагнита.

Пример 6-8. Сечение внутреннего полюса электромагнита (рис. 6-34) $S_{\text{вн}} = 1400 \text{ см}^2$, магнитная индукция в нем $B_{\text{вн}} = 1,5 \text{ Т}$. Сечение наружного кольцевого полюса $S_{\text{нар}} = 2100 \text{ см}^2$. Определить отрывную силу электромагнита.

Решение. Так как магнитный поток, пронизывающий оба полюса, один и тот же, то $B_{\text{вн}} S_{\text{вн}} = B_{\text{нар}} S_{\text{нар}}$.

Магнитная индукция под наружным полюсом

$$B_{\text{нар}} = B_{\text{вн}} \frac{S_{\text{вн}}}{S_{\text{нар}}} = 1,5 \frac{1400 \cdot 10^{-4}}{2100 \cdot 10^{-4}} = 1 \text{ Т}.$$

Отрывная сила электромагнита

$$F = F_{\text{вн}} + F_{\text{нар}} = 4 \cdot 10^5 (1,5^2 \cdot 0,14 + 1^2 \cdot 0,21) = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Н} = 21 \text{ 000 кгс}.$$

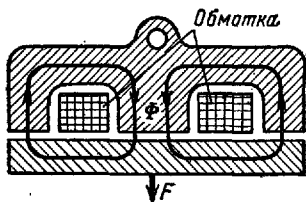


Рис. 6-34. Электромагнит к примеру 6-8.

6-12

Магнетогидродинамический генератор

Принцип работы магнетогидродинамического генератора (МГД-генератора) заключается в следующем.

Подогретый и обогащенный кислородом воздух поступает в камеру сгорания, в которой происходит сгорание газообразного топлива при температуре около 2500°С . Образующаяся при такой высокой температуре газовая плазма обладает высокой проводимостью. Из камеры сгорания плазма поступает со скоростью v в магнетогидродинамический канал K (рис. 6-35). Этот канал прямоугольного сечения образуется двумя парами стенок. Одна пара стенок $\mathcal{E}$ — металлическая является электродами МГД-генератора, другая пара стенок выполнена из изоляционного материала. Электромагниты возбуждения создают в указанном канале магнитное поле с индукцией B , направленное перпендикулярно оси канала $00'$.

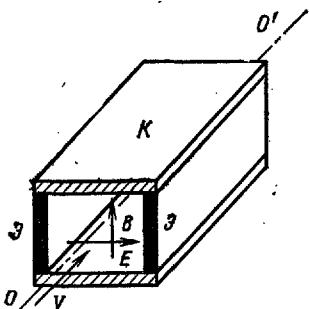


Рис. 6-35. Принципиальная схема МГД-генератора.

При движении плазмы в магнитном поле в направлении оси канала (рис. 6-35) в ней возникает электрическое поле, направленное перпендикулярно направлению движения

плазмы и направлению магнитного поля. Таким образом, между электродами ЭЭ возникает э. д. с. генератора, определяемая индуктированным электрическим полем E .

При подключении к электродам генератора приемников они получают электрическую энергию от МГД-генератора. При работе генератора под нагрузкой возникают силы, направленные против движения плазмы, так что увеличение нагрузки вызывает уменьшение скорости движения плазмы. Следовательно, подведенная к генератору тепловая энергия сначала превращается в энергию движения плазмы, а затем преобразуется в электрическую.

Коэффициент полезного действия установки, оборудованной МГД-генераторами, может быть доведен до 50—55%, что значительно выше, чем у обычных тепловых электростановок.

Глава седьмая

Электрическое поле

7-1

Закон Кулона

Опытами Кулона установлено, что электрическое поле точечного заряда Q_1 действует на помещенный в точке A (рис. 7-1) второй точечный пробный заряд Q_2 с силой F_{12} , прямо пропорциональной величинам обоих зарядов, обратно пропорциональной квадрату расстояния R между ними и зависящей от среды, в которой находятся заряды. Таким образом, по закону Кулона сила

$$F_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi R^2 \epsilon_a}. \quad (7-1)$$

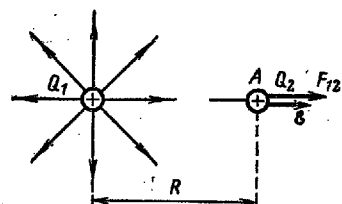


Рис. 7-1. Электрическое поле точечного заряда.

Коэффициент ϵ_a , называемый абсолютной диэлектрической проницаемостью среды,

учитывает влияние на силу заряженных частиц среды, в которой находятся заряды Q_1 и Q_2 ; его численное значение зависит от системы единиц.

Величина

$$\epsilon_1 = \frac{Q_1}{4\pi R^2 \epsilon_a} \quad (7-2)$$

представляет собой напряженность электрического поля заряда Q_1 в точке A . Так как поле симметрично, то во всех точках, удаленных от заряда Q_1 на равные расстояния R , напряженность поля одинакова. Направление вектора напряженности поля $\mathcal{E}$ в точке A совпадает с направлением прямой, проходящей через точечные заряды Q_1 и Q_2 , и определяется по направлению силы F_{12} , действующей на положительный пробный заряд Q_2 .

Таким образом, силу, действующую на заряд Q_2 , можно представить произведением напряженности поля заряда Q_1 и заряда Q_2

$$F_{12} = \mathcal{E}_1 Q_2. \quad (7-3)$$

С другой стороны заряд Q_1 расположен в поле заряда Q_2 и на заряд Q_1 действует сила

$$F_{21} = \mathcal{E}_2 Q_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_a R^2}, \quad (7-3a)$$

т. е. равная силе, с которой поле заряда Q_1 действует на заряд Q_2 .

Силы взаимодействия (кулоновские силы) вызывают притяжение разноименных зарядов и отталкивание одноименных (рис. 7-2).

Если электрическое поле создается несколькими зарядами, то для определения силы и напряженности поля в среде, в которой ϵ_a не зависит от напряженности поля (линейная среда), применяют принцип наложения. Например, сила, с которой заряды Q_1 и Q_2 действуют на пробный точечный заряд q , находя-

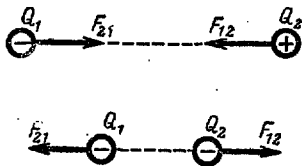


Рис. 7-2. Силы взаимодействия между электрическими зарядами (кулоновские силы).

щийся в точке B , равна геометрической сумме двух сил: во-первых, силе F_1 , с которой Q_1 действует на заряд q в отсутствии Q_2 , и, во-вторых, силе F_2 , с которой Q_2 действует на заряд q в отсутствии Q_1 . Силы F_1 и F_2 определяются по выражению, аналогичному (7-1). Поэтому и напряженность поля зарядов Q_1 и Q_2 в точке B или любой другой точке поля определяется как геометрическая сумма или сумма векторов

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_1 + \vec{\mathcal{E}}_2,$$

где $\vec{\mathcal{E}}_1$ и $\vec{\mathcal{E}}_2$ — векторы напряженности поля зарядов Q_1 и Q_2 , значения которых определяются по (7-2), а направления

совпадают с направлениями сил F_1 и F_2 , действующих на положительный пробный заряд (рис. 7-3).

Из (7-2) определяется единица измерения абсолютной проницаемости среды в системе СИ

$$[\epsilon_a] = \left[\frac{Q}{4\pi R^2 \mathcal{E}} \right] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2 \cdot \text{В/м}} = \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}} = \frac{\Phi}{\text{м}}.$$

Единица Кл/В называется фарада (Ф) — единица емкости (см. § 7-8), единица абсолютной диэлектрической проницаемости называется фарада на метр (Ф/м).

Различные среды имеют разные значения абсолютной диэлектрической проницаемости. Абсолютная диэлектри-

ческая проницаемость вакуума, называемая электрической постоянной, в системе СИ

$$\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.} \quad (7-4)$$

Диэлектрические проницаемости других сред обычно измеряют в относительных единицах (по отношению к электрической постоянной). Отношение аб-

солютной диэлектрической проницаемости среды к электрической постоянной ϵ_0 называется относительной диэлектрической проницаемостью или просто диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon = \epsilon_a / \epsilon_0 \text{ и } \epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \epsilon \text{ Ф/м.} \quad (7-5)$$

Диэлектрическая проницаемость ϵ — отвлеченная величина. Для вакуума $\epsilon = 1$, для воздуха практически $\epsilon = 1$, для дистиллированной воды $\epsilon = 80$, для большинства веществ и материалов ϵ выражается числами от 1 до 10.

Пример 7-1. Два точечных заряда $Q_1 = Q_2 = 6 \cdot 10^{-11}$ Кл расположены в воздухе на расстоянии 12 см друг от друга. Определить напряженность поля этих зарядов в точке В (рис. 7-3), если она находится на перпендикуляре ВГ к прямой АВ и если отрезки АГ = ГВ = ГВ, и силу F, действующую на точечный заряд $q = 2 \cdot 10^{-11}$ Кл, находящийся в точке В.

Решение. Определим расстояния R_1 между точками А и В и равное ему расстояние R_2 между точками В и В:

$$R_1 = R_2 = \sqrt{(AG)^2 + (GB)^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{2} \cdot 6 \text{ см} = \sqrt{2} \cdot 0,06 \text{ м.}$$

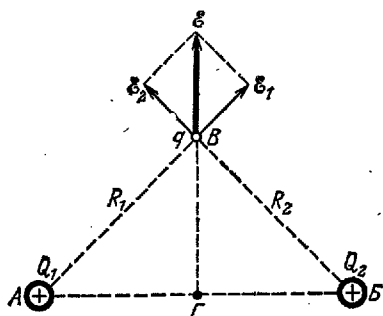


Рис. 7-3. К примеру 7-1.

По (7-2) напряженность $\mathcal{E}_1$ в точке B , созданная зарядом Q_1 ,

$$\mathcal{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi R^2 \varepsilon_0} = \frac{6 \cdot 10^{-11}}{4 \cdot 3,14 (\sqrt{2} \cdot 0,06)^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 75 \text{ В/м.}$$

Так как $R_1 = R_2$ и $Q_1 = Q_2$, то $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 75 \text{ В/м.}$

Векторы $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ расположены под углом 90° друг к другу (рис. 7-3), и так как результирующий вектор равен геометрической сумме слагающих, то

$$\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2} = \sqrt{2\mathcal{E}_1^2} = \sqrt{2 \cdot 75^2} \approx 106 \text{ В/м.}$$

По (7-3) сила $F = \mathcal{E}q = 106 \cdot 2 \cdot 10^{-11} = 2,12 \cdot 10^{-9} \text{ Н.}$

7-2

Теорема Остроградского — Гаусса

Произведение напряженности электрического поля $\mathcal{E}$ и такой плоской площадки S , во всех точках которой напряженность поля одинакова и перпендикулярна к ней, составляет поток N вектора напряженности через площадку S :

$$N = \mathcal{E}S. \quad (7-6)$$

Если вектор напряженности не перпендикулярен к площадке, то необходимо определить составляющую вектора напряженности $\mathcal{E}_n$, перпендикулярную к площадке (рис. 7-4):

$$N = \mathcal{E}_n S = \mathcal{E} \cos \beta S.$$

При вычислении потока через произвольную поверхность площадью S в неоднородном поле эту поверхность следует разбить на малые плоские элементы dS , в пределах каждого из которых напряженность поля можно считать одинаковой, поток через отдельную элементарную площадку

$$dN = \mathcal{E}_n dS.$$

Поток вектора напряженности через произвольную замкнутую поверхность находится суммированием элементарных потоков:

$$N = \oint \mathcal{E}_n dS. \quad (7-7)$$

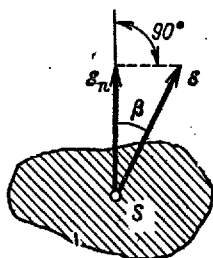


Рис. 7-4. Нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля.

Единицу измерения потока вектора напряженности найдем из формулы (7-6):

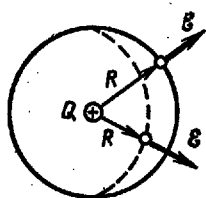
$$[N] = [\mathcal{E}S] = \frac{B}{m} \cdot m^2 = B \cdot m.$$

В качестве примера найдем поток вектора напряженности поля точечного заряда Q , помещенного в центре сферической (шаровой) поверхности радиуса R (рис. 7-5).

Напряженность поля заряда Q одинакова во всех точках этой поверхности и согласно (7-2)

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2}. \quad (7-8)$$

Так как векторы напряженности перпендикулярны к сферической поверхности, то $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}$ и проходящий через поверхность поток вектора напряженности поля



$$N = \oint \mathcal{E}_n dS = \mathcal{E} \oint dS = \mathcal{E} 4\pi R^2,$$

так как $\oint dS = 4\pi R^2$ — площадь сферы.

Подставив в написанную формулу выражение $\mathcal{E}$, получим:

$$N = \oint \mathcal{E}_n dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (7-9)$$

Как видно из (7-9), полученное для частного случая сферической поверхности выражение потока не зависит ни от формы поверхности, ни от места расположения зарядов внутри нее. Поэтому формула (7-9) справедлива для замкнутой поверхности любой формы и произвольно расположенных внутри нее зарядов, суммарная величина которых равна Q .

Итак, поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность равен отношению суммы зарядов, расположенных внутри этой поверхности, к абсолютной диэлектрической проницаемости среды. Полученное соотношение называют теоремой Остроградского — Гаусса.

Наглядно поток изображают электрическими линиями, так чтобы вектор напряженности поля в любой точке был касательным к электрической линии, проведенной через эту точку.

Электрические линии поля неподвижных зарядов начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных (см. также § 1-1). Число линий, пересекающих данную площадку, выбирают пропорциональным величине потока N через эту площадку. На рис. 7-1 показаны электрические линии точечного заряда $+Q_1$.

Электрическое поле неподвижных зарядов называют электростатическим.

7-3

Однородное электрическое поле

Вокруг бесконечной плоской равномерно заряженной с одинаковой плотностью заряда проводящей (металлической) пластины вследствие симметрии существует однородное электрическое поле (рис. 7-6). Электрические линии этого поля перпендикулярны к поверхности пластины.

Действительно, предположим, что электрические линии поля, а следовательно, и векторы напряженности направлены не перпен-

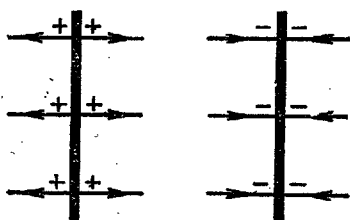


Рис. 7-6. Электрические поля плоских пластин, заряженных зарядами противоположных знаков $+Q$ и $-Q$.

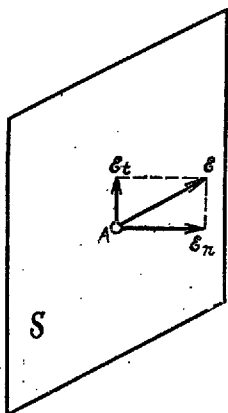


Рис. 7-7. Нормальная E_n и тангенциальная E_t составляющие вектора напряженности поля.

дикулярно к заряженной плоскости. Тогда в каждой ее точке вектор напряженности можно будет разложить на две составляющие: нормальную E_n , т. е. перпендикулярную к поверхности, и тангенциальную E_t , направленную вдоль поверхности (рис. 7-7). Под действием тангенциальных составляющих должно было бы происходить перемещение зарядов (ток) по поверхности пластины. Но рассматриваемое в этой главе электростатическое поле — это поле неподвиж-

ных зарядов и, следовательно, тангенциальных составляющих быть не может, т. е. векторы напряженности и электрические линии поля могут быть только перпендикулярными к проводящей поверхности.

Электрическое поле двух плоских параллельных пластин, заряженных разноименно (рис. 7-8), можно получить наложением полей отдельных пластин. Между пластинами электрические линии полей обеих пластин направлены одинаково. Вне пластин линии напряженности двух пластин направлены встречно и при их одинаковой плотности напряженность поля здесь равна нулю. Такие две металлические пластины, разделенные диэлектриком (изолятором), представляют собой плоский конденсатор.

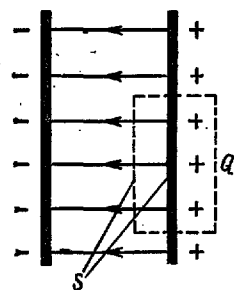


Рис. 7-8. Поле плоского конденсатора.

представляют собой плоский конденсатор.

Напряженность поля между пластинами (электродами) плоского конденсатора пропорциональна поверхностной плотности заряда σ , т. е. заряду, приходящемуся на единицу поверхности пластины.

Выделим на одной из пластин конденсатора площадку S (рис. 7-8), заряд которой

$$Q = \sigma S.$$

Проведем вокруг заряда Q замкнутую поверхность в виде параллелепипеда со сторонами, параллельными пластине, равными S (на рис. 7-8 показана пунктиром). Поток вектора напряженности (7-9) через эту поверхность

$$N = Q/\epsilon_a = \sigma S/\epsilon_a,$$

и так как для однородного поля между пластинами

$$N = \mathcal{E}S,$$

то

$$\mathcal{E}S = \sigma S/\epsilon_a,$$

а напряженность поля между пластинами

$$\mathcal{E} = \sigma/\epsilon_a = Q/\epsilon_a S. \quad (7-10)$$

При конечных размерах пластин практически однородное поле получается при малом расстоянии между пластинами по сравнению с их линейными размерами. У краев пластин поле всегда неоднородно.

Для однородного поля существует простая связь между напряженностью поля $\mathcal{E}$ и напряжением U ; согласно (1-4)

$$\mathcal{E} = U/l,$$

где предполагается, что l — это расстояние между точками, взятыми на одной и той же электрической линии.

Таким образом, напряженность однородного электрического поля равна отношению напряжения между двумя точками электрической линии к расстоянию между ними.

В общем случае для неоднородного поля величина напряженности электрического поля определяется отношением напряжения dU между концами отрезка dl электрической линии

$$\mathcal{E} = dU/dl,$$

откуда напряжение dU между двумя точками поля, находящимися на одной электрической линии на расстоянии dl ,

$$dU = \mathcal{E} dl.$$

Если две точки находятся на расстоянии dl не на одной электрической линии, то нужно разложить вектор $\mathcal{E}$ на две составляющие: перпендикулярную отрезку dl и параллельную отрезку dl или тангенциальную $\mathcal{E}_t$. Напряжение

$$dU = \mathcal{E}_t dl.$$

Для вычисления напряжения между двумя произвольными точками M и N весь путь между этими точками нужно разбить на отрезки dl и просуммировать напряжения dU :

$$U = \varphi_M - \varphi_N = \int \mathcal{E}_t dl.$$

В электростатическом поле, как и в электрическом поле в проводящей среде при постоянном токе (§ 1-4), это напряжение не зависит от пути между точками M и N . Такие поля называются потенциальными.

Электростатическое поле внутри проводника отсутствует. В металлическом проводнике, например в пластине, помещенной во внешнее электрическое поле (рис. 7-9) с напря-

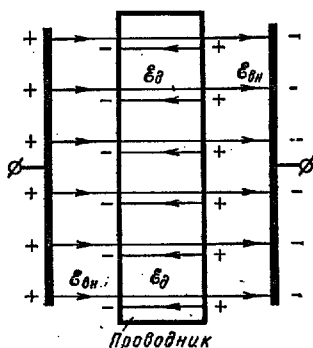


Рис. 7-9. Проводник в электрическом поле.

женностью $\mathcal{E}_{\text{вн}}$, свободные электроны под действием поля будут перемещаться в направлении, противоположном направлению внешнего поля. Вследствие этого на одной стороне пластины накапливается отрицательный заряд, на другой — положительный. Разделение зарядов приводит к возникновению добавочного электрического поля с напряженностью $\mathcal{E}_{\text{д}}$, направленного противоположно внешнему полю. Разделение зарядов продолжается до тех пор, пока

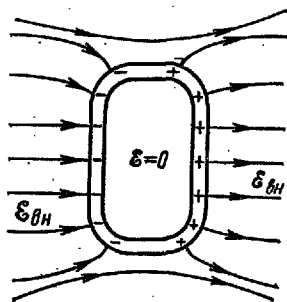


Рис. 7-10. Экран.

созданное ими внутри проводника дополнительное поле не компенсирует внешнее поле, следовательно, результирующее поле внутри проводника при неподвижных зарядах будет равно нулю:

$$\mathcal{E}_{\text{вн}} + \mathcal{E}_{\text{д}} = 0.$$

Явление разделения зарядов на проводящих телах под влиянием внешнего электрического поля называется электростатической индукцией. При помощи электростатической индукции, например, защищают какую-либо часть пространства от электростатического поля. Для этого защищаемое пространство окружают замкнутой проводящей оболочкой — экраном (рис. 7-10). Вследствие электростатической индукции на внешней поверхности оболочки появятся электрические заряды, но в самой оболочке и внутри нее поле отсутствует. В технике для экранирования вместо сплошных оболочек часто применяют оболочки из металлических сеток.

7-4

Диэлектрики в электрическом поле

Рассмотрим подробнее процессы в диэлектрике, помещенном во внешнее электрическое поле, например между разноименно заряженными электродами.

У одной группы диэлектриков, называемых неполярными, при отсутствии внешнего (основного) поля положительно и отрицательно заряженные частицы, входящие в молекулы (атомы), как бы уравнивают друг друга (собственное поле отсутствует); молекулы их являются электрически нейтральными или неполярными (рис. 7-11, а). У таких диэлектриков под действием внешнего поля про-

исходит смещение электрического центра отрицательных зарядов (электронов) навстречу направлению поля (рис. 7-11, б). С точки зрения электрических свойств такая молекула во внешнем поле может рассматриваться как ди-

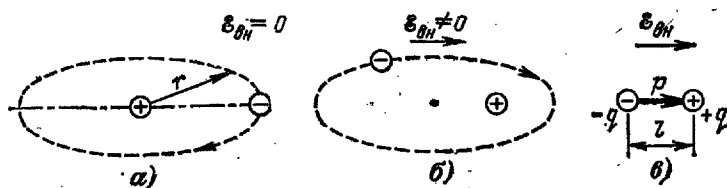


Рис. 7-11. неполярная молекула.

а — при отсутствии внешнего поля; б — при наличии внешнего поля; в — ее эквивалентный диполь.

поль, т. е. пара разноименных точечных зарядов $+q$ и $-q$ (рис. 7-11, в), находящихся на небольшом расстоянии l друг от друга (плечо диполя). Заряды, образующие диполи диэлектрика, называют связанными, а произведение величины заряда q и плеча l — электрическим моментом диполя:

$$p = ql.$$

Электрический момент рассматривают как векторную величину, направленную от отрицательного заряда диполя к положительному.

Таким образом, неполярные молекулы во внешнем поле становятся диполями, электрические моменты p которых стремятся расположиться в направлении внешнего поля, и диэлектрик поляризуется (рис. 7-12). При исчезновении внешнего поля смещение исчезает и молекулы снова становятся электрически нейтральными. Рассмотренная поляризация называется деформационной.

У другой группы диэлектриков, называемых полярными, молекулы всегда полярны (электрические центры электронов в молекулах расположены несимметрично относительно ядер). Полярную молекулу можно считать диполем с зарядами $+q$ и $-q$ и дипольным моментом $p = ql$. При отсут-

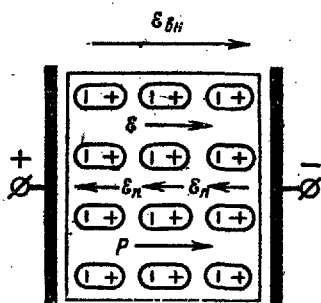


Рис. 7-12. Поляризованный диэлектрик.

ствии внешнего поля все диполи расположены хаотически и суммарный электрический момент диэлектрика равен нулю. При появлении внешнего поля его силы стремятся ориентировать диполи в направлении поля (рис. 7-13). В результате диполи несколько повернутся в направлении поля и диэлектрик приобретет электрический момент. Такая поляризация называется ориентационной.

При той и другой поляризации диэлектрика поле его диполей, или поле поляризации $\mathcal{E}_n$ (рис. 7-12), направлено от положительных зарядов к отрицательным, т. е. противоположно внешнему полю $\mathcal{E}_{вн}$. Напряженность результи-

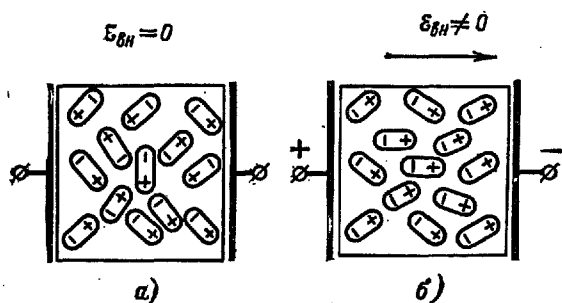


Рис. 7-13. Полярные молекулы диэлектрика.

а — при отсутствии внешнего поля; б — в присутствии внешнего поля.

рующего поля $\mathcal{E}$, равная алгебраической сумме напряженностей внешнего поля и поля поляризации, меньше напряженности внешнего поля, т. е.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{вн} - \mathcal{E}_n.$$

Чем сильнее поляризуется диэлектрик, тем слабее результирующее поле, т. е. меньше его напряженность $\mathcal{E}$ при том же внешнем поле, а следовательно, тем больше его диэлектрическая проницаемость ϵ .

У диэлектрика, находящегося в периодически изменяющемся внешнем электрическом поле, смещение зарядов так же будет периодическим, что вызывает нагревание диэлектрика. Чем с большей частотой изменяется внешнее поле, тем сильнее нагрев диэлектрика. Это явление применяется для нагрева и сушки влажных материалов, для получения или ускорения химических реакций, требующих повышенной температуры.

Мощность, идущая на нагрев диэлектрика при периодическом смещении зарядов диэлектрика (связанных зарядов) и отнесенная к единице объема, называется удельными диэлектрическими потерями.

7-5

Электрическое смещение

Выше было показано, что вследствие поляризации диэлектрика, т. е. смещения его связанных зарядов, изменяется напряженность электрического поля. Результирующее влияние диэлектрика на электрическое поле оценивают векторной величиной, называемой п о л я р и з о в а н н о с т ь ю или интенсивностью поляризации P .

Средняя интенсивность поляризации определяется как сумма дипольных моментов в единице объема диэлектрика, т. е.

$$P = \Sigma p/V. \quad (7-11)$$

Единица измерения поляризации

$$[P] = [ql/V] = \text{Кл} \cdot \text{м}/\text{м}^3 = \text{Кл}/\text{м}^2.$$

Вектор поляризованности направлен навстречу вектору напряженности электрического поля связанных зарядов $\mathcal{E}_n$ (рис. 7-12).

Вектор поляризованности для большинства диэлектриков (за исключением группы сегнетоэлектриков) пропорционален напряженности электрического поля

$$P = k\epsilon_0 \mathcal{E} \quad (7-12)$$

и его направление совпадает с направлением внешнего $\mathcal{E}_{\text{вн}}$ и результирующего $\mathcal{E}$ полей (рис. 7-12).

Коэффициент k называется э л е к т р и ч е с к о й в о с п р и м ч и в о с т ь ю диэлектрика и характеризует его способность поляризоваться.

При расчетах электрических полей в диэлектриках с различными диэлектрическими проницаемостями пользуются ещё вектором э л е к т р и ч е с к о г о с м е щ е н и я.

Электрическое смещение D связано с напряженностью электрического поля простым соотношением

$$D = \epsilon_a \mathcal{E} = \epsilon \epsilon_0 \mathcal{E}, \quad (7-13)$$

откуда можно определить единицу измерения электрического смещения:

$$[D] = [\epsilon_a \mathcal{E}] = \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}} \cdot \frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2},$$

т. е. такая же, как у вектора поляризации и у поверхностной плотности зарядов на электродах:

$$[\sigma] = [Q/S] = \text{Кл/м}^2.$$

Электрическое смещение и поверхностная плотность свободных зарядов совпадают по величине на поверхностях всех проводящих тел, находящихся в электростатическом поле. Например, у внутренней поверхности пластины плоского конденсатора (рис. 7-8) напряженность однородного электрического поля, как и в любой точке однородного поля (7-10),

$$\mathcal{E} = Q/\varepsilon_a S,$$

а электрическое смещение в любой точке поля, в том числе и у металлической поверхности,

$$D = \varepsilon_a \mathcal{E} = Q/S = \sigma, \quad (7-13a)$$

т. е. совпадает с поверхностной плотностью заряда на пластине.

Из (7-13a) следует, что при заданной плотности поверхностных свободных зарядов на электродах электрическое смещение в однородном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε_a не зависит от величины ε_a , а напряженность электрического поля зависит. Поэтому можно сказать, что напряженность электрического поля определяется и свободными (на электродах) и связанными (в диэлектриках) зарядами, т. е. поляризацией диэлектрика, а электрическое смещение в однородном диэлектрике не зависит от связанных зарядов.

Связь между тремя векторными величинами, характеризующими электрическое поле в диэлектрике, выражается равенством

$$D = \varepsilon_0 \mathcal{E} + P, \quad (7-14)$$

в котором первый вектор зависит от свободных зарядов (внешнее поле), второй от свободных и связанных (результатирующее поле), третий от связанных (поле поляризации). Как было выше отмечено, суммарное поле по величине меньше внешнего (рис. 7-12).

Приняв во внимание (7-12) и (7-13), получим:

$$D = \varepsilon_0 \mathcal{E} + P = \varepsilon_0 \mathcal{E} + \varepsilon_0 k \mathcal{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathcal{E}, \quad (7-15)$$

откуда диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon = 1 + k,$$

а электрическая восприимчивость

$$k = (\epsilon - 1).$$

Рассмотрим еще электрическое поле заряженного металлического шара (рис. 7-14), радиус которого $R_{\text{ш}}$. Известно, что электрический заряд Q находится на поверхности такого шара. Поверхностная плотность заряда

$$\sigma = Q/S = Q/(4\pi R_{\text{ш}}^2).$$

Поле шара с зарядом Q совпадает с полем равного ему по величине точечного заряда Q , расположенного в центре шара; поэтому напряженность поля на расстоянии R от центра шара и, в частности, у его наружной поверхности, т. е. при $R = R_{\text{ш}}$,

$$\mathcal{E} = Q/(4\pi\epsilon_a R^2) = Q/(4\pi\epsilon_a R_{\text{ш}}^2),$$

а электрическое смещение

$$D = \epsilon_a \mathcal{E} = \frac{Q}{(4\pi R_{\text{ш}}^2)} = \sigma, \quad (7-16)$$

т. е. равно поверхностной плотности заряда.

Этот же результат можно получить при помощи теоремы Остроградского — Гаусса для электрического смещения.

В § 7-2 было показано, что поток вектора напряженности электрического поля точечного заряда через шаровую поверхность, центр которой совпадает с точкой, где находится заряд,

$$N = \oint \mathcal{E} dS = \mathcal{E} 4\pi R^2.$$

Так как $\mathcal{E} = D/\epsilon_a$, то поток вектора напряженности поля через шаровую поверхность

$$N = \oint \frac{D}{\epsilon_a} dS = \frac{D}{\epsilon_a} \oint dS = \frac{D}{\epsilon_a} 4\pi R^2.$$

Аналогично потоку вектора напряженности поля (7-7) применяется понятие потока вектора электрического смещения.

Поток вектора смещения N_D в однородном поле равен произведению вектора смещения D и площадки S , во всех

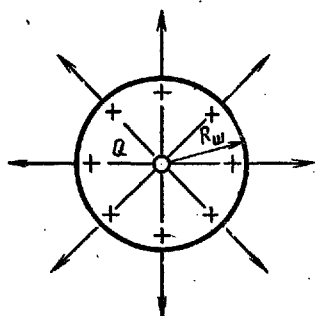


Рис. 7-14. Поле заряженного шара и поле точечного заряда $+Q$, расположенного в центре шара.

точках которой вектор смещения имеет одинаковое значение и направлен перпендикулярно к ней, т. е.

$$N_D = DS. \quad (7-17)$$

При неоднородном поле произвольную поверхность площадью S разбивают на элементарные, в пределах каждой из которых смещение одинаково; тогда поток вектора смещения через такую элементарную площадку

$$dN_D = D_n dS,$$

где D_n — нормальная составляющая вектора смещения (перпендикулярная к элементарной площадке).

Поток вектора смещения через произвольную замкнутую поверхность находится суммированием элементарных потоков

$$N_D = \oint dN_D = \oint D_n dS. \quad (7-18)$$

Так как $D = \epsilon_a \mathcal{E}$ и соответственно $D_n = \epsilon_a \mathcal{E}_n$, то поток вектора смещения N_D (7-18) больше потока напряженности N (7-7) в ϵ_a раз, так что

$$N_D = \epsilon_a N = \epsilon \epsilon_0 N. \quad (7-19)$$

В частности, в случае шаровой поверхности

$$D 4\pi R^2 = \epsilon_a \mathcal{E} 4\pi R^2. \quad (7-19a)$$

Заменяя в последней формуле напряженность поля его выражением (7-8), получаем:

$$N_D = \oint D_n dS = \epsilon_a \frac{Q}{4\pi \epsilon_a R^2} 4\pi R^2 = Q. \quad (7-20)$$

Таким образом, поток вектора электрического смещения через шаровую поверхность равен заряду, расположенному внутри поверхности.

Полученное выражение $N_D = Q$ справедливо для замкнутой поверхности любой формы, охватывающей заряд, как в однородной среде с $\epsilon = \text{const}$, так и в среде, диэлектрическая проницаемость которой неодинакова в различных участках среды, например в двухслойном конденсаторе.

Из (7-19a) и (7-20) можно непосредственно написать выражение электрического смещения у поверхности шара радиуса $R_{\text{ш}}$

$$D = Q / (4\pi R_{\text{ш}}^2),$$

что согласуется с (7-16).

Соотношение (7-20), как и (7-9), называют теоремой Остроградского — Гаусса. Для расчетов электрических полей в неоднородных средах теорема Остроградского — Гаусса в форме (7-20) более удобна, чем (7-9), так как в (7-20) не входит проницаемость среды.

7-6

Электрическая прочность диэлектрика

При нормальных условиях диэлектрик (изолятор) обладает ничтожной электропроводностью. Это свойство сохраняется до тех пор, пока напряженность внешнего электрического поля не достигнет значения, при котором произойдет пробой диэлектрика, т. е. местное разрушение его с образованием канала высокой проводимости.

Напряженность поля, при котором происходит пробой диэлектрика, называется электрической прочностью диэлектрика $\mathcal{E}_{\text{пр}}$, а напряжение — пробивным $U_{\text{пр}}$. Отношение пробивного напряжения к толщине h диэлектрика в месте пробоя равно напряженности поля при пробое, т. е. электрической прочности

$$\mathcal{E}_{\text{пр}} = U_{\text{пр}}/h. \quad (7-21)$$

Электрическая прочность измеряется в кВ/см или кВ/мм.

Напряженность электрического поля, которая допускается в диэлектрике (изоляторе) при его применении в электрических установках, называется допустимой напряженностью. Для надежной работы установки нужно, чтобы допустимая напряженность была в несколько раз меньше электрической прочности. Значения электрической прочности некоторых диэлектриков приведены в табл. 7-1.

Характер пробоя твердого диэлектрика может быть различным. При электрическом пробое немногочисленные (в начальный момент) свободные электроны в диэлектрике под действием электрического поля достигают критической скорости, достаточной для выбивания новых электронов из нейтральных атомов и молекул, так что возникает ударная ионизация, приводящая к пробую.

При электрохимическом пробое длительное воздействие напряжения, под влиянием которого развиваются электрохимические процессы, приводит к необратимым физико-химическим изменениям в диэлектрике и, в частности, к увеличению электрической проводимости и уменьшению электрической прочности диэлектрика, что и приводит к пробую.

Характеристики некоторых электроизоляционных материалов

Диэлектрик	$\epsilon_{пр}$, кВ/см	ϵ	ρ_v , Ом·см
Бумага, пропитанная маслом	100—250	3,6	—
Воздух	30	1	—
Гетинакс	100—150	4—7	10^{10} — 10^{12}
Лакоткань	700—400	3—4	10^{11} — 10^{13}
Мрамор	30—50	7—8	10^8 — 10^{11}
Полистирол	200—300	2,5	10^{16} — 10^{18}
Парафин	200—250	2—2,2	10^{16} — 10^{17}
Полихлорвинил	325	3,2	10^{14}
Полиэтилен	500	2,25	10^{14} — 10^{16}
Резина	150—200	3—6	10^{13} — 10^{14}
Стекло	100—150	6—10	10^{14}
Стекло органическое	400—500	3	10^{14} — 10^{16}
Стеклолакоткань	300—400	3—4	10^{13} — 10^{14}
Слюда	500—1000	5,4	$5 \cdot 10^{13}$
Совол	150	5,3	10^{13} — 10^{14}
Трансформаторное масло	50—180	2—2,5	$5 \cdot 10^{14}$ — $5 \cdot 10^{15}$
Текстолит	10—75	4—8	10^{10} — 10^{13}
Фарфор	150—200	5,5	10^{14} — 10^{15}
Эбонит	600—800	3—3,5	10^{15} — 10^{16}
Электрокартон	80—120	3—3,5	10^8 — 10^{10}

При тепловом пробое происходит разогрев диэлектрика в электрическом поле до значений, при которых возникает термическое повреждение или разрушение, например растрескивание, обугливание и т. д. Причиной разогрева могут быть так называемые диэлектрические потери или увеличение электрической проводимости и непропорциональное увеличение тока при повышении напряжения вследствие отрицательного температурного коэффициента сопротивления.

При пробое жидких диэлектриков происходят и тепловые, и электрические процессы, в частности, разрушение молекул диэлектрика силами электрического поля. Одной из решающих причин пробоя является наличие примесей и особенно влаги. При тепловом пробое жидкого диэлектрика происходит перегрев в местах скопления наибольшего количества примесей и образование газового мостика между электродами. Очисткой жидкого диэлектрика и, в частности, трансформаторного масла от примесей и влаги можно в несколько раз повысить его электрическую прочность.

Пробой газовых диэлектриков был рассмотрен в § 3-5.

После пробоя газового и жидкого диэлектрика и снятия напряжения электрические свойства диэлектрика почти полностью восстанавливаются вследствие подвижности частиц. При пробое твердого диэлектрика канал высокой проводимости сохраняется и после снятия напряжения, и диэлектрик выходит из строя.

Пример 7-2. Между двумя плоскими металлическими электродами зажат лист электрокартона толщиной $h = 0,15$ см. Определить пробивное напряжение и допустимое напряжение, если последнее должно быть в 3 раза меньше пробивного.

Решение. По табл. 7-1 находим среднюю электрическую прочность электрокартона $\mathcal{E}_{\text{пр}} = 100$ кВ/см.

Пробивное напряжение

$$U_{\text{пр}} = \mathcal{E}_{\text{пр}} h = 100 \cdot 0,15 = 15 \text{ кВ.}$$

Допустимое напряжение

$$U_{\text{доп}} = U_{\text{пр}}/3 = 15/3 = 5 \text{ кВ.}$$

7-7

Электрическая изоляция и электроизоляционные материалы

Всякая электрическая цепь должна не только иметь токопровод, т. е. путь, по которому проходит электрический ток, но и быть защищенной от прохождения тока по каким-либо побочным путям, вне этого токопровода. Таким образом, токопровод на всем протяжении должен быть окружен электрической изоляцией, которая отделяет токопровод от окружающей среды и разделяет друг от друга участки токопровода, находящиеся под различными потенциалами. Кроме того, изоляция должна оградить людей от прикосновения к участкам токопровода, находящимся под потенциалом, отличным от потенциала земли.

В некоторых устройствах, например в конденсаторах, кабелях, изоляция должна обладать и заданными диэлектрическими свойствами, влияющими на их электрические параметры.

Правильный выбор изоляции, рациональная конструкция ее и контроль за состоянием изоляции обеспечивают безаварийную работу электроустановок. При этом необходимо помнить, что изоляция легче подвергается действию внешних условий и легче повреждается, чем токопровод. Роль электрической изоляции и ее стоимость повышаются с увеличением рабочего напряжения электроустановки.

Получение и рациональное применение новых изоляционных материалов высокой электрической прочности, высокой нагревостойкости и с большой диэлектрической проницаемостью имеет очень большое технико-экономическое значение, так как дает возможность уменьшить габариты, массу и стоимость электрических сетей и линий передач электроэнергии.

К свойствам электроизоляционных материалов предъявляются весьма разнообразные требования, главные из которых: 1) электрическая прочность; 2) удельное объемное сопротивление; 3) удельное поверхностное сопротивление; 4) диэлектрическая проницаемость; 5) диэлектрические потери. Кроме того, большое значение имеют механические, термические и другие физические и химические свойства.

В соответствии с большим разнообразием требований в электротехнике применяются самые различные электроизоляционные материалы, которые можно разделить на группы по разным признакам: 1) по их агрегатному состоянию на газообразные, жидкие, твердые; 2) по их химической природе на органические и неорганические; 3) по их нагревостойкости на классы и т. д.

а) Газообразные диэлектрики. Главным из газообразных диэлектриков является воздух.

Электрическая прочность воздуха, как и других газов, зависит от температуры, давления, влажности, примесей. При нормальной температуре (20°C) и нормальном давлении (10^5 Па) электрическая прочность воздуха (30 кВ/см) меньшая, чем у большинства жидких и твердых диэлектриков. Поэтому иногда наблюдается пробой воздушного промежутка непосредственно у поверхности твердого диэлектрика (изолятора), который называется поверхностным разрядом.

Из других газов применяются водород, углекислый газ, азот и инертные газы: аргон и неон — два последних для заполнения колб электродов накаливания.

б) Жидкие диэлектрики. К жидким диэлектрикам относятся: минеральные масла, синтетические жидкости, смолы, лаки.

1. Минеральные масла являются продуктами перегонки нефти и представляют собой смеси жидких углеводородов. Они применяются в масляных трансформаторах, масляных выключателях, силовых кабелях, конденсаторах.

В трансформаторах масло служит для изоляции токоведущих частей и для охлаждения путем конвекции, т. е. переноса тепла при циркуляции масла. В масляных выключателях масло является средой, которая способствует гашению электрической дуги при разрыве цепи. В кабелях с рабочим напряжением до 35 кВ масло применяется для пропитки изоляции. В кабелях с рабочим напряжением от 100 кВ и выше маслом наполняются каналы, идущие вдоль всего кабеля.

Масло должно иметь высокую электрическую прочность ($100\text{—}200\text{ кВ/см}$). Она резко падает при наличии влаги; поэтому перед заливкой и периодически при эксплуатации масло должно высуши-

ваться и очищаться. Диэлектрическая проницаемость масла и удельное объемное сопротивление указаны в табл. 7-1.

В последнее время довольно широко применяются искусственные жидкие диэлектрики: совол, совтол и др.

Совол представляет смесь молекул дифенила разной степени хлорирования. Этот синтетический жидкий диэлектрик применяется для пропитки и заполнения конденсаторов; так как его диэлектрическая проницаемость примерно в 2 раза больше, чем у минерального масла, то емкость конденсаторов повышается в 2 раза. Вследствие большой вязкости совол не пригоден для заполнения трансформаторов.

Для заполнения трансформаторов применяют совтол — совол, разбавленный трихлорбензолом. Совтол, так же как и совол, негорюч, и залитые им трансформаторы безопасны в пожарном отношении.

2. Смолы при низких температурах — это аморфные стеклообразные массы. При нагреве они размягчаются и становятся пластичными, а затем жидкими. Смолы не гигроскопичны и не растворяются в воде, но растворяются в спирте и других растворителях. Смолы являются важнейшей составной частью многих лаков, компаундов, пластмасс, пленок. Они бывают природные и синтетические.

Природные смолы представляют собой продукт жизнедеятельности некоторых животных организмов (например, шеллак) или растений — смолоносов. Наибольшее значение имеют синтетические смолы, например полиэтилен, поливинилхлорид. Поливинилхлорид (полимер хлористого винила) применяется для изоляции проводов, кабелей, для защитных покрытий, для изготовления лаков.

Диэлектрическая проницаемость синтетических смол и другие их параметры даны в табл. 7-1.

3. Лаки представляют собой растворы пленкообразующих веществ: смол, битумов, высыхающих растительных масел (например, льняного), эфиров целлюлозы. В процессе сушки происходит образование лаковой пленки.

По назначению лаки делятся на пропиточные, покровные и клеящие. Пропиточные лаки применяются для пропитки обмоток электрических машин и аппаратов с тем, чтобы повысить их влагостойкость. Покровные лаки служат для получения защитных покрытий от воздействия окружающей среды. Клеящие лаки предназначены для склеивания листочков слюды друг с другом, с бумагой или тканью (миканит, микалента).

Эмали — это лаки с введенными в них неорганическими наполнителями, повышающими твердость, механическую прочность, влагостойкость эмалевых пленок. Специальная группа лаков — эмаль-лаки — предназначены для создания тонких (0,005 мм) и гибких изоляционных покрытий на обмоточных проводах (провода с эмалевой изоляцией).

в) **Твердые диэлектрики.** Твердые диэлектрики составляют наиболее многочисленную группу изоляционных материалов. Поэтому рассмотрим некоторые наиболее широко применяемые. Часть сведений о них дана в табл. 7-1.

1. Волокнистые органические материалы: бумага, картои, фибра, ткани — изготавливаются из волокон древесины, хлопка, капрона. Они обладают гибкостью, достаточной механической прочностью, но гигроскопичны; для уменьшения гигроскопичности применяется пропитка маслом или компаундом.

Бумага изготавливается в основном из древесины. Применяется кабельная, конденсаторная, пропиточная бумага для изготовления

гетинакса, намоточная для изготовления бакелитовых изделий, оклеечная для изоляции листов стали.

Электрокартон (прессшпан) изготавливается из целлюлозы и подвергается прессованию. Электрокартон марки ЭВ предназначен для работы в воздухе, а марки ЭМ — для работы в масле. Электрокартон широко применяется для прокладок в пазах электрических машин, каркасов обмоток трансформаторов и различных изделий.

Фибра изготавливается из простой бумаги путем обработки ее хлористым цинком. Применяется для изготовления панелей, стоек, втулок, каркасов катушек и других электроизделий.

Гетинакс — это прессованная бумага, пропитанная бакелитом; изготавливается листами толщиной от 0,2 до 50 мм.

Текстолит представляет собой прессованную многослойную ткань, пропитанную резольной смолой.

2. Пластмассы — это материалы, состоящие из двух составных частей: связующей и наполнителя. Связующей частью служат смолы или битум, а также жидкое стекло (в микалексе) или цемент (в асбестоцементе). Наполнитель может быть порошкообразным или волокнистым. Для уменьшения хрупкости иногда вводят пластификаторы, а для окраски изделия — красители.

Различают пластмассы горячей и холодной прессовки. В пресс-формах пластмасса превращается в готовое изделие определенной формы.

Пластмассы широко применяются в электротехнике в качестве изоляционных и конструкционных материалов.

3. Материалы, обладающие свойствами эластичности, принято называть эластомерами. Эластичность — свойство материала сильно удлиняться при растяжении и принимать прежние размеры при снятии нагрузки.

Каучук натуральный, получаемый из растений-каучуконосов, обладает высокой эластичностью и малой проницаемостью для влаги и газов. За последние десятилетия все более широкое применение получает синтетический каучук.

Резина получается путем введения в каучук серы. При содержании серы 1—3% получается мягкая, очень эластичная резина, при содержании серы 25—50% получается твердая резина — эбонит, не обладающий эластичностью, но хорошо поддающийся обработке. Главным недостатком резины является низкая нагревостойкость и неустойчивость к действию минеральных масел. Последнее время резина с успехом заменяется пластмассами — эластомерами, например поливинилхлоридом, полиэтиленом, более стойкими к действию щелочей, кислот, минеральных масел, бензина.

4. Стекло получается плавлением кремнезема с окислами натрия, калия, кальция, с последующим охлаждением и обработкой для придания изделию нужной формы. Обычно стекло обладает хрупкостью; специально изготовленные стекла, например сталинит, имеют высокую прочность.

Стекло в электротехнике применяется для изготовления изоляторов и колб ламп накаливания и электронных ламп. Из стекла можно получить волокно и стеклопряду, которая применяется, например, в качестве изоляции проводов, предназначенных для работы при высокой температуре.

5. Электрофарфор изготавливается из каолина, огнеупорной глины, кварца, полевого шпата, которые измельчаются, перемешиваются, подвергаются обработке, имеющей цель придать изделию нужную

форму, покрываются глазурью для уменьшения гигроскопичности и обжигаются.

Фарфор имеет высокую механическую и электрическую прочность и нагревостойкость. Он широко применяется для изготовления низковольтных и высоковольтных изоляторов.

6. Слюда — это минерал кристаллической структуры, легко расщепляющийся на тонкие листочки. Она обладает высокой нагревостойкостью, влагостойкостью и высокими электроизоляционными свойствами (см. табл. 7-1). Слюда находит широкое применение в электро-технике и радиотехнике.

Миканит — склеенные лаком или смолой листочки слюды — применяется для прокладок между коллекторными пластинами, прокладок различного назначения, а также для изготовления фасонных деталей путем формовки.

7. Парафин — продукт переработки нефти — негигроскопичен, плавится при 55°C ; применяется для пропитки бумаги, картона, дерева с целью уменьшения их гигроскопичности.

7-8

Емкость. Конденсаторы

Система из двух металлических пластин или проводников произвольной формы, разделенных диэлектриком, образует конденсатор. Пластины конденсатора часто называются электродами или обкладками.

Примерами естественных конденсаторов могут служить два провода электрической сети, две жилы кабеля, жила кабеля и броня, проходной изолятор (изолирующий провод от стены или стенки металлического кожуха). Широко применяются изготавливаемые промышленностью конденсаторы различного устройства, в частности плоские, образуемые параллельно расположенными металлическими изолированными друг от друга пластинами.

Условные обозначения конденсаторов на схемах показаны на рис. 7-15.

Конденсаторы обладают свойством накапливать и удерживать на своих обкладках равные по величине и разные по знаку электрические заряды; величина заряда Q на каждой из обкладок пропорциональна напряжению U между обкладками. Емкостью конденсатора называется коэффициент пропорциональности между зарядом Q и напряжением U между обкладками конденсатора:

$$C = Q/U. \quad (7-22)$$

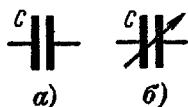


Рис. 7-15. Условное обозначение конденсатора.

а — постоянной емкости; б — переменной емкости.

В системе СИ единицей измерения емкости служит фарада (Ф) — емкость конденсатора, заряд которого равен 1 Кл при напряжении на обкладках, равном 1 В, т. е. $1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/1 В}$.

Фарада — крупная единица, поэтому чаще емкость измеряют в микрофарадах ($1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$) и пикофарадах ($1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$).

Наша промышленность выпускает конденсаторы емкостью от единиц пикофарад до тысяч микрофарад. Номинальное напряжение конденсаторов также весьма различно, от единиц вольт до десятков киловольт. Естественно, что конденсаторы с такими различными параметрами отличаются друг от друга размерами, конструкцией и диэлектриком. Чаще применяются конденсаторы бумажные, слюдяные, керамические и электролитические. Электролитические конденсаторы могут работать только в цепях постоянного тока, все остальные — в цепях постоянного и переменного тока.

Бумажные конденсаторы (рис. 7-16, а, б) состоят из двух длинных лент фольги, изолированных лентами тонкой парафинированной бумаги. Свернутые ленты помещаются в защитную оболочку. Обкладки соединяются с выводами, конструкция которых определяется номинальным напряжением.

Самые большие по размерам бумажные конденсаторы применяются для подключения аппаратуры телемеханики и связи к высоковольтным линиям. Например, конденсатор типа СМР-133/ $\sqrt{3}$ -0,0186 емкостью 0,0186 мкФ имеет форму цилиндра высотой 1380 мм, диаметром 700 мм и массой 950 кг. Он набирается из отдельных конденсаторных пакетов, укрепляемых в фарфоровом цилиндре, который заполняется конденсаторным маслом. Для присоединения к линии напряжением 400 кВ соединяются последовательно три конденсатора.

Самые маленькие по размерам конденсаторы применяются в радиоаппаратуре и автоматических устройствах. Например, керамический конденсатор КДС-1 емкостью 1000 пФ, с номинальным напряжением 250 В имеет форму диска диаметром 4,2 мм и высотой 2,5 мм.

У конденсаторов переменной емкости одна обкладка поворачивается относительно другой (рис. 7-16, в). Для увеличения емкости число обкладок увеличивают.

У электролитических конденсаторов диэлектриком служит тончайший слой окиси на поверхности алюминиевой

или танталовой фольги — одной из обкладок конденсатора. Второй обкладкой служит бумага или ткань, пропитанная густым раствором электролита. Малая толщина слоя окиси дает возможность получить большую емкость при небольших

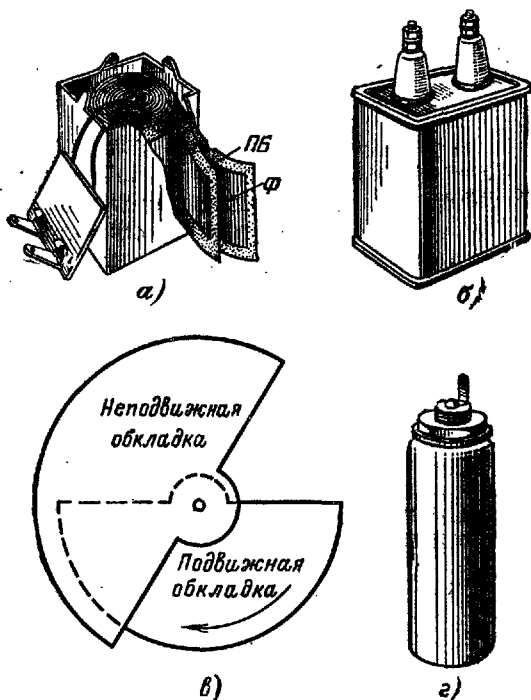


Рис. 7-16. Конденсаторы.

а. и б — бумажные; *в* — переменной емкости; *г* — электролитический.

размерах конденсатора. Внешний вид конденсатора типа КЭ-2 емкостью до 100 мкФ, с номинальным напряжением 500 В, диаметром до 40 мм и высотой до 100 мм показан на рис. 7-16, г.

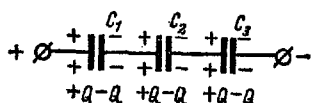
7-9

Соединение конденсаторов

При отсутствии конденсатора нужной емкости или на заданное номинальное напряжение его можно заменить несколькими конденсаторами с другими параметрами.

Конденсаторы могут соединяться последовательно, параллельно и смешанно.

При последовательном соединении на обкладках всех конденсаторов будут одинаковые по величине электрические заряды, например, в случае трех конденсаторов (рис. 7-17)



$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q.$$

Рис. 7-17. Схема последовательного соединения конденсаторов.

Это объясняется тем, что от источника питания заряды поступают только на внешние обкладки всего соединения, а на внутренних обкладках они полу-

чаются только за счет разделения зарядов, ранее нейтрализовавших друг друга.

Напряжения на отдельных конденсаторах при их последовательном соединении зависят от емкостей конденсаторов

$$U_1 = Q/C_1; \quad U_2 = Q/C_2; \quad U_3 = Q/C_3,$$

а общее напряжение

$$U = U_1 + U_2 + U_3.$$

Общая или эквивалентная емкость трех последовательно соединенных конденсаторов

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_1 + U_2 + U_3},$$

откуда

$$\frac{1}{C} = \frac{U_1 + U_2 + U_3}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}. \quad (7-23)$$

Таким образом, при последовательном соединении конденсаторов величина, обратная общей или эквивалентной емкости, равна сумме обратных величин емкостей отдельных конденсаторов.

Из (7-23) эквивалентная емкость трех последовательно соединенных конденсаторов

$$C = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1}. \quad (7-23a)$$

В случае двух последовательно соединенных конденсаторов (C_1 и C_2)

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (7-24)$$

Практически чаще всего применяется параллельное соединение конденсаторов, при котором напряжения на всех конденсаторах одинаковы, например, для случая трех конденсаторов (рис. 7-18)

$$U_1 = U_2 = U_3 = U.$$

Заряды на обкладках отдельных конденсаторов в общем случае имеют разные значения:

$$Q_1 = C_1 U; \quad Q_2 = C_2 U \text{ и } Q_3 = C_3 U.$$

Заряд, полученный всеми параллельно соединенными конденсаторами, равен сумме зарядов отдельных конденсаторов, т. е.

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

откуда общая или эквивалентная емкость

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{U} = C_1 + C_2 + C_3. \quad (7-25)$$

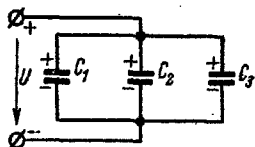


Рис. 7-18. Схема параллельного соединения конденсаторов.

Таким образом, при параллельном соединении конденсаторов общая или эквивалентная емкость равна сумме емкостей отдельных конденсаторов.

При другом числе последовательно или параллельно соединенных конденсаторов, пользуясь формулами, аналогичными (7-23) и (7-25), нетрудно определить эквивалентные емкости.

В случае n одинаковых последовательно соединенных конденсаторах C_n общая емкость

$$\frac{1}{C} = n \frac{1}{C_n} \text{ или } C = C_n/n. \quad (7-26)$$

При n одинаковых параллельно соединенных конденсаторах C_n общая емкость

$$C = nC_n. \quad (7-27)$$

Пример 7-3. Определить эквивалентную емкость трех конденсаторов при а) последовательном и б) параллельном их соединении, если

$$C_1 = 2 \text{ мкФ}; \quad C_2 = 4 \text{ мкФ} \text{ и } C_3 = 6 \text{ мкФ}.$$

Решение. а) Эквивалентная емкость последовательно соединенных конденсаторов

$$C' = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 2} = \frac{48}{44} = 1,1 \text{ мкФ}.$$

Из (7-33) следует, что если в диэлектрике конденсатора есть слой, проницаемость которого меньше проницаемости диэлектрика (например, слой или пузырьки воздуха), то в этом слое могут возникнуть значительные напряженности поля, приводящие к электрическому разряду. Выделяющиеся при разрядах химически активные вещества могут стать причиной разрушения изоляции конденсатора. Поэтому сушка изоляции обмоток машин, проводов, кабелей производится в баках при малых давлениях с целью удаления из изоляции воздуха.

Пример 7-5. Определить емкость плоского конденсатора с изоляцией из парафинированной бумаги ($\epsilon = 4,3$) толщиной 0,1 мм, если поверхность обкладки $S = 50 \text{ см}^2$.

Решение. По (7-29а) находим:

$$C = 8,85\epsilon \frac{S}{d} \cdot 10^{-12} = 8,85 \cdot 4,3 \frac{50 \cdot 10^{-4}}{0,1 \cdot 10^{-3}} = 1,9 \cdot 10^{-9} \text{ Ф} = 1900 \text{ пФ}.$$

Пример 7-6. Напряжение на обкладках плоского воздушного конденсатора $U = 12 \text{ кВ}$. Расстояние между обкладками 3 см. 1) Определить напряженность поля. 2) В поле конденсатора параллельно обкладкам поместили стеклянную пластину ($\epsilon = 6$) толщиной 2,5 см. Определить напряженность поля в воздухе $\mathcal{E}_1$ и в стеклянной пластине $\mathcal{E}_2$.

Решение. 1) Напряженность поля в воздухе

$$\mathcal{E} = U/d = 12/3 = 4 \text{ кВ/см}.$$

2) Напряженность поля в воздухе после внесения стеклянной пластины

$$\mathcal{E}_1 = \frac{U\epsilon_2}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} = \frac{12 \cdot 6}{6 \cdot 0,5 + 1 \cdot 2,5} = 13 \text{ кВ/см}.$$

Напряженность поля в стеклянной пластине

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = 13 \frac{1}{6} = 2,17 \text{ кВ/см}.$$

7-11

Нелинейные конденсаторы-вариконды

Выше были рассмотрены конденсаторы, проницаемость диэлектрика которых не зависит от напряжения или заряда (линейная среда). Для таких конденсаторов зависимость между зарядом и напряжением на обкладках, называемая кулон-вольтной характеристикой $Q(U)$, представляет собой прямую линию (рис. 7-21, а), проходящую через начало координат. На том же рисунке емкость

изображена ординатой прямой $C(U)$, параллельной оси абсцисс.

Применение в конденсаторах диэлектриков с диэлектрической проницаемостью, зависящей от напряженности поля, делает зависимость между зарядом конденсатора и напряжением на его зажимах нелинейной (рис. 7-21, б). Следовательно, емкость такого конденсатора зависит от напряжения.

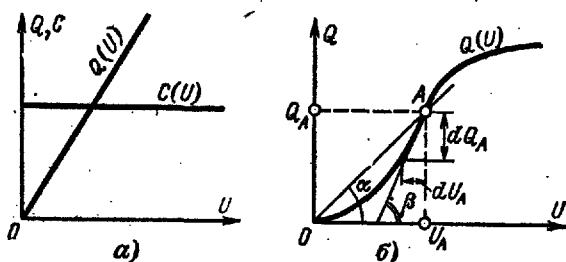


Рис. 7-21. Линейная (а) и нелинейная (б) кулон-вольтовые характеристики.

Такие конденсаторы называются нелинейными или варикондами, условное обозначение их на схемах показано на рис. 7-22.

Для нелинейных конденсаторов применяются два понятия емкости: статическая и дифференциальная.

Статическая емкость для выбранного значения напряжения U_A или точки A кулон-вольтовой характеристики (рис. 7-21, б) определяется отношением заряда Q_A к напряжению U_A :

$$C_{ст} = Q_A / U_A = M_C \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол наклона секущей, проведенной через точку A кулон-вольтовой характеристики и начало координат $M_C = M_Q / M_U$; M_Q и M_U — масштабы заряда (по оси ординат) и напряжения (по оси абсцисс).

Дифференциальная емкость определяется отношением малого приращения заряда dQ_A к соответствующему приращению напряжения dU_A , т. е.

$$C_A = dQ_A / dU_A = M_C \operatorname{tg} \beta,$$

где β — угол наклона касательной, проведенной через точку A кулон-вольтовой характеристики (рис. 7-21, б).

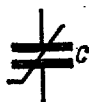


Рис. 7-22. Условное обозначение вариконда.

В качестве диэлектриков в варикондах применяются материалы, получившие название сегнетоэлектриков, диэлектрическая проницаемость которых изменяется от напряженности поля и может достигать очень больших значений — нескольких тысяч.

Впервые зависимость проницаемости от напряженности поля была обнаружена у сегнетовой соли, откуда и произошло название этой группы диэлектриков, которые были открыты и изучены советскими физиками (1944—1950 гг.). В настоящее время применяются сегнетокерамические материалы на основе титаната бария, а также триглицинсульфат, сернокислый гуанидит алюминия и др.

Сегнетоэлектрики обладают самопроизвольной (спонтанной) поляризацией. До воздействия на них электрического поля они имеют небольшие поляризованные области — домены, векторы поляризации которых расположены хаотически, и поэтому взаимно компенсируются. Под действием внешнего поля домены стремятся ориентироваться в направлении поля, так что происходит поляризация, зависящая от напряженности электрического поля.

Для сегнетоэлектрика, ранее не находившегося в электрическом поле, зависимость смещения от напряженности поля D ($\mathcal{E}$) выражается кривой начальной поляризации, аналогичной кривой начального намагничивания ферромагнетика. После окончания воздействия электрического поля в сегнетоэлектрике сохраняется остаточное смещение аналогично остаточной магнитной индукции в ферромагнетике, т. е. сегнетоэлектрики подобно ферромагнетикам обладают гистерезисом. Площадь петли гистерезиса пропорциональна потерям энергии на электрический гистерезис за один цикл изменения напряженности поля. При упрощенных расчетах явлением гистерезиса и потерями часто пренебрегают и пользуются основной кривой поляризации. Она подобна основной кривой намагничивания ферромагнетика, т. е. представляет собой кривую, проведенную через вершины гистерезисных петель, которые получены при различных максимальных значениях напряженности поля.

Изменения температуры вызывают изменение диэлектрических свойств сегнетоэлектриков, что является их существенным недостатком.

Вариконды применяются в счетно-решающих устройствах, в автоматике и радиотехнике.

Цилиндрический конденсатор

В цилиндрическом конденсаторе радиально направленное электрическое поле возникает между двумя цилиндрическими электродами, имеющими общую ось (рис. 7-23). При этом предполагается, что длина конденсатора значительно превосходит радиусы внутреннего и внешнего электродов, так что искажением поля у краев можно пренебречь. Из условий симметрии следует, что эквипотенциальные поверхности цилиндрические с той же общей осью, а электрические линии в диэлектрике направлены по радиусам (рис. 7-23, а).

Определим напряженность поля в точке A , расположенной на эквипотенциальной поверхности радиуса R (рис. 7-23, б).

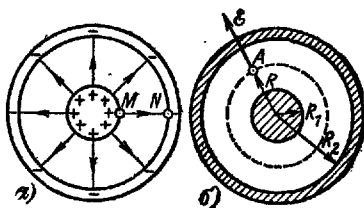


Рис. 7-23. Цилиндрический конденсатор.

Если внутренний электрод заряжен положительно, а внешний отрицательно, то направление вектора напряженности поля между электродами в точке A совпадает с направлением радиуса, проходящего через точку A (рис. 7-23, б).

Так как векторы напряженности поля касательны к электрическим линиям и перпендикулярны к эквипотенциальным цилиндрическим поверхностям, т. е. $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}$, то поток вектора напряженности поля (7-6) через цилиндрическую поверхность радиуса R длиной l по (7-6) или (7-7)

$$N = \mathcal{E}S = \mathcal{E}2\pi Rl,$$

а поток через любое поперечное сечение конденсатора равен нулю.

Согласно теореме Остроградского — Гаусса (7-9)

$$N = Q/\epsilon\epsilon_0,$$

откуда напряженность поля

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{2\pi R l \epsilon \epsilon_0}. \quad (7-34)$$

Из (7-34) следует, что напряженность поля обратно пропорциональна радиусу эквипотенциальной поверхности.

Поэтому наибольшая напряженность поля будет на поверхности внутреннего цилиндра ($R = R_1$) и наименьшая — на поверхности внешнего ($R = R_2$).

Для вычисления напряжения между электродами (см. § 7-3) выберем точки M и N на одной и той же электрической линии (рис. 7-23, а). Тогда $dl = dR$ и напряжение

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{E} dR = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{\epsilon \epsilon_0 2\pi R l} dR = \frac{Q}{2\pi l \epsilon \epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R} = \\ = \frac{Q}{2\pi l \epsilon \epsilon_0} (\ln R_2 - \ln R_1) = \frac{Q}{2\pi l \epsilon \epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Емкость цилиндрического конденсатора, Φ ,

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi l \epsilon \epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} = 8,85 \frac{2\pi l \epsilon}{\ln[R_2/R_1]} \cdot 10^{-12}, \quad (7-35)$$

где l — длина конденсатора, м.

Можно показать, что при заданном напряжении между электродами U и заданном радиусе внешнего электрода R_2 напряженность поля на поверхности внутреннего цилиндра будет минимальной, если $R_1 = R_2/e$, где $e = 2,72$ — основание натуральных логарифмов.

7-13

Емкость двухпроводной линии

При расчете режима электрической линии часто необходимо знать ее емкость.

Определим емкость двухпроводной воздушной линии ($\epsilon = 1$) с расстоянием между центрами проводов D и радиусом проводов r_0 (рис. 7-24), для которой $D \gg r_0$. Для этого сначала вычислим напряженность поля в точке A , лежащей в плоскости, проходящей через оси проводов и находящейся на расстоянии $r > r_0$ от оси первого провода.

При $D \gg r_0$ второй провод не влияет на распределение зарядов по поверхности первого провода. Поэтому заряд распределен по поверхности первого провода равномерно и напряженность электрического поля первого провода на цилиндрической поверхности радиуса r можно найти по теореме Остроградского — Гаусса, так же как для цилиндрического конденсатора (7-34):

$$\mathcal{E}_1 = \frac{Q}{2\pi r l \epsilon_0}.$$

Напряженность поля второго провода в той же точке A , расположенной на расстоянии $(D - r)$ от оси этого провода, определяется аналогично:

$$\mathcal{E}_2 = \frac{Q}{2\pi(D-r)\epsilon_0}.$$

Векторы напряженности поля $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ в точке A направлены одинаково (рис. 7-24, а); поэтому результирующая напряженность в этой точке

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D-r} \right). \quad (7-36)$$

Напряжение между проводами вычисляем, выбирая точку a на поверхности первого провода и точку b на

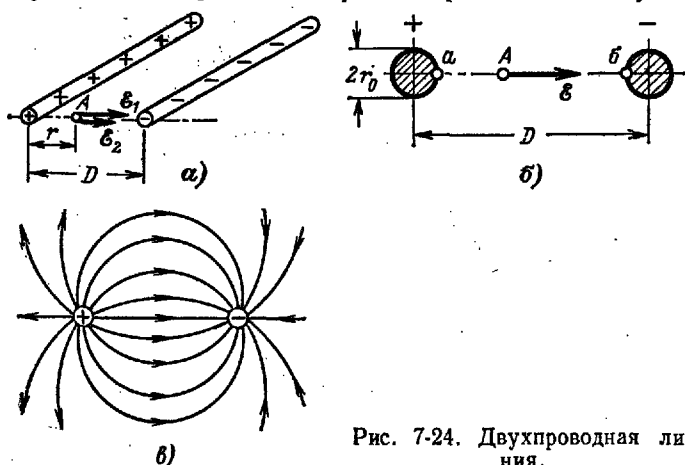


Рис. 7-24. Двухпроводная линия.

поверхности второго, находящиеся на одной электрической линии (рис. 7-24, б), которая проходит через точку A . Тогда

$$U = \int_{r_0}^{D-r_0} \mathcal{E} dr,$$

или, подставляя выражение (7-36),

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\int_{r_0}^{D-r_0} \frac{1}{r} dr + \int_{r_0}^{D-r_0} \frac{1}{D-r} dr \right) = \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} [\ln(D-r_0) - \ln r_0 - \ln r_0 + \ln(D-r_0)] = \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} 2 \ln \frac{D-r_0}{r_0} \approx \frac{Q}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{D}{r_0}, \end{aligned}$$

так как $D \gg r_0$ и разность $D - r_0$ мало отличается от D .

Из последнего выражения найдем отношение заряда Q к напряжению U , т. е. емкость, Φ , двухпроводной линии

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln(D/r_0)}, \quad (7-37)$$

или, подставив значение ϵ_0 ,

$$C = 8,85 \epsilon \frac{\pi l}{\ln(D/r_0)} \cdot 10^{-12}, \quad (7-37a)$$

где l — длина линии, м.

Напряженность поля на поверхности провода (при $r = r_0$), например в точке a или b , имеет максимальное значение:

$$E_{\text{макс}} = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{D - r_0} \right) \approx \frac{Q}{2\pi r_0 l \epsilon_0} = \frac{U}{2r_0 \ln(D/r_0)}.$$

На рис. 7-24, в показано электрическое поле двухпроводной линии.

7-14

Заряд и разряд конденсатора

Заряд конденсатора. Присоединим цепь, состоящую из незаряженного конденсатора емкостью C и резистора с сопротивлением r , к источнику питания с постоянным напряжением U (рис. 7-25).

Так как в момент включения конденсатор еще не заряжен, то напряжение на нем $u_C = 0$. Поэтому в цепи в начальный момент времени ($t = 0$) падение напряжения на сопротивлении r равно U и возникает ток

$$i = U/r = I.$$

Рис. 7-25. Заряд конденсатора.

Прохождение тока i сопровождается постепенным накоплением заряда Q на обкладках конденсатора и на нем появляется напряжение $u_C = Q/C$, а падение напряжения на сопротивлении r уменьшается:

$$ir = U - u_C,$$

как и следует из второго закона Кирхгофа. Следовательно, сила тока

$$i = (U - u_C)/r$$

уменьшается и одновременно уменьшается скорость накопления заряда Q , так как ток в цепи в соответствии с (1-7)

$$i = dQ/dt. \quad (7-38)$$

Учитывая, что $Q = Cu_c$, находим другую зависимость между током и напряжением на конденсаторе:

$$i = dCu_c/dt = C du_c/dt. \quad (7-39)$$

С течением времени конденсатор продолжает заряжаться, но заряд Q и напряжение на нем u_c растут все медленнее (рис. 7-26), а сила тока в цепи постепенно уменьшается пропорционально разности напряжений $U - u_c$.

Через достаточно большой интервал времени (теоретически бесконечно большой) напряжение на конденсаторе достигает величины, равной напряжению источника питания U , ток становится равным нулю и процесс заряда конденсатора заканчивается.

Практически принято считать, что процесс зарядки закончился, когда ток уменьшился до 1% начального значения (U/r), или что то же, когда напряжение на конденсаторе достигло 99% напряжения источника питания U .

Процесс зарядки конденсатора тем продолжительнее, чем больше сопротивление цепи r , ограничивающее силу тока, и чем больше емкость конденсатора C , так как при большей емкости должен накопиться больший заряд. Скорость протекания процесса характеризуют постоянной времени цепи

$$\tau = rC; \quad (7-40)$$

чем больше τ , тем медленнее процесс.

Постоянная времени цепи имеет размерность времени, так как

$$[\tau] = [rC] = \text{Ом} \cdot \text{Ф} = \text{Ом} \cdot \text{Кл/В} = \text{Ом} \cdot \text{А} \cdot \text{с/В} = \text{с}.$$

Ниже (в гл. 15) будет показано, что через интервал времени, равный τ с момента включения цепи, напряжение на

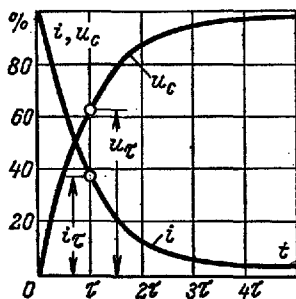


Рис. 7-26. Ток и напряжение при заряде конденсатора.

конденсаторе достигает примерно 63% напряжения источника питания, а через интервал 5τ процесс заряда конденсатора можно считать закончившимся.

Разряд конденсатора. Рассмотрим теперь процесс разряда конденсатора C , который был заряжен от источника питания до напряжения U , через резистор с сопротивлением r (рис. 7-27, где переключатель переводится из положения 1 в положение 2).

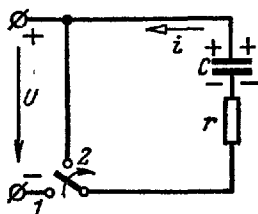


Рис. 7-27. Разряд конденсатора через резистор.

В начальный момент в цепи возникнет ток $i = U/r = I$, конденсатор начнет разряжаться и напряжение на нем u_C уменьшится. По мере уменьшения напряжения u_C уменьшается и ток в цепи $i = u_C/r$ (рис. 7-28). Через интервал времени $5\tau = 5rC$ напряжение на конденсаторе и ток

цепи уменьшатся примерно до 1% начальных значений и процесс разряда конденсатора можно считать закончившимся.

Вся энергия, запасенная при заряде конденсатора в электрическом поле, при разряде выделяется в виде тепла в сопротивлении r .

Электрическое поле заряженного конденсатора, отсоединенного от источника питания, не может долго сохраняться неизменным, так как диэлектрик конденсатора и изоляция между его зажимами обладают некоторой конечной проводимостью. Разряд конденсатора, обусловленный несовершенством диэлектрика и изоляции, называется саморазрядом. Постоянная времени при саморазряде конденсатора τ не зависит от формы обкладок и расстояния между ними.

Процессы заряда и разряда конденсатора называются переходными процессами в цепи с конденсатором.

Ток смещения в конденсаторе. При заряде (и разряде) конденсатора происходит изменение напряженности электрического поля $\mathcal{E}$ и электрического смещения D в диэлектрике (рис. 7-29).

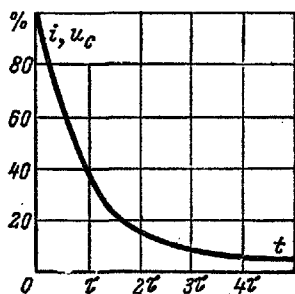


Рис. 7-28. Ток и напряжение при разряде конденсатора.

Например, для плоского конденсатора с площадью пластин S можно написать (7-13а):

$$D = \epsilon_a \mathcal{E} = Q/S,$$

откуда заряд

$$Q = DS,$$

а его приращение при заряде (или разряде)

$$dQ = S dD = dN_D,$$

где N_D — поток вектора смещения между обкладками конденсатора.

Изменение потока смещения между обкладками конденсатора можно рассматривать как электрический ток в диэлектрике, который называется током смещения,

$$i_{cm} = dN_D/dt = S dD/dt = dQ/dt. \quad (7-41)$$

Ток смещения получился равным току в проводах, соединяющих конденсатор с источником питания (7-38): $i = dQ/dt$, как и должно быть в неразветвленной цепи (рис. 7-29).

Отношение

$$i_{cm}/S = dD/dt$$

представляет собой плотность тока смещения. Ток смещения в диэлектрике плоского конденсатора можно определить через плотность тока смещения, умножив ее на площадь поперечного сечения поля, или, что то же, площадь пластин конденсатора S .

Ток смещения позволяет рассматривать электрическую цепь с конденсатором как замкнутую цепь тока, по одному участку которой (провода и резистора r) проходит ток проводимости, а по другому (диэлектрику конденсатора) равный ему ток смещения (рис. 7-29).

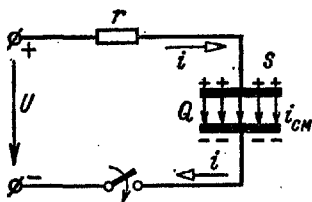


Рис. 7-29. Ток смещения в конденсаторе.

Пример 7-7. Определить постоянную времени цепи, если емкость ее $C = 20$ мкФ, а сопротивление $r = 0,5$ МОм.

Решение.

$$\tau = rC = 0,5 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-6} = 10 \text{ с.}$$

Энергия электрического поля

Для определения энергии, запасаемой в электрическом поле конденсатора, рассмотрим его заряд от источника постоянного напряжения (см. рис. 7-25).

По второму закону Кирхгофа напряжение источника равно сумме напряжений на участках цепи, т. е.

$$U = ir + u_c. \quad (7-42)$$

Умножив обе части этого уравнения на $i dt$, получим в левой части выражение энергии, отданной источником питания в цепь за время dt ,

$$Ui dt = i^2 r dt + u_c i dt$$

или после подстановки силы тока i по (7-39)

$$UC du_c = i^2 r dt + u_c C du_c.$$

Первый член правой части уравнения ($i^2 r dt$) выражает энергию, переходящую за время dt в тепло, а второй

$$Cu_c du_c = dW$$

— энергию, запасаемую в электрическом поле при увеличении напряжения на конденсаторе на du_c .

При заряде конденсатора до напряжения U генератор расходует энергию

$$W_r = \int_0^U UC du_c = UC \int_0^U du_c = U^2 C = UQ.$$

Половина этой энергии запасается в электрическом поле конденсатора, так как

$$W = \int_0^U u_c C du_c = CU^2/2 = UQ/2. \quad (7-43)$$

Следовательно, вторая половина энергии генератора преобразуется в тепло в сопротивлении r :

$$W_r = W_r - W = UQ - UQ/2 = UQ/2.$$

В однородном поле заряженного плоского конденсатора энергия $W = CU^2/2$ равномерно распределена в объеме поля $V = Sd$.

Таким образом, энергия в единице объема или плотность энергии электрического поля

$$W_0 = \frac{CU^2}{2V} = \frac{\epsilon \epsilon_0 S U^2}{2 S d^2} = \frac{\epsilon \epsilon_0 \mathcal{E}^2}{2} = \frac{D \mathcal{E}}{2}. \quad (7-44)$$

Формула (7-44) справедлива и для неоднородного поля.

Зная плотность энергии, определим силу взаимодействия F между обкладками плоского конденсатора. Для этого предположим, что заряженный конденсатор отсоединили от источника питания, и допустим, что под действием силы взаимодействия F пластины (площадью S) сблизились на расстояние db .

Так как конденсатор отсоединен от источника питания, то работа, выполненная при этом сближении Fdb , равна изменению энергии поля $W_0 dV$ (работа произведена за счет уменьшения энергии поля в объеме dV)

$$F db = W_0 dV$$

и, следовательно, сила

$$F = W_0 dV/db.$$

Изменение объема $dV = S db$, поэтому

$$F = W_0 S = \frac{\epsilon \epsilon_0 \mathcal{E}^2 S}{2} = 8,85 \frac{\epsilon \mathcal{E}^2 S}{2} \cdot 10^{-12}, \quad (7-45)$$

где F — сила взаимодействия, Н; $\mathcal{E}$ — напряженность поля, В/м; S — площадь пластины, м².

Пример 7-8. Определить энергию электрического поля конденсатора емкостью $C = 80$ мкФ, если напряжение на зажимах $U = 3000$ В.

Решение. Искомая энергия электрического поля

$$W = CU^2/2 = 80 \cdot 10^{-6} \cdot 3000^2/2 = 360 \text{ Дж.}$$

Пример 7-9. Определить силу взаимодействия между пластинами плоского конденсатора. Поверхность каждой пластины $S = 240$ см²; расстояние между пластинами $d = 0,1$ см, диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 1$; напряжение на зажимах конденсатора $U = 1500$ В.

Решение. Напряженность поля в диэлектрике

$$\mathcal{E} = U/d = 1500/10^{-3} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ В/м}$$

и по формуле (7-45) сила взаимодействия

$$F = 8,85 (1,5 \cdot 10^6)^2 \cdot 240 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-12}/2 = 0,238 \text{ Н.}$$

7-16

Колебательный контур

Рассмотрим явления в цепи, состоящей из катушки с индуктивностью L и ничтожно малым сопротивлением r , при подключении ее к заряженному конденсатору емкостью C (рис. 7-30).

В начальный момент времени ($t = 0$) конденсатор заряжен (рис. 7-31, а), напряжение на нем наибольшее U_m и, следовательно, в поле конденсатора сосредоточена энергия

$$W = CU_m^2/2.$$

Ток в цепи в первый момент после замыкания рубильника $i = 0$, так как до замыкания рубильника тока в катушке не было, а в отличие от резистора и конденсатора в катушке ток скачком не может измениться (см., например, рис. 6-22).

С момента включения конденсатор играет роль источника питания цепи. Он начнет разряжаться и в цепи возникнет ток. Одновременно с током в катушке появится магнитный поток (рис. 7-31, б) и э. д. с. самоиндукции e_L . Пренебрегая сопротивлением катушки вследствие его малости, по второму закону Кирхгофа для контура

$$u_c + e_L = 0. \quad (7-46)$$

Таким образом, $u_c = -e_L$, т. е. э. д. с. самоиндукции в каждый момент времени равна по величине и противоположна по знаку напряжению конденсатора.

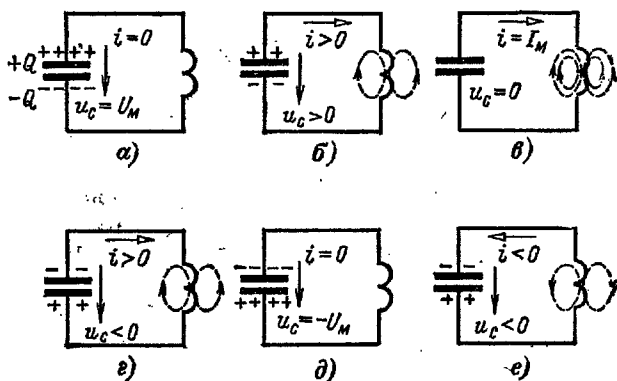


Рис. 7-31. Процесс колебаний в контуре.

По (6-32) э. д. с. самоиндукции $e_L = -L di/dt$, поэтому напряжение на емкости $u_c = L di/dt$ и сила тока в цепи нарастает со скоростью $di/dt = u_c/L$.

С течением времени конденсатор разряжается, напряжение на нем падает, уменьшается и скорость нарастания тока. Когда напряжение u_C спадает до нуля (рис. 7-31, в), приращение тока также станет равным нулю, так как $di/dt = u_C/L = 0$.

С другой стороны, при нулевом напряжении на конденсаторе ($u_C = 0$) равна нулю и энергия электрического поля конденсатора ($Cu_C^2/2 = 0$). А так как в рассматриваемой цепи сопротивление $r = 0$, то преобразования энергии в тепловую нет и вся энергия, сосредоточенная в начальный момент ($t = 0$) в электрическом поле конденсатора и равная $CU_M^2/2$, должна накопиться в магнитном поле катушки. Поэтому при $u_C = 0$ ток должен иметь наибольшее значение $i = I_M$, соответствующее наибольшей энергии магнитного поля, и максимальные энергии электрического и магнитного полей должны быть равны друг другу

$$CU_M^2/2 = LI_M^2/2.$$

Наибольшая сила тока в цепи определяется из последнего равенства

$$I_M = \frac{U_M}{\sqrt{L/C}} = \frac{U_M}{z_B}. \quad (7-47)$$

Величина $z_B = \sqrt{L/C}$ называется волновым сопротивлением контура. Размерность его

$$[z_B] = \left[\sqrt{\frac{L}{C}} \right] = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Phi}} = \sqrt{\frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{Кл/В}}} \sqrt{\frac{(\text{В/А}) \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{с/В}}} = \sqrt{\frac{\text{В}^2}{\text{А}^2}} = \text{Ом},$$

как и у всякого сопротивления.

Рассмотренный процесс уменьшения напряжения конденсатора от значения $u_C = U_M$ до $u_C = 0$ соответствует движению электронов с отрицательно заряженной (нижней) пластины на положительно заряженную (верхнюю).

Начиная с момента, когда $u_C = 0$ (рис. 7-31, в), катушка начинает играть роль источника питания, э. д. с. e_L которого по закону Ленца препятствует уменьшению тока, т. е. поддерживает ток i прежнего направления (рис. 7-31, г), а конденсатор — приемника энергии. Поэтому ток, достигнув максимального значения, начнет постепенно уменьшаться, но сохранит прежнее направление. Наличие этого тока означает продолжающееся движение электронов с нижней пластины на верхнюю, вследствие чего верхняя пластина начнет заряжаться отрицательно (рис. 7-31, г), а нижняя — положительно, т. е. напряжение u_C станет отрица-

тельным. Процесс перезарядки продолжается до тех пор, пока ток не уменьшится до нуля (рис. 7-31, *д*), т. е. пока вся энергия магнитного поля не преобразуется в энергию электрического поля, а конденсатор не зарядится до напряжения, равного по величине начальному, но обратной полярности ($u_c = -U_m$).

С этого момента конденсатор снова можно рассматривать как источник питания, а катушку — как потребитель энергии. Конденсатор начнет разряжаться током обратного направления (рис. 7-31, *е*), а затем снова заряжаться, и этот процесс будет продолжаться до момента размыкания цепи.

Таким образом, в рассматриваемой цепи энергия электрического поля периодически преобразуется в энергию магнитного поля и наоборот; следовательно, в цепи происходят незатухающие периодические колебания энергии; такую цепь называют колебательным контуром.

При разряде конденсатора (рис. 7-31, *а, б, в*) уменьшается заряд Q на его пластинах и ток в цепи в отличие от (7-38) и (7-39)

$$i = -dQ/dt = -C du_c/dt,$$

т. е. пропорционален первой производной напряжения на конденсаторе по времени, взятой с обратным знаком. Напряжение на конденсаторе, как следует из (7-46),

$$u_c = -e_L = L di/dt,$$

т. е. пропорционально первой производной силы тока по времени.

Такая взаимная зависимость двух переменных возможна, если сила тока изменяется периодически по закону синуса, так как первая производная синуса угла равна его косинусу $d(\sin \alpha)/d\alpha = \cos \alpha$, а напряжение на конденсаторе изменяется периодически по закону косинуса, так как первая производная косинуса угла, взятая с обратным знаком, равна синусу того же угла $-d(\cos \alpha)/d\alpha = \sin \alpha$.

Другое возможное решение той же системы уравнений, когда сила тока изменяется по закону косинуса, а напряжение на конденсаторе — по закону синуса, в рассматриваемом примере непригодно, так как начальное значение силы тока должно быть равно нулю.

Таким образом, ток изменяется периодически по синусоидальному закону. Обозначая период колебаний, который называют периодом собственных колебаний контура без

потерь, буквой T_0 , найдем частоту собственных колебаний $f_0 = 1/T_0$ и собственную угловую частоту $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$.

Синусоидально изменяющийся ток:

$$i = I_m \sin \alpha = I_m \sin \omega_0 t; \quad (7-48a)$$

напряжение на конденсаторе изменяется по косинусоидальному закону:

$$u_c = L di/dt = LI_m \omega_0 \cos \omega_0 t = U_m \cos \omega_0 t, \quad (7-48b)$$

где, как и в § 6-2, $\alpha = \omega_0 t$; I_m и U_m — амплитуды (максимальные значения) тока и напряжения, причем

$$U_m = \omega_0 L I_m. \quad (7-49)$$

Графики тока $i(t)$, напряжения на конденсаторе $u_c(t)$ и э. д. с. самоиндукции $e_L(t) = -u_c(t)$ показаны на рис. 7-32.

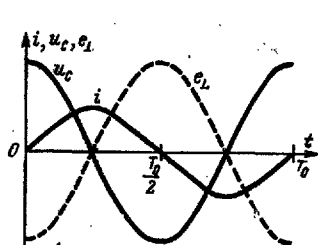


Рис. 7-32. Ток, напряжение на емкости и э. д. с. самоиндукции колебательного контура при $r = 0$.

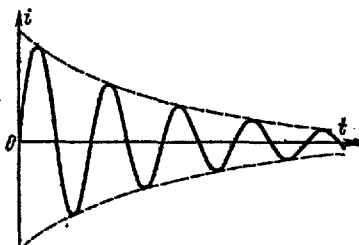


Рис. 7-33. Затухающий периодический ток.

Собственная угловая частота ω_0 зависит от индуктивности L и емкости C колебательного контура. Действительно, из (7-47) и (7-49) можно записать:

$$U_m/I_m = \sqrt{L/C} = \omega_0 L,$$

откуда собственная угловая частота контура

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (7-50)$$

Если колебательный контур обладает сопротивлением, не превышающим удвоенного волнового сопротивления ($r < 2z_n$), то процесс разрядки конденсатора отличается от рассмотренного тем, что сопровождается непрерывным преобразованием электрической энергии в тепловую ($i^2 r dt$). Вследствие этого амплитуды тока I_m и напряжение U_m уменьшаются (по закону экспоненты), т. е. имеет место затухающий колебательный процесс. На рис. 7-33 показан

затухающий ток i ; напряжение u_c изменяется аналогично, но начальное значение его равно не 0, а U_m . Колебания продолжаются до тех пор (теоретически бесконечно долго), пока вся энергия заряженного конденсатора не будет преобразована в тепло в сопротивлении контура r .

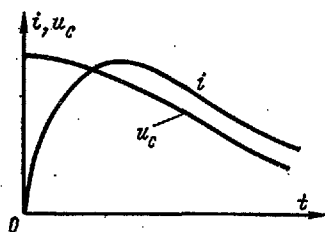


Рис. 7-34. Аperiодически изменяющиеся ток и напряжение на емкости колебательного контура.

При сопротивлении контура r больше удвоенного волнового процесс разряда будет не колебательным, а аperiодическим. В этом случае напряжение на конденсаторе с начального момента разряда непрерывно уменьшается, стремясь к нулевому значению; а сила тока в

цепи сначала увеличивается от нуля до некоторого наибольшего значения, а затем уменьшается и стремится к нулевому значению (рис. 7-34).

Пример 7-10. Конденсатор емкостью $C = 80$ мкФ заряжен до напряжения 300 В. Конденсатор разряжается через катушку с индуктивностью 0,2 Г, причем можно считать $r \approx 0$. Определить волновое сопротивление контура, частоту собственных колебаний и амплитуду силы тока.

Решение. Волновое сопротивление контура

$$z_B = \sqrt{L/C} = \sqrt{0,2/80 \cdot 10^{-6}} = 50 \text{ Ом.}$$

Частота собственных колебаний

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{6,28} \frac{1}{\sqrt{0,2 \cdot 80 \cdot 10^{-6}}} = 40 \text{ Гц.}$$

Амплитуда тока в цепи

$$I_m = U_m/z_B = 300/50 = 6 \text{ А.}$$

Ламповые генераторы. Одним из важных практических применений колебательного контура является получение (генерирование) синусоидальных электрических колебаний высокой частоты при помощи ламповых генераторов.

В генераторе типа LC энергия источника питания постоянного напряжения (тока) преобразуется в энергию переменного тока высокой частоты, зависящей от параметров колебательного контура (7-50).

Одна из возможных схем лампового генератора типа LC дана на рис. 7-35.

При включении источника постоянного анодного напряжения (аккумулятор или выпрямитель) конденсатор C колебательного контура заряжается, а затем разряжается через катушку L колебательного контура и в контуре возникают колебания с собственной частотой ω_0 . Для получения незатухающих колебаний, конечно, необходимо периодически пополнять запас энергии контура, что и выполняется электронной лампой, которая автоматически регулирует поступление в контур энергии от источника постоянного напряжения.

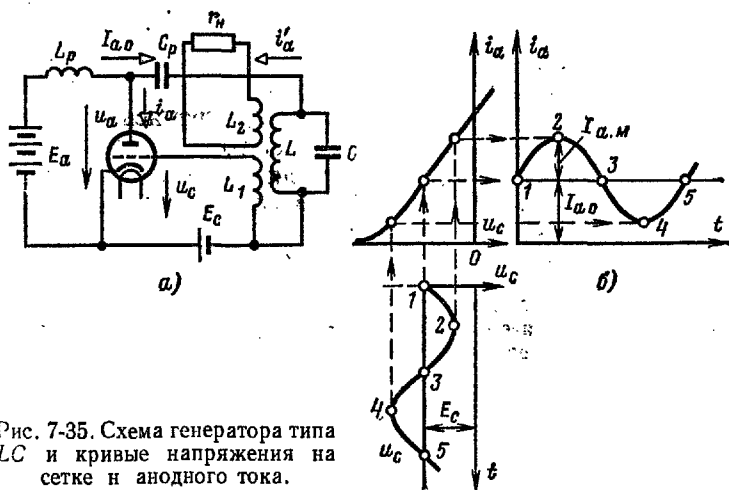


Рис. 7-35. Схема генератора типа LC и кривые напряжения на сетке и анодного тока.

Катушка L колебательного контура индуктивно связана с катушкой L_1 , называемой катушкой обратной связи, которая соединена с сеткой лампы. Таким образом, напряжение на сетке лампы определяется индуктированной в катушке L_1 э. д. с.

Для самовозбуждения генератора и для получения незатухающих колебаний необходимо: 1) чтобы напряжение на сетке было сдвинуто по фазе на $1/2$ периода относительно переменной составляющей u_a анодного напряжения и 2) магнитная связь катушек L и L_1 должна быть достаточно сильной с тем, чтобы переменная составляющая анодного тока i_a была достаточной для компенсации потерь в контуре. При этих условиях в анодной цепи лампы возникает пульсирующий ток $i_a = I_{a.0} + i'_a = I_{a.0} + I_{a.m} \sin \omega_0 t$ (рис. 7-35, б), зависящий от напряжения смещения E_c . Постоянная со-

ставляющая тока I_{a0} не может попасть в колебательный контур, так как этому мешает разделительный конденсатор C_p , и она замыкается через источник питания и разделительную катушку L_p . Переменная составляющая анодного тока $i'_a = I_{a.m} \sin \omega_0 t$ не может попасть в источник питания вследствие большого сопротивления разделительной катушки ($\omega_0 L_p$) и проходит через колебательный контур. Эта составляющая и обеспечивает периодическую передачу энергии колебательному контуру от источника питания E_a .

На рис. 7-35, б показана анодно-сеточная характеристика электронной лампы, дающая зависимость анодного тока лампы i_a от напряжения на сетке u_c .

По заданной характеристике $i_a(u_c)$ и известном напряжении на сетке u_c построена по точкам кривая изменения анодного тока i_a .

Цепь нагрузки генератора состоит из резистора r_n и катушки L_2 , индуктивно связанной с катушкой L колебательного контура. Таким образом, энергия из колебательного контура к потребителю передается благодаря индуктивной связи катушек L и L_2 .

Глава восьмая

Основные понятия, относящиеся к переменным токам

8-1

Период и частота переменного тока

Основная роль в прикладной электротехнике принадлежит переменному току. В настоящее время почти вся электрическая энергия вырабатывается в виде энергии переменного тока. Постоянный ток, необходимый в некоторых областях промышленности (электрохимия), транспорта, связи и т. д., получается выпрямлением переменного тока.

Основное преимущество переменного тока заключается в возможности просто и с малыми потерями энергии трансформировать (преобразовывать) напряжение, получая высокое напряжение для передачи электрической энергии на большие расстояния и низкое напряжение для передачи электроэнергии на близкие расстояния и для питания приемников энергии. Кроме того, однофазные и трехфазные

генераторы и двигатели имеют более простое устройство, надежней в работе и проще в эксплуатации по сравнению с машинами постоянного тока.

Переменным током обычно называют ток, изменение которого по величине и направлению повторяется в одной и той же последовательности через равные промежутки времени, называемые периодом T . Следовательно, если в произвольный момент времени t сила тока равна $i(t)$, то по прошествии одного или любого целого числа периодов сила тока будет иметь такое же значение, так что условие периодичности можно записать следующим образом:

$$i(t) = i(t + T) = i(t + 2T) = \dots = i(t + kT),$$

где k — целое число.

На рис. 8-1 показан график тока, периодически изменяющегося по закону синуса. На рисунке по оси абсцисс отложено время t , а по оси ординат — сила тока i , период тока $T = 0,02$ с.

Значение переменного тока, а также напряжения, э. д. с. и др. в любой момент времени t называется мгновенным значением. Мгновенные значения обозначаются строчными буквами: сила тока $i = i(t)$, напряжение $u = u(t)$, э. д. с. $e = e(t)$; наибольшие из мгновенных значений периодически изменяющихся величин называются максимальными или амплитудными значениями, которые обозначаются прописными буквами с индексом «м», например: сила тока I_m , напряжение U_m , э. д. с. E_m .

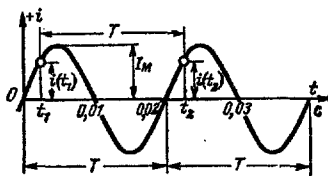


Рис. 8-1. Переменный (синусоидальный) ток.

Число периодов в секунду, т. е. величина, обратная периоду, называется частотой переменной величины:

$$f = 1/T. \quad (8-1)$$

Единица частоты 1/с называется герц (Гц). При повышенной и высокой частоте пользуются кратными единицами: килогерц (кГц) и мегагерц (МГц): 1 кГц = 10^3 Гц; 1 МГц = 10^6 Гц.

Стандартной частотой для промышленных установок в СССР является частота 50 Гц. Для установок электронагрева обычно применяются частоты от 50 Гц до 50 МГц. В меж-

дугородней проводной связи по воздушным линиям пользуются частотами до 150 кГц; в радиотехнике — частотами 10^5 — 10^{10} Гц.

Угловая частота ω синусоидально изменяющейся величины характеризует скорость изменения по времени электрического угла, пропорционально синусу которого изменяется мгновенное значение тока, э. д. с., напряжения и которая связана с периодом соотношением

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T \quad (8-2)$$

и измеряется в рад/с.

В генераторах переменного тока стремятся получить синусоидальный ток, так как при этом будут синусоидальными и э. д. с. самоиндукции и взаимной индукции, пропорциональные производной тока по времени ($-L di/dt$; $-M di/dt$); синусоидальными будут и напряжения на зажимах конденсаторов ($u_c = \int i dt/C$) и резисторов ($u = ri$), электродвигателей и осветительных сетей и т. д. В дальнейшем под переменными токами мы будем понимать синусоидальные токи.

Синусоидальный ток, изменяющийся с угловой частотой ω и изображенный на рис. 8-1, можно представить в виде

$$i = I_m \sin \omega t, \quad (8-3)$$

так как в момент времени, который выбран за начало отсчета времени ($t = 0$) сила тока $i = 0$, как и следует из (8-3) при $t = 0$.

В течение первой половины периода ток положительный ($i > 0$), т. е. он изменяется по величине (рис. 8-1), но направление тока остается неизменным. В течение второй половины периода ток отрицательный ($i < 0$); это означает, что его действительное направление (направление движения зарядов) изменяется на противоположное.

У генератора переменного тока с одной парой полюсов (рис. 6-9) одному обороту якоря ($\alpha = 2\pi$) соответствует один цикл изменения э. д. с. или один оборот якоря продолжается в течение одного периода T :

$$e = E_m \sin \alpha, \quad (8-3a)$$

или

$$e = E_m \sin \omega t, \quad (8-3b)$$

так как за время $t = T$ угол α изменится на $\omega T = 2\pi f T = 2\pi$.

У генератора, имеющего p пар полюсов, за один оборот якоря каждый виток его обмотки проходит под p парами

полюсов, и, следовательно, одному обороту соответствует p циклов изменения э. д. с. или p периодов:

$$e = E_m \sin(p\alpha) = E_m \sin \omega t. \quad (8-3в)$$

На рис. 8-2 показан график э. д. с., соответствующей одному обороту якоря генератора, число пар полюсов которого $p = 2$. В течение одного оборота $\alpha = 2\pi$ проходят два цикла изменения э. д. с. ($\omega t = \omega \cdot 2T = 2\pi f 2T = 4\pi$).

Произведение $p\alpha$ называется электрическим углом; угловая

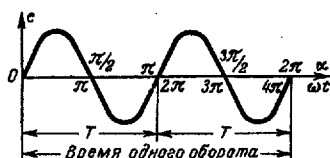


Рис. 8-2. Электродвижущая сила генератора переменного тока с двумя парами полюсов.

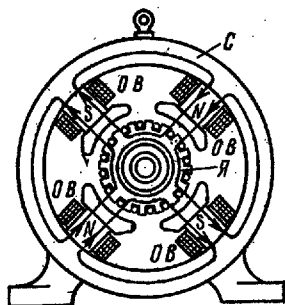


Рис. 8-3. Устройство генератора переменного тока с двумя парами полюсов.

частота в общем случае связана с электрическим углом соотношением

$$\omega t = p\alpha, \quad (8-4)$$

и так как один оборот, т. е. изменение α на 2π , происходит в течение времени $t = pT$, то $\omega = p 2\pi/pT = 2\pi/T = 2\pi f$, что совпадает с (8-2).

При частоте вращения генератора n об/мин число оборотов его в секунду $n/60$, а число циклов в секунду, т. е. частота

$$f = \frac{n}{60} p. \quad (8-5)$$

На рис. 8-3 показана схема устройства генератора с двумя парами полюсов, укрепленных на статоре С. На валу закреплен ротор-якорь Я из листовой стали, в пазах которого расположены витки обмотки. Концы обмотки присоединены к кольцам, как на рис. 6-8. Через кольца и щетки обмотка соединена с внешней цепью. По обмотке возбуждения ОВ, состоящей из четырех катушек, проходит ток возбуждения. Форма

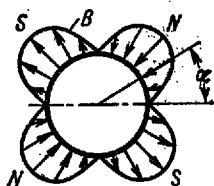


Рис. 8-4. Диаграмма магнитного поля генератора, изображенного на рис. 8-3.

полюсов выбирается так, чтобы распределение магнитной индукции в воздушном зазоре было синусоидальным $B = B_m \sin(p\alpha)$, как условно показано на диаграмме рис. 8-4. При вращении якоря в его обмотке индуцируется синусоидальная э. д. с.

Рассмотренный тип генератора с вращающимся якорем применяется сравнительно редко. Чаще генераторы выполняются с неподвижным якорем и вращающимся электромагнитом. Как указывалось, при неподвижной обмотке якоря повышается надежность изоляции и упрощается отвод больших токов.

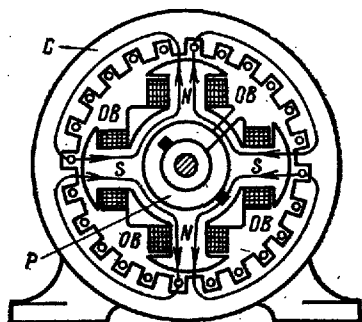


Рис. 8-5. Устройство генератора переменного тока.

Схема устройства генератора с неподвижным якорем и явно выраженными полюсами показана на рис. 8-5. В пазах статора C уложена обмотка якоря. Постоянный ток в обмотку возбуждения OB , укрепленную на полюс-

ных выступах ротора P , поступает через щетки, наложенные на кольца.

Переменные токи до 20—50 кГц можно получить при помощи вращающихся высокочастотных генераторов, а токи более высокой частоты — при помощи ламповых генераторов (§ 7-16).

Пример 8-1. Определить период тока в сетях энергосистем (частота 50 Гц).

Решение. Период

$$T = 1/f = 1/50 = 0,02 \text{ с.}$$

Пример 8-2. Генератор с двумя парами полюсов ($p = 2$) вращается с частотой 1500 об/мин. Определить частоту переменного тока.

Решение. Частота (8-5)

$$f = \frac{n}{60} p = \frac{1500}{60} 2 = 50 \text{ Гц.}$$

Пример 8-3. Генератор вращается с частотой 250 об/мин. Определить число пар полюсов генератора, если частота $f = 50$ Гц.

Решение. Число пар полюсов генератора находим из (8-5):

$$p = f 60/n = 50 \cdot 60/250 = 12.$$

8-2 Фаза. Сдвиг фаз

Предположим, что на якоре генератора с одной парой полюсов (рис. 8-6) укреплены два одинаковых витка 1 и 2, сдвинутых в пространстве.

При вращении якоря в витках наводятся э. д. с. одинаковой частоты с одинаковыми амплитудами, вследствие того что витки вращаются с одной скоростью и в одном и том же магнитном поле. Однако сдвиг витков в пространстве вызовет неодновременное прохождение витков под серединами полюсов, и, следовательно, э. д. с. неодновременно достигают амплитудных значений.

Пусть якорь вращается с угловой скоростью ω в направлении, противоположном движению стрелки часов и в момент начала отсчета времени ($t = 0$) виток 1 относительно нейтральной плоскости OO' расположен под углом ψ_1 , а виток 2 — под углом ψ_2 (рис. 8-6). За время t оба витка повернутся относительно первоначального положения на один и тот же угол ωt и углы их поворота относительно нейтральной плоскости OO' составят $\alpha_1 = \psi_1 + \omega t$ и $\alpha_2 = \psi_2 + \omega t$.

Мгновенные значения э. д. с. (в момент времени t) найдем по (8-3а):

$$e_1 = E_m \sin(\omega t + \psi_1) \text{ и } e_2 = E_m \sin(\omega t + \psi_2).$$

Эти синусоидально изменяющиеся э. д. с. показаны на рис. 8-7.

В момент начала отсчета времени ($t = 0$) э. д. с. $e_1 = e_1(t)$, наводимая в первом витке (рис. 8-6), не равна нулю, так как в этот момент времени плоскость витка не совпадает с нейтральной плоскостью OO' :

$$e_1(0) = E_m \sin(\omega \cdot 0 + \psi_1) = E_m \sin \psi_1.$$

Аналогично в момент $t = 0$ э. д. с. $e_2(0)$, наводимая во втором витке,

$$e_2(0) = E_m \sin(\omega \cdot 0 + \psi_2) = E_m \sin \psi_2.$$

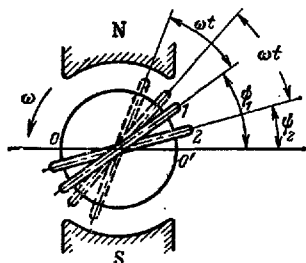


Рис. 8-6. Два витка простейшего генератора, сдвинутые в пространстве.

Электрические углы ψ_1 и ψ_2 , определяющие значения э. д. с. в начальный момент времени, называются *начальными фазовыми (фазными) углами* или просто *начальными фазами*.

Разделив начальные фазовые углы ψ_1 и ψ_2 на угловую частоту, получим интервалы времени:

$$t_1 = \frac{\psi_1}{\omega} = \frac{\psi_1}{2\pi} T; \quad t_2 = \frac{\psi_2}{2\pi} T, \quad (8-6)$$

прошедшие от начала периода э. д. с. e_1 или e_2 до момента, который принят за начало отсчета времени. Началом периода

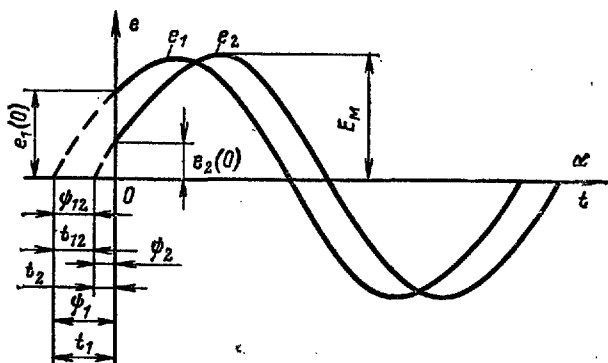


Рис. 8-7. Электродвижущие силы, наводимые в витках генератора по рис. 8-6.

обычно называют момент времени, в который синусоидальная величина проходит через нулевое значение и после которого она положительна.

Таким образом, всякая синусоидально изменяющаяся величина характеризуется: 1) амплитудой; 2) частотой или периодом; 3) начальной фазой.

Разность начальных фаз двух синусоидальных величин одной и той же частоты называется *углом сдвига фаз*

$$\psi_1 - \psi_2 = \psi_{12}. \quad (8-7)$$

Та величина, у которой начало периода или положительная амплитуда достигаются раньше, чем у другой, считается *опережающей по фазе*, а та, у которой те же значения достигаются позже, — *отстающей по фазе*.

Разделив угол сдвига фаз на угловую частоту, получим время, соответствующее углу сдвига, или время сдвига

$$t_{12} = \frac{\psi_{12}}{\omega} = \frac{\psi_{12}}{2\pi} T,$$

которое показывает, на какую часть периода или на какое время одна синусоидально изменяющаяся величина опережает другую. На рис. 8-7 э. д. с. e_1 опережает по фазе э. д. с. e_2 на угол ψ_{12} (или время t_{12}), а э. д. с. e_2 отстает по фазе от э. д. с. e_1 на угол ψ_{12} .

Две синусоидальные величины, имеющие одинаковые начальные фазы, совпадают по фазе. Две синусоидальные величины, угол сдвига фаз которых равен 180° ($\psi_{12} = \pi$), изменяются в противофазе.

Пример 8-4. Дано: $e_1 = E_{1м} \sin(\omega t + 60^\circ)$; $e_2 = E_{2м} \sin(\omega t + 45^\circ)$; $f = 50$ Гц.

Определить: 1) угол сдвига фаз э. д. с. e_1 и e_2 ; 2) времена t_1 и t_2 , соответствующие начальным фазам э. д. с. e_1 и e_2 ; 3) время t_{12} , соответствующее сдвигу фаз э. д. с. e_1 и e_2 .

Решение. Выразим начальные фазы э. д. с. e_1 и e_2 в радианах:

$$\psi_1 = \frac{60^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = \frac{1}{3} \pi; \quad \psi_2 = \frac{45^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = \frac{1}{4} \pi.$$

Определим угол сдвига фаз э. д. с. e_1 и e_2

$$\psi_{12} = \psi_1 - \psi_2 = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ = \frac{15^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = \frac{1}{12} \pi$$

и период э. д. с.

$$T = 1/f = 1/50 = 0,02 \text{ с.}$$

Время, соответствующее начальным фазам э. д. с.,

$$t_1 = \frac{\psi_1}{\omega} = \frac{\pi/3}{2\pi} T = \frac{1}{6} 0,02 = 0,00333 \text{ с;}$$

$$t_2 = \frac{\psi_2}{\omega} = \frac{\pi/4}{2\pi} T = \frac{1}{8} 0,02 = 0,0025 \text{ с.}$$

Время, соответствующее сдвигу фаз э. д. с.,

$$t_{12} = t_1 - t_2 = 0,00333 - 0,0025 = 0,00083 \text{ с.}$$

Пример 8-5. Написать выражение э. д. с. e_2 , изменяющейся в противофазе с э. д. с. $e_1 = E_{1м} \sin(\omega t + \psi_1)$, если $\psi_1 = 60^\circ$.

Решение. Электродвижущая сила

$$e_2 = E_{2м} \sin(\omega t + \psi_1 + 180^\circ) = E_{2м} \sin(\omega t + 240^\circ).$$

Графическое изображение синусоидальных величин

Синусоидально изменяющиеся величины изображают синусоидами, показывающими мгновенные значения в любой момент времени, или вращающимися векторами.

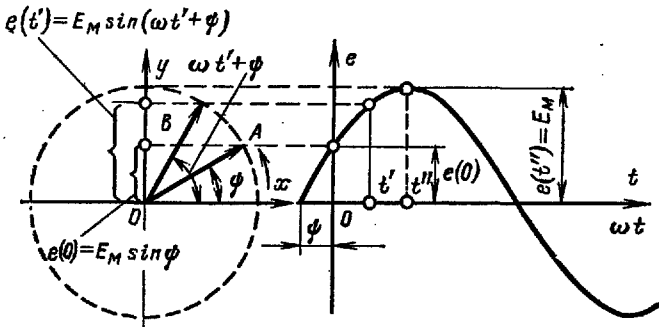


Рис. 8-8. Векторная диаграмма э. д. с. и ее синусоида.

Синусоиду строят так, чтобы ее ординаты в выбранном масштабе равнялись мгновенным значениям величины, а абсциссы — времени, отсчитанному от некоторого момента, выбранного за начало отсчета ($t = 0$). Такое изображение позволяет найти амплитуду, начальную фазу и период (рис. 8-1, 8-7).

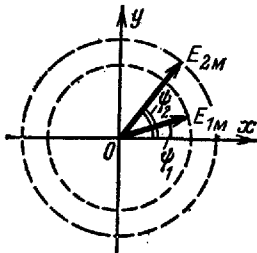


Рис. 8-9. Векторная диаграмма двух э. д. с.

При изображении синусоидально изменяющейся величины, например э. д. с. $e(t) = e = E_m \sin(\omega t + \psi)$, вращающимся вектором на плоскости xy (рис. 8-8) длина вектора OA в выбранном масштабе представляет амплитуду E_m ; угол между вектором и положительным направлением оси абсцисс x в начальный момент ($t = 0$) равен начальной фазе ψ , а угловая скорость вектора, направленная против вращения стрелки часов, равна угловой частоте ω . Мгновенное значение $e(t)$ определяется проекцией вектора на ось ординат y .

Действительно, в момент времени $t = 0$ э. д. с. $e(0) = E_m \sin \psi$, эту же величину выражает и проекция вектора OA на ось y . В момент времени t' э. д. с. $e(t') =$

$= E_m \sin(\omega t' + \psi)$ и проекция вектора, занявшего новое положение OB , выражает ту же величину $e(t')$. В момент t'' направление вращающегося вектора совпадает с положительным направлением оси y , т. е. проекция $e(t'')$ равна длине вектора E_m и т. д.

Совокупность двух или большего числа векторов, изображающих синусоидально изменяющиеся величины одной частоты в начальный момент времени ($t = 0$), называется векторной диаграммой. Например, э. д. с. $e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$ и $e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \psi_2)$ представлены на векторной диаграмме (рис. 8-9) двумя векторами E_{1m} и E_{2m} , углы между которыми и положительным

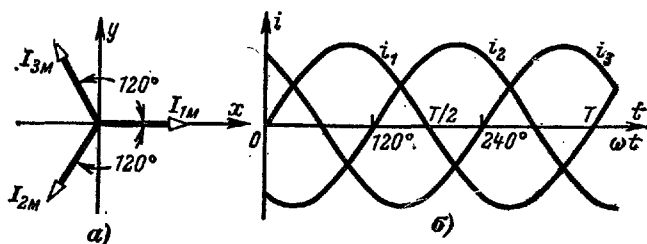


Рис. 8-10. Векторная диаграмма (а) и синусоиды (б) трех токов.

направлением оси x равны соответственно ψ_1 и ψ_2 ; пунктирные окружности, показанные на рисунке, обычно не изображаются.

На диаграмме рис. 8-10, а построены векторы трех токов:

$$\begin{aligned} i_1 &= I_{1m} \sin \omega t; \\ i_2 &= I_{2m} \sin(\omega t - 120^\circ); \\ i_3 &= I_{3m} \sin(\omega t + 120^\circ), \end{aligned}$$

а на рис. 8-10, б показаны синусоиды этих токов. Ток i_1 имеет нулевую начальную фазу, поэтому вектор I_{1m} расположен вдоль положительной полуоси x . Ток i_2 отстает по фазе от тока i_1 на 120° , начальная фаза его отрицательная (-120°), поэтому вектор I_{2m} повернут относительно вектора тока I_{1m} по направлению движения часовой стрелки, т. е. в отрицательном направлении, на 120° . Ток i_3 опережает по фазе ток на 120° (или отстает по фазе на 240°), поэтому его начальная фаза положительна ($+120^\circ$) и вектор тока I_{3m} повернут в положительную сторону, т. е. в направлении, обратном движению часовой стрелки, на соответствующий угол.

Так как на векторных диаграммах изображают токи, э. д. с., напряжение и т. д. только одной частоты, то угловая скорость всех векторов на данной диаграмме одинакова и взаимное расположение векторов в любой момент остается неизменным. При изучении синусоидальных, т. е. периодически изменяющихся величин, начало отсчета времени можно выбрать произвольно; поэтому на векторной диаграмме один из векторов можно направить произвольно, а остальные векторы расположить по отношению к первому под углами, равными соответствующим углам сдвига фаз, и оси координат опустить.

Пример 8-6. Построить векторную диаграмму э. д. с. примера 8-4, приняв за начало отсчета времени момент: а) когда э. д. с. $e_2(0) = E_{2м} \sin 45^\circ$; б) когда э. д. с. $e_2(0) = 0$.

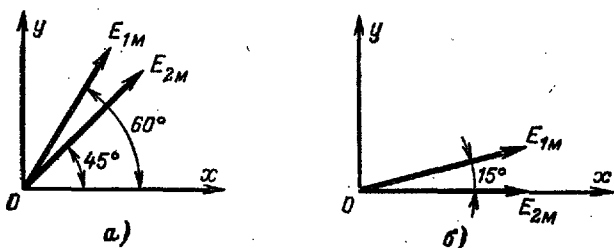


Рис. 8-11. Векторные диаграммы к примеру 8-6.

Решение. а) В первом случае э. д. с. $e_2 = E_{2м} \sin(\omega t + 45^\circ)$, а э. д. с. e_1 , как задано в примере 8-4, опережает по фазе э. д. с. e_2 на 15° , т. е. $e_1 = E_{1м} \sin(\omega t + 60^\circ)$, что и показано на рис. 8-11, а.

б) Во втором случае э. д. с. e_2 следует записать в виде $e_2 = E_{2м} \sin \omega t$, а первую — в виде $e_1 = E_{1м} \sin(\omega t + 15^\circ)$, чтобы первая э. д. с. по-прежнему опережала по фазе э. д. с. e_2 на 15° (рис. 8-11, б).

Изображение синусоидальных величин векторами позволяет значительно упростить графическое определение суммы или разности нескольких синусоидальных величин.

Рассмотрим сложение двух синусоидальных величин одной частоты

$$e_1 = E_{1м} \sin(\omega t + \psi_1) \text{ и } e_2 = E_{2м} \sin(\omega t + \psi_2).$$

Мгновенное значение результирующей э. д. с. равно алгебраической сумме мгновенных значений слагаемых величин, т. е.

$$e = e_1 + e_2 = E_{1м} \sin(\omega t + \psi_1) + E_{2м} \sin(\omega t + \psi_2).$$

Сложение двух синусоидальных величин, например e_1 и e_2 , можно произвести графически (рис. 8-12) по точкам.

Ордината результирующей кривой для каждого момента времени равна сумме ординат слагаемых синусоид для того же момента времени.

Суммарная кривая также будет синусоидой той же частоты, что и слагаемые. Из графика определяется амплитуда и начальная фаза результирующей э. д. с., так что можно записать:

$$e = e_1 + e_2 = E_m \sin(\omega t + \psi). \quad (8-8)$$

Достаточно точное построение требует значительной затраты времени.

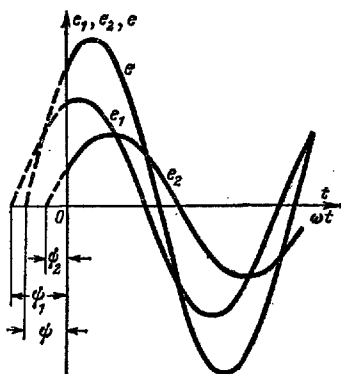


Рис. 8-12. Сложение двух синусоид.

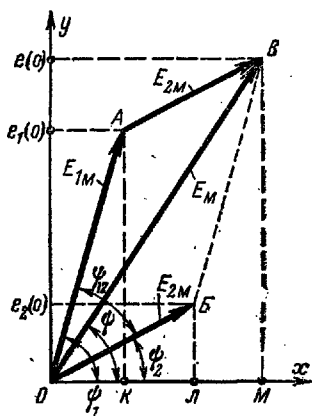


Рис. 8-13. Сложение двух векторов.

Докажем равенство вектора, изображающего результирующую синусоиду, геометрической сумме векторов, представляющих слагаемые синусоиды. Для сложения двух синусоидальных э. д. с. e_1 и e_2 , изображенных в выбранном масштабе векторами OA и OB (рис. 8-13), необходимо один из векторов, например OB , перенести параллельно самому себе так, чтобы начало его совпало с концом другого вектора (OA); тогда замыкающий вектор OB будет изображать суммарную э. д. с. e . Вектор OB можно построить и как диагональ параллелограмма со сторонами OA и OB .

Действительно, при $t=0$ проекция вектора OA на ось y представляет мгновенное значение $e_1(0)$, проекция вектора OB (или равного ему вектора AB) на ту же ось — мгновенное значение $e_2(0)$, а сумма этих проекций $e_1(0) + e_2(0)$ равна проекции на ось ординат $e(0)$ суммарного

вектора OB . Взаимное расположение векторов при их вращении не изменяется и для проекций в любой момент времени выполняется необходимое условие $e = e_1 + e_2$.

Из треугольника векторов находим по известной теореме амплитуду суммарной э. д. с.

$$E_m = \sqrt{E_{1m}^2 + E_{2m}^2 + 2E_{1m}E_{2m} \cos \psi_{12}}, \quad (8-9)$$

где $\psi_{12} = \psi_1 - \psi_2$;

тангенс начального фазового угла ψ результирующей э. д. с. (рис. 8-13)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{BM}{OM} = \frac{E_m \sin \psi}{E_m \cos \psi} = \frac{(AK) + (BL)}{(OK) + (OL)} = \\ &= \frac{E_{1m} \sin \psi_1 + E_{2m} \sin \psi_2}{E_{1m} \cos \psi_1 + E_{2m} \cos \psi_2}. \end{aligned} \quad (8-10)$$

Таким образом, при сложении синусоидальных величин одной частоты получается синусоидальная величина той же частоты, амплитуда которой равна геометрической сумме амплитуд слагаемых синусоид.

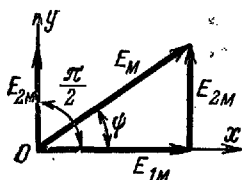


Рис. 8-14. Сложение векторов э. д. с., сдвинутых по фазе на угол $\pi/2$.

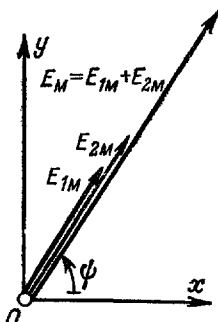


Рис. 8-15. Сложение векторов э. д. с., совпадающих по фазе.

Для часто встречающегося случая сложения двух синусоидальных величин $e_1 = E_{1m} \sin \omega t$ и $e_2 = E_{2m} \sin (\omega t + \pi/2)$, сдвинутых по фазе на угол $+\pi/2$ (рис. 8-14), можно написать:

$$e = e_1 + e_2 = E_m \sin (\omega t + \psi),$$

где амплитуда результирующей э. д. с.

$$E_m = \sqrt{E_{1m}^2 + E_{2m}^2}, \quad (8-11)$$

а тангенс угла

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{E_m \sin \psi}{E_m \cos \psi} = \frac{E_{2m}}{E_{1m}}. \quad (8-12)$$

При сложении двух синусоидальных величин, имеющих одинаковые начальные фазы $e_1 = E_{1м} \sin(\omega t + \psi)$ и $e_2 = E_{2м} \sin(\omega t + \psi)$ (рис. 8-15), получаем

$$e = e_1 + e_2 = (E_{1м} + E_{2м}) \sin(\omega t + \psi) = E_{м} \sin(\omega t + \psi).$$

Таким образом, в этом случае амплитуда результирующей э. д. с. равна сумме амплитуд слагающих э. д. с., а начальная фаза результирующей э. д. с. равна начальной фазе каждой из слагающих э. д. с.

При числе векторов больше двух сложение их производится аналогично рассмотренному выше: векторы переносятся параллельно самим себе так, чтобы начало второго

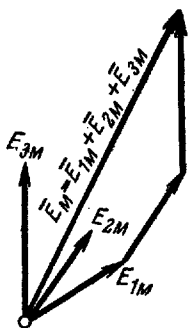


Рис. 8-16. Сложение векторов трех э. д. с.

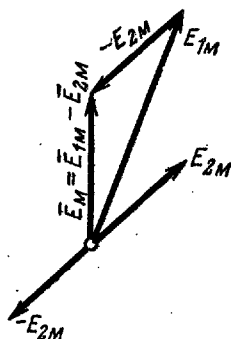


Рис. 8-17. Вычитание векторов двух э. д. с.

вектора совпало с концом первого, начало третьего совпало с концом второго и т. д. Замыкающий вектор представляет собой вектор суммарной величины. На рис. 8-16 показано сложение векторов трех э. д. с.

Вычитание одной синусоидальной величины из другой синусоидальной величины заменяют сложением уменьшаемой величины с вычитаемой, взятой с обратным знаком, что следует из выражения

$$e_1 - e_2 = e_1 + (-e_2).$$

Следует иметь в виду, что изменение знака у синусоидальной величины соответствует изменению начального фазового угла на 180° ; действительно, можно написать:

$$-E_{2м} \sin(\omega t + \psi_2) = E_{2м} \sin(\omega t + \psi_2 \pm \pi).$$

Если синусоидальная величина изображена вектором, то изменение знака означает поворот вектора на $\pm 180^\circ$.

Таким образом, вычитание вектора можно заменить сложением вектора уменьшаемой величины с обратным вектором вычитаемой величины (рис. 8-17).

При сложении двух синусоидальных величин различной частоты получается несинусоидальная величина, которую нельзя изображать вращающимся вектором.

Пример 8-7. Два генератора переменного тока с э. д. с. $e_1 = 125 \sin \omega t$, В, и $e_2 = 125 \sin (\omega t + \pi/3)$, В, соединены последовательно. Определить результирующую э. д. с.

Решение. Начальные фазы э. д. с. $\psi_1 = 0$; $\psi_2 = \pi/3$ и их разность $\psi_{12} = -\pi/3$. Амплитуда результирующей э. д. с.

$$E_m = \sqrt{E_{1m}^2 + E_{2m}^2 + 2E_{1m}E_{2m} \cos(\psi_{12})} = \\ = \sqrt{125^2 + 125^2 + 2 \cdot 125 \cdot 125 \cos(-\pi/3)} = 125 \sqrt{3} = 215 \text{ В.}$$

Начальную фазу результирующей э. д. с. определим через ее тангенс:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{E_{1m} \sin \psi_1 + E_{2m} \sin \psi_2}{E_{1m} \cos \psi_1 + E_{2m} \cos \psi_2} = \frac{0 + (125 \sqrt{3}/2)}{125 + (125 \cdot 1/2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и начальная фаза $\psi = \pi/6$.

Результирующая э. д. с.

$$e = e_1 + e_2 = 215 \sin (\omega t + \pi/6), \text{ В.}$$

8-4

Средние значения тока, напряжения и э. д. с.

а) **Среднее значение за половину периода.** До сих пор для характеристики тока, напряжения и э. д. с. определялись их мгновенные и максимальные значения. Однако в электротехнике применяют еще два понятия: среднее и действующее (эффективное) значения.

Среднее значение синусоидального тока $I_{\text{ср}}$ вычисляют за полупериод, в течение которого ток остается положительным, т. е. направление тока не изменяется. Оно равно величине такого постоянного тока, при котором в течение полупериода проходит то же количество электричества Q , что и при переменном токе, таким образом,

$$I_{\text{ср}} = \frac{Q}{T/2} = \frac{2}{T} Q = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i \, dt, \quad (8-13)$$

причем начало отсчета времени $t = 0$ должно совпадать с началом периода тока, чтобы направление тока не изме-

нялось. Аналогично определяются средние значения напряжения и э. д. с.

$$U_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} u dt \quad \text{и} \quad E_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} e dt. \quad (8-14)$$

Среднее за полупериод значение тока можно представить графически высотой прямоугольника с основанием, равным $T/2$, и площадью, равной площади, которая ограничена осью абсцисс и кривой тока от начала периода до половины периода (рис. 8-18).

Среднее и максимальное значения синусоидального тока связаны между собой следующим соотношением:

$$I_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i dt = \frac{2I_m}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = \\ = -\frac{2I_m}{T\omega} \cos \omega t \Big|_0^{T/2}$$

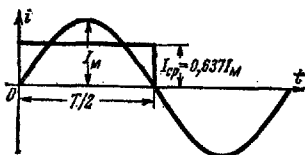


Рис. 8-18. Среднее значение тока за полупериод.

и так как $T\omega = 2\pi$, а $\cos(\omega T/2) = \cos(2\pi/2) = -1$ и $\cos 0 = 1$, то

$$I_{cp} = -\frac{I_m}{\pi} (-1 - 1) = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0,637 I_m. \quad (8-15)$$

Такое же соотношение имеет место для синусоидальных напряжения и э. д. с.:

$$U_{cp} = 0,637 U_m \quad \text{и} \quad E_{cp} = 0,637 E_m. \quad (8-16)$$

б) Среднее значение за период. При синусоидальном токе в течение первой половины периода определенное количество электричества $Q = I_{cp} \cdot T/2$ проходит в прямом направлении. В течение второй половины периода то же количество электричества проходит в обратном направлении. Таким образом, количество электричества, прошедшее за период, равно нулю и среднее за период значение синусоидального тока равно нулю.

Угол поворота подвижной части магнитоэлектрического измерителя, включенного в цепь переменного тока, пропорционален среднему за период значению тока, проходящего через катушку измерителя. Поэтому при синусоидальном токе угол поворота подвижной части измерителя равен нулю.

в) Среднее значение выпрямленного тока. Если включить магнитоэлектрический измеритель I последовательно

с электрическим вентилем (рис. 8-19) в одну из параллельных ветвей, то через измеритель в течение периода будет проходить только одна полуволна тока (рис. 8-20). Вторая полуволна тока будет проходить по второй параллельной ветви, в которой вентиль включен в обратном направлении.

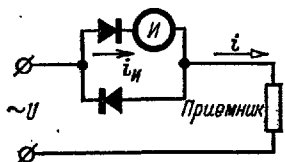


Рис. 8-19. Схема соединения магнитоэлектрического измерителя с вентилями для измерения переменного тока.

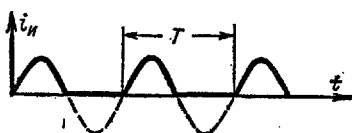


Рис. 8-20. Ток в измерителе при соединении по схеме 8-19.

Среднее за период значение синусоидального тока $i = I_m \sin \omega t$ при однополупериодном выпрямлении, т. е. среднее значение тока i_n в измерителе,

$$I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} i_n dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = \frac{1}{\pi} I_m. \quad (8-17)$$

При включении измерителя в диагональ выпрямительного моста (рис. 8-21) через него в течение периода будут

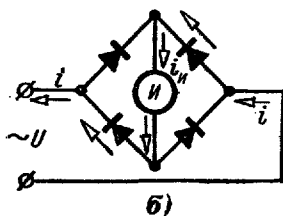
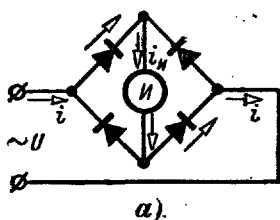


Рис. 8-21. Мостовая схема соединения магнитоэлектрического измерителя с вентилями для измерения переменного тока.

проходить две полуволны тока i_n одного направления (рис. 8-22) и среднее значение выпрямленного тока при двухполупериодном выпрямлении будет вдвое больше, чем при однополупериодном выпрямлении, т. е.

$$I_{cp} = \frac{2}{\pi} I_m = 0,637 I_m. \quad (8-18)$$

На рис. 8-21, а и б показаны направления токов в вентильях и в измерителе в течение первого (а) и второго (б) полупериодов тока.

г) **Среднее значение э. д. с. индукции.** Если индуктируемая в катушке с числом витков ω э. д. с. обусловлена изменением магнитного потока по синусоидальному закону, то среднее значение ее за полупериод можно выразить через амплитуду магнитного потока.

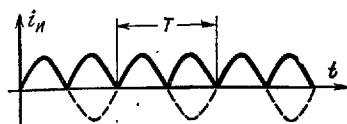


Рис. 8-22. Ток в измерителе при соединении по схеме рис. 8-21.

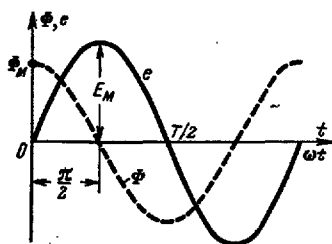


Рис. 8-23. Магнитный поток и наводимая им э. д. с.

Так как начальную фазу одной из синусоидально изменяющихся величин можно выбирать произвольно, то допустим, что магнитный поток имеет начальную фазу $\psi = 90^\circ$ (рис. 8-23), т. е.

$$\Phi = \Phi_m \sin(\omega t + 90^\circ) = \Phi_m \cos \omega t.$$

Тогда наведенная э. д. с.

$$\begin{aligned} e &= -\omega \frac{d\Phi}{dt} = -\omega \Phi_m \frac{d(\cos \omega t)}{dt} = -\omega \Phi_m (-\sin \omega t) = \\ &= \omega \Phi_m \sin \omega t = E_m \sin \omega t, \end{aligned} \quad (8-19)$$

где $E_m = \omega \Phi_m = 2\pi f \omega \Phi_m$ — амплитуда э. д. с.

Таким образом, синусоидальный магнитный поток наводит синусоидальную э. д. с. индукции, отстающую по фазе от магнитного потока на угол $\pi/2$ (рис. 8-23).

Среднее за полупериод значение э. д. с.

$$E_{cp} = \frac{2}{\pi} E_m = \frac{4\pi}{\pi} f \omega \Phi_m = 4f \omega \Phi_m. \quad (8-20)$$

8-5

Действующие значения тока, напряжения и э. д. с.

При расчете цепей переменного тока и их экспериментальном исследовании чаще всего пользуются понятием действующих значений тока, напряжения и э. д. с.

Действующие значения переменных величин обозначаются прописными буквами без индексов, т. е. I — ток; U — напряжение; E — э. д. с.

На шкалах измерительных приборов, а также в технической документации, если нет оговорок, указываются действующие значения тока, напряжения и э. д. с.

Действующее значение переменного тока равно значению такого эквивалентного постоянного тока, который, проходя по цепи с тем же сопротивлением, что и переменный ток, выделяет за период то же количество тепла.

При сопротивлении цепи r количество тепла, выделенное переменным током, за бесконечно малый промежуток времени dt ,

$$dW_T = i^2 r dt,$$

а за период T переменного тока количество выделенного им тепла

$$W_T = \int_0^T dW_T = \int_0^T i^2 r dt.$$

Приравняв W_T количеству тепла, выделенному при том же сопротивлении r постоянным током I за то же время T , получим:

$$I^2 r T = \int_0^T i^2 r dt,$$

откуда действующее значение переменного тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (8-21)$$

Полученное выражение показывает, что действующее значение переменного тока представляет собой корень квадратный из среднего за период значения квадрата мгновенного значения тока.

На рис. 8-24, а приведена кривая переменного тока i и кривая квадрата этого тока i^2 . Площадь $aBbA + B\Gamma\delta B$, ограниченная кривой $aBb\Gamma\delta$ и осью абсцисс, в одном масштабе представляет собой величину, определяемую выражением $\int_0^T i^2 dt$, а в другом масштабе, в r раз большем, количество тепла, выделенного током i за время T при сопротивлении цепи r и определяемое выражением $r \int_0^T i^2 dt$.

На рис. 8-24, *б* сплошная кривая изображает постоянный ток, а пунктирная прямая — квадрат этого тока. Площадь *абвга* в одном масштабе представляет произведение $I^2 T$, а в другом масштабе, в r раз большем, количество тепла, выделенного током I за время T при сопротивлении цепи r .

Если площади $aBВa + BГгB$ и $абвга$ равны, то количество тепла, выделенного переменным током i , и количество тепла, выделенного постоянным током I при одном и том же сопротивлении r за одно и то же время T , равны.

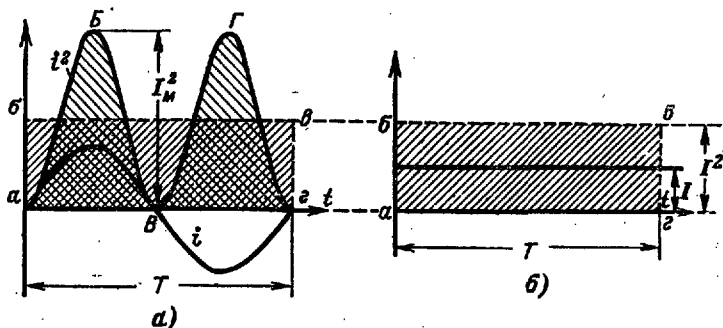


Рис. 8-24. Переменный ток и квадрат переменного тока (*а*), эквивалентный постоянный ток и квадрат постоянного тока (*б*).

В этом случае действующее значение переменного тока равно значению постоянного тока. Для определения действующего значения переменного тока нужно площадь $aBВa + BГгB$ заменить площадью равновеликого прямоугольника $абвга$ с основанием T ; тогда высота прямоугольника определит квадрат действующего значения переменного тока:

Аналогично действующие значения напряжения и э. д. с.

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} \quad \text{и} \quad E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}.$$

Если ток изменяется по закону синуса, т. е. $i = I_m \sin \omega t$, то действующее значение тока

$$I = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt}.$$

Приняв во внимание, что

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\omega t}{2}$$

$$\text{и } \int_0^T \frac{1}{2} dt = \frac{T}{2}, \text{ а } \int_0^T \frac{\cos 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{4\omega} \sin 2\omega t \Big|_0^T = 0,$$

получим:

$$I = I_m \sqrt{\frac{1}{T} \frac{T}{2}} = I_m / \sqrt{2} \approx 0,707 I_m. \quad (8-22)$$

Аналогично для действующих значений синусоидальных напряжения и э. д. с. можно написать:

$$U = U_m / \sqrt{2} \approx 0,707 U_m \text{ и } E = E_m / \sqrt{2} \approx 0,707 E_m.$$

При однополупериодном выпрямлении синусоидального тока действующее значение

$$I = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^{T/2} \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \frac{T}{4}} = I_m / 2. \quad (8-23)$$

При двухполупериодном выпрямлении синусоидального тока действующее значение тока будет таким же, как и для синусоидального тока, поскольку квадрат силы тока i^2 не изменяется, т. е. в этом случае выпрямление тока не влияет на тепловой эффект.

Действующие значения синусоидальных токов, напряжений и э. д. с. пропорциональны амплитудам этих величин; поэтому вектор, выражающий в одном масштабе амплитудное значение, в другом масштабе представляет действующее значение той же величины. В дальнейшем при определении масштабов векторов будут иметься в виду их действующие значения.

Пример 8-8. Напряжение, измеренное вольтметром, $U = 220$ В. Определить амплитуду напряжения.

Решение. Амплитуда напряжения

$$U_m = \sqrt{2} U = 1,41 \cdot 220 = 310 \text{ В.}$$

8-6

Коэффициенты формы и амплитуды

Соотношения между амплитудой, действующим и средним за половину периода значениями тока, напряжения и э. д. с., изменяющихся синусоидально или по любому

другому периодическому закону, характеризуются коэффициентами формы k_Φ и амплитуды k_a .

Коэффициентом формы называется отношение действующего значения к среднему:

$$k_\Phi = I/I_{cp}, \text{ или } k_\Phi = U/U_{cp}, \text{ или } k_\Phi = E/E_{cp}. \quad (8-24)$$

Коэффициентом амплитуды называется отношение максимального (амплитудного) значения к действующему

$$k_a = I_m/I, \text{ или } k_a = U_m/U, \text{ или } k_a = E_m/E. \quad (8-25)$$

Для синусоидально изменяющихся величин коэффициент формы

$$k_\Phi = I/I_{cp} = \frac{I_m \pi}{\sqrt{2} 2I_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11 \quad (8-26)$$

и коэффициент амплитуды

$$k_a = I_m/I = \sqrt{2} = 1,41. \quad (8-27)$$

Если периодически изменяющаяся величина имеет кривую более острой формы, чем синусоида, то обычно коэффициент формы $k_\Phi > 1,1$ и коэффициент амплитуды $k_a > 1,41$. Кривые, имеющие более тупую (пологую) форму, характеризуются коэффициентами $k_\Phi < 1,1$ и $k_a < 1,41$.

Применяя коэффициент формы, можно действующее значение э. д. с. выразить через максимальное значение магнитного потока, индуцирующего эту э. д. с.:

$$E = k_\Phi E_{cp} = 4k_\Phi \omega f \Phi_m, \quad (8-28)$$

и при синусоидальной форме кривой магнитного потока

$$E = 4k_\Phi \omega f \Phi_m = 4,44 \omega f \Phi_m. \quad (8-29)$$

8-7

Измерение переменных токов, напряжений и частоты

а) **Амперметр и вольтметр.** Для измерений токов и напряжений (или э. д. с.) в цепях переменного тока наиболее часто применяются соответственно амперметры и вольтметры электромагнитной системы.

Электромагнитный измерительный механизм (рис. 6-31) рассмотрен в § 6-11.

Переменный ток, проходя по катушке измерителя, создает вращающий момент, пропорциональный квадрату мгновенного значения тока, т. е.

$$M = ki^2.$$

Вследствие значительной инерции подвижной части измерителя угол поворота ее пропорционален среднему значению вращающего момента за период

$$M_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T M dt = \frac{1}{T} k \int_0^T i^2 dt = k I^2,$$

так как по определению $\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = I^2$ — квадрат действующего значения тока.



Рис. 8-25. Кривая исследуемого напряжения на экране осциллографа.

Таким образом, средний вращающий момент и пропорциональный ему угол поворота подвижной части измерителя определяются квадратом действующего значения тока.

Обмотка электромагнитного амперметра состоит из нескольких витков или нескольких десятков витков. Вольтметр имеет обмотку с большим числом витков (несколько тысяч) и добавочное сопротивление. На шкалу прибора наносятся действующие значения тока или напряжения.

б) **Осциллограф.** Кривые переменных токов и напряжений можно наблюдать и фотографировать при помощи осциллографов (осциллоскопов).

В электронном осциллографе основной частью является электронно-лучевая трубка (§ 3-3, рис. 3-8). Приложим к одной паре отклоняющих пластин X вспомогательное пилообразное напряжение, период которого равен периоду измеряемого переменного напряжения, приложенного к другой паре отклоняющих пластин Y . Пилообразное напряжение в течение каждого периода вызывает горизонтальное перемещение по экрану электронного луча с постоянной скоростью слева направо. Измеряемое напряжение вызывает отклонение того же луча пропорционально мгновенному значению напряжения в вертикальном направлении. В результате в течение каждого периода электронный луч описывает на экране кривую измеряемого напряжения (рис. 8-25). Вследствие световой инерции экрана кривую можно непосредственно наблюдать или фотографировать.

Светолучевой (электрохимический) осциллограф имеет измеритель (вибратор), состоящий из постоянного магнита NS (рис. 8-26), между полюсами 1 которого расположена узкая проводящая петля 2. При прохождении переменного тока i_b по петле вибратора возникают электромагнитные силы, под действием которых средняя часть петли и укрепленное на ней зеркальце 3 поворачиваются на угол, пропорциональный мгновенному значению тока. Луч света от лампочки 4 (рис. 8-27), пройдя через узкую щель и линзу 5, падает на зеркальце 3. Отраженный от зеркальца вибратора луч после фокуси-

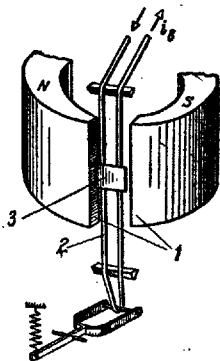


Рис. 8-26. Вибратор электрохимического осциллографа.

ровки его линзой 6 попадает на вращающийся барабан 7 с укрепленной на нем фотопленкой, на которой он и вычерчивает кривую тока (напряжения). Тот же луч света, пройдя через линзу 8 и отразившись от вращающегося зеркального многогранника 9, описывает на эк-

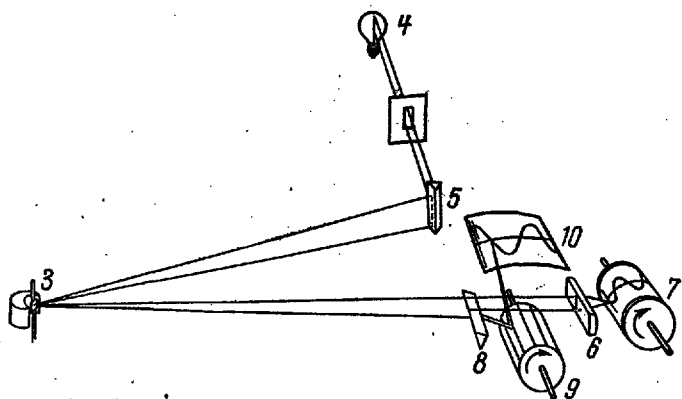


Рис. 8-27. Общая схема устройства электромеханического осциллографа.

ране 10 кривую измеряемого тока, которую можно непосредственно наблюдать.

в) **Частотомер.** Простейшим прибором для измерения переменного тока промышленной частоты является вибрационный электромагнитный частотомер (рис. 8-28).

Под действием переменного тока, проходящего по обмотке электромагнита Э, якорь Я периодически притягивается к сердечнику, электромагнита. Колебания (вибрации) якоря передаются стальным упругим пластинкам Г, концы которых загнуты под прямым углом. Пластинки подбираются с различной частотой собственных колебаний, поэтому та пластинка, частота которой совпадает с частотой вынужденных колебаний, колеблется заметно сильнее других. На шкале прибора около каждой пластинки указана частота, при которой амплитуда ее колебаний наибольшая. Таким образом, заметив пластинку, колеблющуюся с наибольшей амплитудой, определяют частоту переменного тока. Частотомер включается в сеть параллельно приемникам энергии, т. е. аналогично вольтметру.

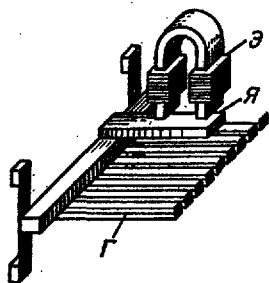


Рис. 8-28. Устройство вибрационного частотомера.

Неразветвленные цепи переменного тока

9-1

Особенности цепей переменного тока

В цепи постоянного тока при неизменном напряжении источника питания и параметрах цепи остаются постоянными: ток, мощность и энергия электрического и магнитного полей.

Явления, происходящие в цепях переменного тока, существенно отличаются от процессов в цепях постоянного тока.

При переменном напряжении на зажимах цепи изменяются электрическое поле и его энергия, а в цепи проходит переменный ток. Магнитное поле этого тока и запасенная в нем энергия также изменяются, и в цепи возникает э. д. с. самоиндукции. Изменяется и мощность цепи, характеризующая скорость преобразования электрической энергии в тепловую.

Электрическая цепь, в которой происходит преобразование электрической энергии в тепловую и в которой происходит изменение энергии электрического и магнитного полей, характеризуется тремя параметрами: сопротивлением r , емкостью C и индуктивностью L .

Наряду с цепями, обладающими всеми указанными параметрами, встречаются цепи, в которых преобладает один из них (r , L или C), тогда как другие параметры выявлены слабо и их влиянием можно пренебречь. Например, одну или несколько ламп накаливания, присоединенных к сети с частотой 50 Гц короткими соединительными проводами, можно рассматривать как сопротивление r , так как влияние остальных параметров на процессы в этой цепи ничтожно. То же можно сказать и о цепях с нагревательными приборами и реостатами.

Цепь ненагруженного трансформатора во многих случаях можно рассматривать как индуктивность L , а кабель, работающий без нагрузки, — как емкость C .

9-2

Цепь с сопротивлением

а) **Напряжение и ток цепи.** Если цепь (рис. 9-1) обладает только сопротивлением r , например цепь с резистором, и на зажимах ее действует синусоидально изменяющееся

напряжение

$$u = U_m \sin \omega t, \quad (9-1)$$

то по закону Ома ток

$$i = u/r = U_m \sin \omega t / r = I_m \sin \omega t. \quad (9-2)$$

Амплитудное значение этого тока

$$I_m = U_m / r, \quad (9-3)$$

т. е. равно амплитудному значению напряжения, деленному на сопротивление цепи.

Разделив амплитудные значения на $\sqrt{2}$, получим:

$$I_m / \sqrt{2} = \frac{U_m / \sqrt{2}}{r},$$

или

$$I = U / r. \quad (9-4)$$

Следовательно, действующее значение тока равно действующему значению напряжения на зажимах цепи, деленному на ее сопротивление. Таким образом, закон Ома для цепи переменного тока с сопротивлением r может быть написан и для мгновенных, и для амплитудных, и для действующих значений напряжения и тока.

Из (9-1) и (9-2) видно, что напряжение и ток имеют одинаковую начальную фазу, иначе говоря, они совпадают по фазе, т. е. одновременно достигают своих нулевых и амплитудных значений, и в любой момент времени мгновенные значения тока и напряжения пропорциональны друг другу.

На схеме рис. 9-1 стрелками показаны положительные направления тока и напряжения. Ток направлен так, как указывает стрелка, в те полупериоды, когда его мгновенные значения положительны, т. е. $i > 0$. В рассматриваемом случае $i = I_m \sin \omega t$. Это значит, что $i > 0$ в интервалах, когда $\sin \omega t > 0$ или $\omega t = 0 - \pi$ (рис. 9-2, а), а также $\omega t = 2\pi - 3\pi; 4\pi - 5\pi$ и т. д. Верхний зажим цепи (рис. 9-1) имеет потенциал выше, чем нижний, в те полупериоды, когда $u > 0$ (стрелка, как и в цепи постоянного тока, направлена от зажима, потенциал которого считается положительным по отношению к потенциалу второго зажима). Так как в цепи с сопротивлением напряжение и ток совпа-

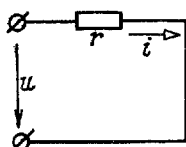


Рис. 9-1. Цепь с активным сопротивлением.

дают по фазе, то мгновенное значение напряжения положительно в те же моменты времени, что и ток (рис. 9-2, а).

На рис. 9-3 показана векторная диаграмма цепи, на которой вектор тока I совпадает по направлению с вектором напряжения U . Оси декартовых координат на этом рисунке не показаны, как и на других, векторных диаграммах этой главы.

б) **Мощность цепи.** Произведение мгновенных значений напряжения u и тока i называется мгновенным значением мощности, или, короче, мгновенной мощностью:

$$p = ui. \quad (9-5)$$

Мгновенная мощность характеризует скорость преобразования электрической энергии цепи в данный момент времени. В цепи с сопротивлением r мгновенная мощность показывает скорость

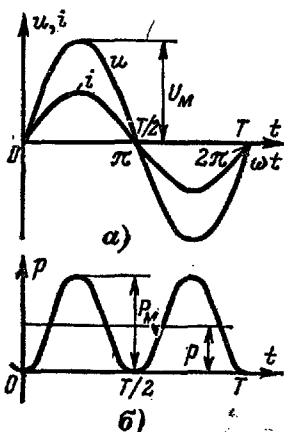


Рис. 9-2. Ток, напряжение (а) и мощность (б) цепи с активным сопротивлением.



Рис. 9-3. Векторная диаграмма цепи с активным сопротивлением.

преобразования электрической энергии в тепловую. Действительно, для рассматриваемой цепи $u = ir$ и

$$p = ui = i^2 r. \quad (9-6)$$

Допустим, что в момент t_1 напряжение $u_1 = 100$ В, а ток $i_1 = 2$ А; следовательно, сопротивление цепи

$$r = u_1/i_1 = 100/2 = 50 \text{ Ом}$$

и мгновенная мощность

$$p_1 = u_1 i_1 = i_1^2 r = 2^2 \cdot 50 = 200 \text{ Вт.}$$

Это значит, что в данный момент времени t_1 электрическая энергия превращается в тепло со скоростью 200 Дж/с.

Подставив в (9-6) выражения напряжения и тока, получим:

$$p = ui = U_m \sin \omega t I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t = 2UI \sin^2 \omega t. \quad (9-7)$$

На рис. 9-2, б показана зависимость мгновенной мощности от времени. Мощность в течение всего периода положительна, так как электрическая энергия превращается в тепловую независимо от направления тока в цепи. По величине мощность p изменяется от нуля при $i = 0$ (моменты времени $t = 0$; $t = T/2$; $t = T$) до положительного максимума $P_m = U_m I_m = I_m^2 r$ при токе $i = I_m$ и $i = -I_m$ (моменты времени $t = T/4$ и $t = 3T/4$).

Выражение мгновенной мощности (9-7) можно преобразовать, пользуясь известным соотношением $\sin^2 \omega t = (1 - \cos 2\omega t)/2$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} p &= U_m I_m \sin^2 \omega t = \frac{U_m I_m}{2} - \frac{U_m I_m}{2} \cos 2\omega t = \\ &= UI - UI \cos 2\omega t, \end{aligned} \quad (9-8)$$

т. е. мгновенная мощность представляет собой сумму двух слагающих: постоянной мощности UI и переменной $-UI \cos 2\omega t$, имеющей амплитуду UI и изменяющейся с двойной частотой. Средняя за период мощность P равна постоянной слагающей мгновенной мощности. Действительно,

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI - UI \cos 2\omega t] \, dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T UI \, dt = UI, \end{aligned}$$

так как среднее за период значение переменной слагающей $UI \cos 2\omega t$, как и всякой гармонической функции, равно нулю $\left(\frac{1}{T} \int_0^T UI \cos 2\omega t \, dt = 0 \right)$.

Таким образом, средняя за период мощность цепи с сопротивлением r равна произведению действующих значений напряжения и тока этой цепи.

Приняв во внимание, что $U = Ir$ и $I = U/r$, можно написать и другие выражения средней мощности:

$$P = UI = I^2 r = U^2 / r. \quad (9-9)$$

Среднюю за период мощность цепи принято называть активной мощностью, а сопротивление r , в кото-

ром электрическая энергия преобразуется в тепло, — активным сопротивлением.

Средняя или активная мощность характеризует среднюю скорость необратимого преобразования электрической энергии не только в тепловую, но и в другие виды энергии, например световую (лампы накаливания), механическую (электродвигатель), химическую (зарядка аккумулятора).

При определении энергии, которая расходуется в течение длительных промежутков времени, во много раз превосходящих период, пользуются понятием средней или активной мощности. При определении энергии, расходуемой в течение долей периода, пользуются понятием мгновенной мощности.

Пример 9-1. Определить ток и активную мощность цепи с напряжением $U = 220$ В, если сопротивление ее $r = 22$ Ом.

Решение. Ток цепи

$$I = U/r = 220/22 = 10 \text{ А,}$$

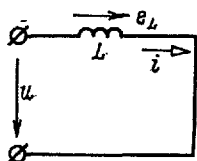
активная мощность цепи

$$P = UI = 220 \cdot 10 = 2\,200 \text{ Вт} = 2,2 \text{ кВт.}$$

9-3

Цепь с индуктивностью

а) **Напряжение, ток, сопротивление.** Если цепь обладает только индуктивностью (рис. 9-4), например, катушка индуктивности, потерями в которой можно пренебречь, и по ней проходит синусоидальный ток



$$i = I_m \sin \omega t, \quad (9-10)$$

то по определению потокосцепление цепи

$$\Psi = Li = LI_m \sin \omega t = \Psi_m \sin \omega t,$$

Рис. 9-4. Цепь с индуктивностью.

где $\Psi_m = LI_m$ — амплитуда потокосцепления.

Изменение потокосцепления вызывает э. д. с. самоиндукции

$$\begin{aligned} e_L &= - \frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d(I_m \sin \omega t)}{dt} = \\ &= -LI_m \omega \frac{d \sin \omega t}{d\omega t} = -LI_m \omega \cos \omega t = E_{Lm} \sin(\omega t - \pi/2), \end{aligned} \quad (9-11)$$

где $E_{Lm} = LI_m \omega$ — амплитуда э. д. с.

Так как сопротивление цепи $r = 0$, то по второму закону Кирхгофа сумма напряжения на зажимах цепи (напряжение питания) и э. д. с. самоиндукции e_L равна нулю

$$u + e_L = 0,$$

откуда напряжение цепи

$$\begin{aligned} u &= -e_L = L \frac{di}{dt} = LI_m \omega \sin(\omega t + \pi/2) = \\ &= U_m \sin(\omega t + \pi/2) = U_m \cos \omega t, \end{aligned} \quad (9-12)$$

где $U_m = E_m$.

Таким образом, приложенное к цепи напряжение вызывает в ней такой ток, который при своем изменении в каждый момент времени индуцирует э. д. с., равную по величине и противоположную по знаку приложенному к цепи напряжению, т. е. уравнивающую это напряжение.

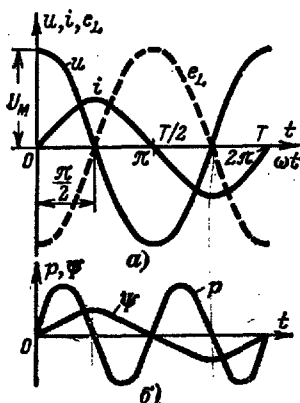


Рис. 9-5. Ток, напряжение (а) и мощность, потоко-сцепление (б) цепи с индуктивностью.

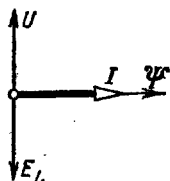


Рис. 9-6. Векторная диаграмма цепи с индуктивностью.

На рис. 9-5, а построены зависимости мгновенных значений тока, напряжения и э. д. с. от времени, а на рис. 9-6 — векторная диаграмма цепи.

Из (9-10) и (9-12) и из графика (рис. 9-5, а) следует, что напряжение опережает ток по фазе на угол $\pi/2$, или $1/4$ периода. Это объясняется тем, что в те моменты времени, когда ток проходит через нулевые значения, скорость изменения его наибольшая, соответственно наибольшими будут и э. д. с. e_L и уравнивающее ее напряжение u . Наоборот, в те моменты времени, когда ток проходит через свои амплитудные значения, скорость его изменения равна нулю, соответственно равны нулю и э. д. с. e_L и напряжение u .

По закону Ленца при нарастании тока э. д. с. e_L направлена навстречу току и, наоборот, при уменьшении тока направлена одинаково с ним. Поэтому, например, в течение первой четверти периода (рис. 9-5, а), когда ток положителен и нарастает, э. д. с. отрицательна, т. е. направлена противоположно тому, как указано стрелкой на рис. 9-4, а в течение второй четверти периода, когда ток положителен и убывает, э. д. с. положительна (направлена, как указано стрелкой на рис. 9-4) и т. д.

Из (9-11) и (9-12) следует, что

$$U_m = E_{Lm} = I_m \omega L, \quad (9-13)$$

откуда получаем закон Ома для амплитудных значений

$$I_m = U_m / \omega L = U_m / x_L. \quad (9-14)$$

Разделив на $\sqrt{2}$ каждую из частей написанного равенства, получим закон Ома для действующих значений тока и напряжения

$$I = U / \omega L = U / x_L. \quad (9-15)$$

Величина

$$x_L = \omega L = 2\pi f L \quad (9-16)$$

называется реактивным сопротивлением индуктивности или короче индуктивным сопротивлением.

Индуктивное сопротивление измеряется в омах, так как

$$[x_L] = [\omega L] = \frac{1}{c} \cdot \Gamma = \frac{1}{c} \cdot \text{Ом} \cdot \text{с} = \text{Ом}.$$

Индуктивное сопротивление пропорционально индуктивности и частоте, при постоянном токе оно равно нулю, т. е. цепь с индуктивностью не оказывает сопротивления протеканию постоянного тока, а цепь переменного тока с индуктивностью имеет сопротивление (9-16), которое растет с увеличением частоты тока.

Для цепи с индуктивностью закон Ома применим только для амплитудных и действующих значений тока и напряжения и не может применяться для мгновенных значений, так как $i \neq u/x_L$.

б) **Мощность цепи.** Мгновенная мощность цепи с индуктивностью определяется произведением мгновенных значений напряжения и тока

$$\begin{aligned} p = ui &= U_m \sin(\omega t + \pi/2) I_m \sin \omega t = U_m I_m \cos \omega t \sin \omega t = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t. \end{aligned} \quad (9-17)$$

Зависимость мгновенной мощности от времени построена на рис. 9-5, б.

Из уравнения и графика видно, что мгновенная мощность цепи с индуктивностью изменяется с двойной частотой, 2 раза в течение периода достигая положительного максимума $UI = I^2 \omega L$ и 2 раза достигая такого же по величине отрицательного максимума.

В течение первой четверти периода мгновенная мощность положительна, так как и ток и напряжение положительны. Ток в цепи увеличивается от нуля до максимального значения и за счет энергии, развиваемой генератором, увеличивается энергия магнитного поля цепи до наибольшего значения $W_{L_m} = LI_m^2/2 = LI^2$.

В течение второй четверти периода мгновенная мощность отрицательна, так как ток положительный, а напряжение отрицательное. Ток уменьшается от максимального значения до нуля; естественно, уменьшается до нуля и энергия магнитного поля цепи, которая возвращается обратно генератору. В течение третьей и четвертой четвертей периода явления повторяются с той лишь разницей, что ток будет отрицательным, т. е. его действительное направление будет противоположно направлению в первой половине периода.

Таким образом, мгновенная мощность цепи с индуктивностью

$$p = ui = L \frac{di}{dt} i = \frac{Li}{dt} \frac{di}{dt} = \frac{\Psi}{dt} \frac{di}{dt} \quad (9-17a)$$

характеризует скорость преобразования энергии генератора в энергию магнитного поля цепи, на что указывает числитель последней части формулы (9-17a), выражающий приращение энергии магнитного поля за время dt .

Цепь с индуктивностью в течение первой и третьей четвертей периода работает в режиме потребителя, запасая энергию W_{L_m} , а в течение второй и четвертой четвертей — в режиме генератора, возвращая обратно запасенную ей энергию W_{L_m} . Таким образом, энергия, полученная цепью с индуктивностью за каждую половину периода, равна нулю; следовательно, равна нулю и средняя мощность цепи. В рассматриваемой цепи происходит только периодический обмен энергией между генератором и магнитным полем цепи без необратимого преобразования электрической энергии, например в тепловую, механическую или химическую.

Величину энергии, которой обмениваются генератор и цепь с реактивным сопротивлением, характеризуют мак-

симальным значением мгновенной мощности цепи и называют ее реактивной мощностью.

Реактивная мощность цепи с индуктивностью

$$Q_L = UI = I^2 \omega L = W_{Lm} \omega. \quad (9-18)$$

Единица реактивной мощности та же, что и активной — ватт, но для внесения большей ясности в вопрос о том, о какой мощности идет речь, единицу реактивной мощности называют вольт-ампер реактивный (вар); более крупная единица 1 киловольт-ампер реактивный (квар) = 10^3 вар.

Пример 9-2. Катушка с индуктивностью $L = 25,4$ мГ и малым активным сопротивлением, которым можно пренебречь, включена в сеть с напряжением $U = 220$ В и частотой $f = 50$ Гц.

Определить: 1) реактивное сопротивление катушки x_L ; 2) ток в катушке I ; 3) реактивную мощность катушки Q_L ; 4) максимальную энергию, запасаемую в магнитном поле катушки W_{Lm} .

Решение. 1) Сопротивление катушки

$$x_L = \omega L = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 25,4 \cdot 10^{-3} = 8 \text{ Ом.}$$

2) Ток в катушке

$$I = U/x_L = 220/8 = 27,5 \text{ А.}$$

3) Реактивная мощность

$$Q_L = UI = 220 \cdot 27,5 = 6050 \text{ вар} = 6,050 \text{ квар.}$$

4) Максимальная энергия магнитного поля

$$W_{Lm} = LI_m^2/2 = 25,4 \cdot 10^{-3} (27,5 \sqrt{2})^2/2 = 19,2 \text{ Дж.}$$

9-4

Поверхностный эффект и эффект близости

Сопротивление проводника постоянному току определяется по (1-23)

$$r_0 = \rho l/S.$$

То же сопротивление можно определить, воспользовавшись формулой мощности (1-47)

$$r_0 = P_0/I_0^2. \quad (9-19)$$

Включив в цепь переменного тока проводник, обладающий в цепи постоянного тока сопротивлением r_0 и измерив ток I и мощность P , можем обнаружить, что его сопротивление

$$r = P/I^2 > r_0.$$

Таким образом, сопротивление проводника в цепи переменного тока, называемое активным сопротивлением, больше сопротивления проводника постоянному току.

Увеличение сопротивления проводника при переменном токе вызвано неодинаковой плотностью тока по сечению проводника, например, для проводника цилиндрического сечения различной плотностью тока в слоях, находящихся на разных расстояниях от оси. В поверхностных слоях проводника плотность тока больше, чем при постоянном токе, а в центральной части меньше. При достаточно высокой частоте неравномерность проявляется особенно резко, так что плотность тока в центральной части сечения провод-

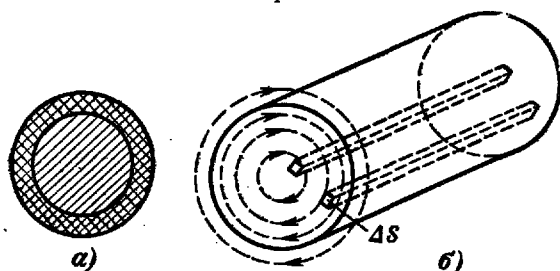


Рис. 9-7. Поверхностный эффект.

а — ток в поверхностном слое; б — магнитное поле цилиндрического провода.

ника практически равна нулю и ток проходит только в поверхностном слое (заштрихованный крестом слой на рис. 9-7, а), толщина которого уменьшается с повышением частоты. Поэтому рассмотренное явление получило название **поверхностного эффекта**. Поверхностный эффект вызывает по существу уменьшение сечения проводника, по которому проходит ток, что и приводит к увеличению его сопротивления.

Для объяснения поверхностного эффекта рассмотрим цилиндрический провод (рис. 9-7, б), который можно представить состоящим из большого числа элементарных проводников одинакового сечения ΔS , прилегающих вплотную друг к другу и расположенных концентрическими слоями. Сопротивление каждого из элементарных проводников постоянному току ($\rho l / \Delta S$) одинаково, поэтому и плотность постоянного тока в них также одинакова. Переменный ток возбуждает и внутри проводника и вне его переменное магнитное поле (рис. 4-13 и 9-7). Элементарные проводники, расположенные у оси провода, сцепляются с наибольшим

магнитным потоком (внутренним и внешним), а такие проводники, расположенные в поверхностном слое, сцепляются с наименьшим потоком (только внешним). Поэтому

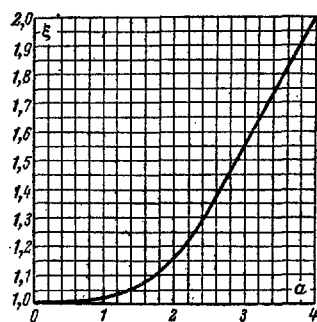


Рис. 9-8. График для определения коэффициента поверхностного эффекта.

первые обладают большим индуктивным сопротивлением, чем вторые, и соответственно ток в первых будет меньше, чем в вторых, т. е. плотность тока уменьшается от периферии к оси провода. Разница в плотности тока у оси и на периферии провода возрастает с увеличением диаметра провода d , проводимости материала $\gamma = 1/\rho$, магнитной проницаемости материала провода μ и частоты переменного тока f .

Отношение активного сопротивления провода r к его сопротивлению при постоянном токе r_0 называется коэффициентом поверхностного эффекта

$$\xi = r/r_0. \quad (9-20)$$

Коэффициент ξ (кси) определяют по таблицам или графикам. На рис. 9-8 дана зависимость коэффициента ξ от

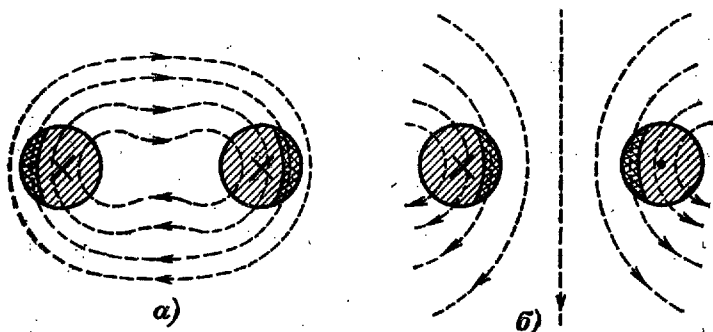


Рис. 9-9. Эффект близости.

произведения $a = d \sqrt{\gamma \mu_0 \mu f}$, в котором d выражается в см, γ — в См/см, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9}$ Г/см и f — в Гц.

Влияние токов, проходящих по соседним проводам, также приводит к различной плотности тока в проводах; это явление называется эффектом близости.

Если токи в двух параллельных проводах направлены одинаково (рис. 9-9, а), то элементарные проводники, принадлежащие разным проводам и наиболее удаленные друг от друга, сцепляются с наименьшим магнитным потоком и поэтому имеют наибольшую плотность тока (заштрихованы крестом на рис. 9-9, а). Если токи в двух параллельных проводах направлены противоположно друг другу (рис. 9-9, б), то наибольшая плотность тока наблюдается у наиболее сближенных элементарных проводников (принадлежащих разным проводам), которые сцеплены с наименьшим магнитным потоком. Таким образом, эффект близости определяется дополнительными э. д. с. взаимной индукции, наводимыми в элементарных проводниках.

Пример 9-3. Определить коэффициент поверхностного эффекта для медного провода диаметром $d = 11,3$ мм при частоте $f = 500$ Гц.
Решение. Произведение

$$\alpha = d \sqrt{\gamma \mu_0 f} = 1,13 \sqrt{57 \cdot 10^4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-9} \cdot 500} \approx 3,6.$$

Коэффициент поверхностного эффекта определяем по графику: $\xi = 1,84$.

9-5

Цепь с емкостью

а) **Напряжение, ток, сопротивление.** Если цепь, обладающая только емкостью (рис. 9-10), например конденсатор без потерь, находится под переменным напряжением, то заряд изменяется пропорционально напряжению ($q = Cu$) и, следовательно, в цепи будет проходить переменный ток.

Допустим, что напряжение на зажимах цепи изменяется по закону синуса:

$$u = U_m \sin \omega t, \quad (9-21)$$

тогда ток в цепи, равный скорости изменения заряда,

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu)}{dt} = C \frac{du}{dt} = C \frac{d(U_m \sin \omega t)}{dt} = C\omega U_m \cos \omega t = I_m \sin(\omega t + \pi/2). \quad (9-22)$$

Из (9-22) следует, что ток опережает по фазе напряжения на зажимах цепи на угол $\pi/2$, или на $1/4$ периода, а амплитуда его

$$I_m = C\omega U_m. \quad (9-23)$$

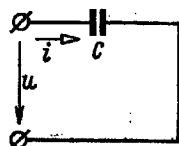


Рис. 9-10. Цепь с емкостью.

На рис. 9-11 построены зависимости тока и напряжения от времени, соответствующие (9-21) и (9-22), а на рис. 9-12 — векторная диаграмма цепи с емкостью.

В течение первой четверти периода напряжение в цепи положительно и изменяется от нуля до амплитудного значения U_m , пропорционально напряжению изменяется и заряд конденсатора, который заряжается, причем на левой обкладке (рис. 9-10) накапливается положительный заряд, а на правой — отрицательный. Скорость изменения напряжения, максимальная в начале, в конце первой четверти периода становится равной нулю. Ток в цепи, пропорциональный скорости увеличения напряжения (9-22), положи-

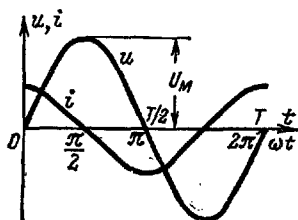


Рис. 9-11. Ток и напряжение цепи с емкостью.

телен и изменяется от I_m до нуля. В течение второй четверти напряжение уменьшается от U_m до нуля;

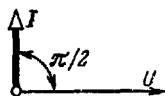


Рис. 9-12. Векторная диаграмма цепи с емкостью.

пропорционально напряжению уменьшается заряд конденсатора, т. е. конденсатор разряжается. В начале этой четверти периода скорость уменьшения напряжения равна нулю, а в конце — максимальна, поэтому ток в цепи отрицателен, т. е. его направление обратно показанному на рис. 9-10 и он изменяется от нуля до $-I_m$.

В течение третьей и четвертой четвертей периода происходит опять зарядка, но на обкладках накапливаются заряды обратного знака, а затем — разрядка конденсатора.

Разделив обе части уравнения (9-23) на $\sqrt{2}$, получим:

$$I_m/\sqrt{2} = \omega C U_m/\sqrt{2} \text{ или } I = \omega C U = \frac{U}{1/\omega C} = \frac{U}{x_C}, \quad (9-24)$$

т. е. закон Ома для цепи с емкостью.

Величина

$$x_C = 1/\omega C = 1/(2\pi f C) \quad (9-25)$$

представляет собой реактивное сопротивление емкости или емкостное сопротивление. Оно измеряется в омах:

$$[x_C] = \left[\frac{1}{\omega C} \right] = 1 / \left(\frac{1}{c} \cdot \Phi \right) = 1 / \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{В}} \right) = \frac{1}{\text{А/В}} = \text{В/А} = \text{Ом}.$$

Емкостное сопротивление изменяется обратно пропорционально частоте f и емкости C . Уменьшение частоты вызывает увеличение емкостного сопротивления, так что при постоянном напряжении, т. е. при $f = 0$, емкостное сопротивление $x_C = \infty$ и постоянный ток через емкость не проходит.

Для цепи с емкостью закон Ома применим только для амплитудных и действующих значений тока и напряжения и не может применяться для мгновенных значений, т. е. $i \neq u/x_C$.

Если начальная фаза напряжения на емкости выбрана равной нулю, т. е. $u = U_m \sin \omega t$, то ток в цепи по (9-22) $i = I_m \sin (\omega t + \pi/2)$.

Если начальную фазу напряжения выбрать равной $-\pi/2$ (рис. 9-13, а)

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin (\omega t - \pi/2) = \\ &= -U_m \cos \omega t, \end{aligned} \quad (9-26)$$

т. е. за начало отсчета времени принять момент, когда напряжение проходит через отрицательное амплитудное значение, то ток в цепи с емкостью

$$\begin{aligned} i &= C du/dt = C \omega U_m \sin \omega t = \\ &= I_m \sin \omega t. \end{aligned} \quad (9-27)$$

Из (9-27) следует, что ток, как и в предыдущем случае, опережает по фазе напряжение на угол $\pi/2$, но в начальный момент отсчета времени проходит через нулевое значение.

б) Мощность цепи. Мгновенная мощность цепи с емкостью определяется произведением мгновенных значений напряжения и тока.

Если напряжение на зажимах цепи равно $u = U_m \sin (\omega t - \pi/2)$, а ток в цепи $i = I_m \sin \omega t$, то мгновенная мощность

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m \sin (\omega t - \pi/2) I_m \sin \omega t = \\ &= UI \cos (-\pi/2) - UI \cos (2\omega t - \pi/2) = -UI \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

Зависимость мгновенной мощности от времени построена на рис. 9-13, б.

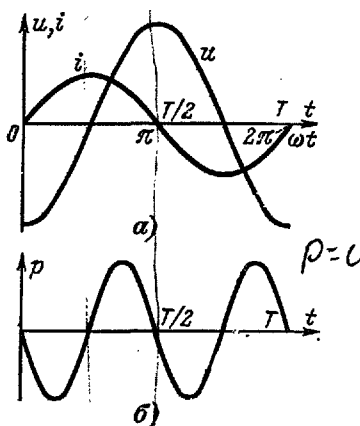


Рис. 9-13. Ток, напряжение (а) и мощность (б) цепи с емкостью.

Из приведенных уравнений и графиков видно, что мгновенная мощность цепи изменяется с двойной частотой, 2 раза в течение периода достигая положительного максимума $UI = U^2\omega C$ и 2 раза такого же по величине отрицательного максимума.

В течение первой четверти периода мгновенная мощность отрицательна, так как напряжение цепи от отрицательного максимума ($-U_m$) уменьшается до нуля, конденсатор разряжается, максимальная энергия электрического поля конденсатора $W_{cm} = CU_m^2/2 = CU^2$ уменьшается до нуля, т. е. энергия возвращается генератору.

В течение второй четверти периода мгновенная мощность положительна, напряжение от нуля увеличивается до U_m , конденсатор заряжается, в его электрическом поле запасается энергия, получаемая от генератора и возрастающая от нуля до наибольшего значения W_{cm} .

В течение третьей и четвертой четвертей периода явления повторяются с той лишь разницей, что действительное направление тока противоположно направлению тока в первый полупериод.

Таким образом, мгновенная мощность цепи с емкостью

$$p = ui = u \frac{d(Cu)}{dt} = \frac{Cu du}{dt} \quad (9-28)$$

характеризует скорость преобразования энергии генератора в энергию электрического поля цепи, на что указывает числитель последней части формулы (9-28), выражающий приращение энергии электрического поля за время dt .

Цепь с емкостью при выбранном начале отсчета времени в течение первой и третьей четвертей периода (рис. 9-13) работает в режиме генератора, возвращая запасенную ей энергию W_{cm} , а в течение второй и четвертой четвертей работает в режиме потребителя, запасая энергию W_{cm} . Следовательно, энергия, полученная цепью с емкостью за каждый полупериод, равна нулю; равна нулю и средняя мощность цепи. В этой цепи происходит только периодический обмен энергией между генератором и конденсатором без превращения ее в тепловую, механическую или химическую.

Величину энергии, которой обмениваются генератор и конденсатор, характеризуют максимальным значением мгновенной мощности этой цепи и называют реактивной мощностью конденсатора

$$Q_C = UI = C\omega U^2 = W_{cm}\omega. \quad (9-29)$$

Пример 9-4. Конденсатор емкостью $C = 80$ мкФ включен в сеть с напряжением $U = 240$ В, частотой $f = 50$ Гц.

Определить: 1) сопротивление емкости; 2) ток в цепи; 3) реактивную мощность цепи; 4) максимальную энергию электрического поля конденсатора.

Решение.

$$1) x_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{10^6}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 80} \approx \frac{10^6}{25\,000} = 40 \text{ Ом};$$

$$2) I = U/x_C = 240/40 = 6 \text{ А};$$

$$3) Q_C = UI = 240 \cdot 6 = 1440 \text{ вар};$$

$$4) W_{Cm} = CU^2 = 80 \cdot 10^{-6} \cdot 240^2 = 4,6 \text{ Дж}.$$

9-6

Цепь с активным сопротивлением и индуктивностью

а) **Напряжение, ток, сопротивление.** Если цепь, обладающая активным сопротивлением r и индуктивностью L (рис. 9-14), находится под переменным напряжением, то, как показано выше (§ 6-7), в любой момент времени это напряжение состоит из двух слагаемых:

$$u = ir + L di/dt = u_a + u_L. \quad (9-30)$$

Первое из них $u_a = ir$ называется активной составляющей, а второе $u_L = L di/dt = -e_L$ — индуктивной составляющей.

Необходимо отметить, что рассматриваемая цепь (L и r) в большинстве случаев представляет собой катушку какой-либо электрической машины, аппарата или прибора и что в катушке нет таких точек, между которыми действовало бы напряжение u_a или u_L . Физической величиной является напряжение на концах катушки, равное сумме составляющих $u_a + u_L$. Деление физической величины на составляющие представляет собой удобный вычислительный прием, вытекающий из (9-30). Из того же уравнения следует, что явления, происходящие в катушке, те же, что и в цепи, состоящей из последовательно соединенных сопротивления r и индуктивности L (рис. 9-15). Таким образом, последнюю можно считать последовательной эквивалентной схемой катушки.

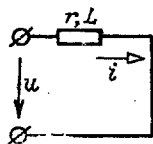


Рис. 9-14. Цепь с активным сопротивлением и индуктивностью.

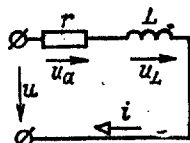


Рис. 9-15. Эквивалентная схема цепи с активным сопротивлением и индуктивностью.

Если в рассматриваемой цепи проходит синусоидальный ток

$$i = I_m \sin \omega t,$$

то активная составляющая напряжения

$$u_a = ir = I_m r \sin \omega t = U_{a.m} \sin \omega t,$$

а индуктивная составляющая

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d(I_m \sin \omega t)}{dt} = L \omega I_m \cos \omega t = U_{Lm} \sin (\omega t + \pi/2).$$

Обе составляющие напряжения изменяются синусоидально. Первая из них u_a совпадает по фазе с током, а вторая u_L опережает его на $\pi/2$, или на $1/4$ периода (рис. 9-16 и 9-17). Амплитудные значения этих составляющих $U_{a.m} = I_m r$ и $U_{Lm} = I_m \omega L$, а их действующие значения $U_a = I r$ и $U_L = I \omega L$.

Сумма слагаемых

$$\begin{aligned} u &= u_a + u_L = U_{a.m} \sin \omega t + \\ &+ U_{Lm} \sin (\omega t + \pi/2) = \\ &= U_m \sin (\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (9-31)$$

выражает мгновенное значение синусоидального напряжения на зажимах цепи, опережающего по фазе ток на угол φ (рис. 9-16 и 9-17).

Амплитуда этого напряжения (см. § 8-3)

$$U_m = \sqrt{U_{a.m}^2 + U_{Lm}^2},$$

а действующее значение

$$\begin{aligned} U &= U_m / \sqrt{2} = \sqrt{(U_{a.m} / \sqrt{2})^2 + (U_{Lm} / \sqrt{2})^2} = \\ &= \sqrt{U_a^2 + U_L^2}. \end{aligned} \quad (9-32)$$

Таким образом, напряжения U , U_a и U_L связаны между собой таким же соотношением, как и стороны прямоугольного треугольника напряжений (рис. 9-17), катеты которого изображают напряжения U_a и U_L , а гипотенуза — напряжение U на зажимах цепи.

Угол сдвига фаз между напряжением и током, отсчитываемый от вектора тока к вектору напряжения, можно определить из векторной диаграммы (рис. 9-17) по одной из формул

$$\cos \varphi = U_a/U \text{ или } \operatorname{tg} \varphi = U_L/U_a. \quad (9-33)$$

Сдвиг по фазе тока I относительно напряжения U вызывается э. д. с. самоиндукции e_L , которая отстает по фазе от тока на $1/4$ периода, а индуктивная составляющая напряжения u_L , равная ей по величине и противоположная по фазе, опережает ток на $1/4$ периода, или на $\pi/2$ (рис. 9-16 и 9-17). Чем больше индуктивная составляющая напряжения по сравнению с активной, тем больше угол отставания тока i от напряжения цепи u .

Выражая в (9-32) составляющие напряжения через произведения тока и сопротивлений, получаем:

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{U_a^2 + U_L^2} = \sqrt{(Ir)^2 + (I\omega L)^2} = \\ &= I \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} = Iz, \end{aligned} \quad (9-34)$$

откуда ток в цепи

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} = \frac{U}{z}. \quad (9-35)$$

Полученная формула выражает закон Ома для действующих значений цепи с активным сопротивлением и индуктивностью.

Величина

$$z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} \quad (9-36)$$

называется полным сопротивлением цепи и измеряется в омах.

Графически полное сопротивление z изображают гипотенузой прямоугольного треугольника сопротивлений (рис. 9-18), а сопротивления r и $\omega L = x_L$ — его катетами в соответствии с выражением (9-36). Треугольник сопротивлений можно получить, уменьшив в I раз стороны треугольника напряжений.

Угол между сторонами треугольника z и r равен углу φ между векторами напряжения U и тока I , так как

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= U_a/U = Ir/Iz = r/z; \\ \sin \varphi &= U_L/U = x_L/z; \\ \operatorname{tg} \varphi &= U_L/U_a = x_L/r. \end{aligned} \right\} \quad (9-37)$$

Мгновенное значение тока $i \neq u/z$; поэтому закон Ома не может применяться для мгновенных значений тока и напряжения.

В рассмотренном случае ток в цепи $i = I_m \sin \omega t$ имеет нулевую начальную фазу (рис. 9-16), а напряжение на зажимах цепи

$$u = I_m z \sin (\omega t + \varphi) = U_m \sin (\omega t + \varphi)$$

опережает по фазе ток на угол φ или, что то же, ток отстает от напряжения по фазе на угол φ .

Если напряжение на зажимах цепи выбрать с нулевой начальной фазой, т. е. принять, что $u = U_m \sin \omega t$, и,

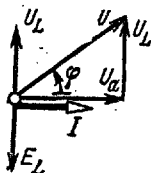


Рис. 9-17. Векторная диаграмма цепи с активным сопротивлением и индуктивностью.

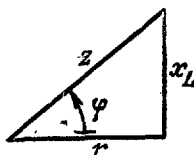


Рис. 9-18. Треугольник сопротивления цепи с активным сопротивлением и индуктивностью.

следовательно, начало отсчета времени — совпадающим с началом периода напряжения (O_1 на рис. 9-16), то ток в цепи

$$i = \frac{U_m}{z} \sin (\omega t - \varphi) = I_m \sin (\omega t - \varphi),$$

т. е. ток по-прежнему отстает по фазе от напряжения на угол φ , или, что то же, напряжение опережает ток на тот же угол φ .

Пример 9-5. Катушка с индуктивностью 51 мГ и активным сопротивлением 12 Ом включена в сеть с напряжением 240 В и частотой 50 Гц. Определить: 1) x_L ; 2) z ; 3) I ; 4) U_a ; 5) U_L ; 6) $\cos \varphi$.

Решение.

1) $x_L = \omega L = 2\pi f L = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,051 = 16 \text{ Ом};$

2) $z = \sqrt{r^2 + x_L^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ Ом};$

3) $I = U/z = 240/20 = 12 \text{ А};$

4) $U_a = I r = 12 \cdot 12 = 144 \text{ В};$

5) $U_L = I x_L = 12 \cdot 16 = 192 \text{ В};$

6) $\cos \varphi = r/z = 12/20 = 0,6.$

б) **Мощность цепи.** В цепи с активным сопротивлением и индуктивностью мгновенная мощность

$$p = ui = U_m \sin(\omega t + \varphi) I_m \sin \omega t = \\ = \frac{U_m I_m}{2} \cos - \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \varphi) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi). \quad (9-38)$$

Зависимость мгновенной мощности p от времени построена на рис. 9-19. Из написанного следует, что мгновенная мощность цепи с r и L состоит из двух слагаемых: постоянной мощности $UI \cos \varphi$ и переменной $UI \cos(2\omega t + \varphi)$, изменяющейся по простому гармоническому закону с двойной частотой.

Среднее за период значение переменной слагающей мощности, как гармонической функции, равно нулю. Поэтому средняя за период или активная мощность цепи равна постоянной слагающей мгновенной мощности

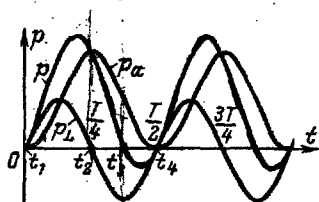


Рис. 9-19. Мощность цепи с активным сопротивлением и индуктивностью.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi)] dt = \\ = UI \cos \varphi. \quad (9-39)$$

Итак, средняя мощность цепи равна произведению действующих значений напряжения, тока и $\cos \varphi$.

Множитель $\cos \varphi$ называется коэффициентом мощности, так как при неизменных значениях напряжения и тока в цепи мощность ее изменяется в зависимости от $\cos \varphi$ от нуля при $\varphi = \pi/2$ до наибольшего значения $P = UI$ при $\varphi = 0$.

Мгновенную мощность цепи с активным сопротивлением и индуктивностью можно представить еще и в виде суммы мощностей в активном и индуктивном сопротивлениях:

$$p = ui = u_a i + u_L i = p_a + p_L. \quad (9-40)$$

Мгновенная мощность в активном сопротивлении [см. также (9-7) и (9-8)]

$$p_a = i^2 r = u_a i = U_{a.m} \sin \omega t I_m \sin \omega t = \\ = 2U_a I \sin^2 \omega t = U_a I - U_a I \cos 2\omega t. \quad (9-41)$$

Она, как показано в § 9-26, характеризует скорость необратимого процесса преобразования электрической энергии в какой-либо другой вид энергии, например в тепловую, и в течение каждого полупериода изменяется от нуля до максимума ($P_{a.m} = 2U_a I = 2I^2 r$) и снова до нуля (рис. 9-19).

Мгновенная мощность в активном сопротивлении (9-41) состоит из постоянной $U_a I$ и переменной $U_a I \cos 2\omega t$ составляющих. Постоянная составляющая выражает среднюю за период мощность в активном сопротивлении или активную мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_a dt = U_a I = I^2 r. \quad (9-42)$$

Так как $U_a = U \cos \varphi$, то средняя мощность в активном сопротивлении $P = UI \cos \varphi$ в то же время представляет собой активную мощность всей цепи с параметрами r и L , что следует из выражения (9-39).

Мгновенная мощность в индуктивном сопротивлении

$$p_L = u_L i = U_{Lm} \sin(\omega t + \pi/2) I_m \sin \omega t = U_L I \sin 2\omega t. \quad (9-43)$$

Она изменяется с двойной частотой, 2 раза в течение периода достигая положительного максимума $U_L I = I^2 \omega L$ и 2 раза такого же по величине отрицательного максимума (рис. 9-19). В течение первой и третьей четвертей периода она положительна, так как в магнитном поле катушки запасается энергия, причем $W_{Lm} = LI_m^2/2$. В течение второй и четвертой четвертей периода мгновенная мощность отрицательна, так как катушка отдает энергию, накопленную за предыдущую четверть периода.

Реактивная мощность цепи является мерой обменной энергии между генератором и цепью

$$Q_L = U_L I = UI \sin \varphi = I^2 \omega L. \quad (9-44)$$

В интервале от $t_1 = 0$ до $t_2 = T/4$, когда $i > 0$, $u > 0$, $u_a > 0$, $u_L > 0$ (рис. 9-16) мгновенная мощность цепи p и ее составляющие p_a и p_L положительны (рис. 9-19); следовательно, энергия, получаемая цепью от генератора, частично преобразуется в тепловую и частично запасается в магнитном поле. В течение времени от $t_2 = T/4$ до t_3 , когда $i > 0$, $u > 0$, $u_a > 0$, но $u_L < 0$, мощности p и p_a положительны, а p_L отрицательна, при этом $p_a > p$, таким образом, тепловая энергия частично получается от генератора, а частично из магнитного поля. В промежутке времени

от t_3 до $t_4 = T/2$, когда $i > 0$, $u < 0$, и $u_L < 0$, мощности p и p_L отрицательны, причем p_L по абсолютной величине больше p_a . Это означает, что энергия магнитного поля частично превращается в тепловую, частично возвращается генератору. В следующую половину периода процессы повторяются при обратном направлении тока.

Размеры, масса и стоимость электрических генераторов, трансформаторов и других электрических устройств определяются произведением номинальных действующих значений напряжения и тока, т. е. значений, на которые они рассчитаны. Произведение действующих значений напряжения и тока называется **полной мощностью**

$$S = UI. \quad (9-45)$$

Активная, реактивная и полная мощности графически изображаются сторонами прямоугольного треугольника мощностей (рис. 9-20), так как эти мощности связаны соотношением

$$P^2 + Q_L^2 = S^2 \text{ или } (UI \cos \varphi)^2 + (UI \sin \varphi)^2 = (UI)^2. \quad (9-46)$$

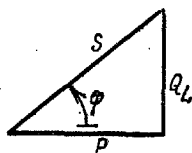


Рис. 9-20. Треугольник мощностей цепи с активным сопротивлением и индуктивностью.

Треугольник мощностей можно получить из треугольника напряжений, умножив на величину силы тока все его стороны. Из треугольника мощностей можно определить коэффициент мощности

$$\cos \varphi = P/S. \quad (9-47)$$

Единица полной мощности называется **вольт-ампер (В·А)**; более крупная единица 1 киловольт-ампер (кВ·А) = = 10^3 В·А. Применение различных названий единиц мощности: активной (ватт), реактивной (вар) и полной (вольт-ампер) — позволяет по единице измерения определить, какая рассматривается мощность: активная, реактивная или полная.

Пример 9-6. Напряжение сети $U = 380$ В, сила тока $I = 10$ А, коэффициент мощности $\cos \varphi = 0,8$. Определить среднюю мощность.

Решение. Средняя мощность

$$P = UI \cos \varphi = 380 \cdot 10 \cdot 0,8 = 3040 \text{ Вт} = 3,04 \text{ кВт}.$$

Пример 9-7. Напряжение сети $U = 222$ В, сила тока $I = 5$ А, коэффициент мощности $\cos \varphi = 0,9$. Определить энергию, израсходованную в сети за время $t = 2$ ч.

Решение. Средняя мощность

$$P = UI \cos \varphi = 222 \cdot 5 \cdot 0,9 = 1000 \text{ Вт} = 1 \text{ кВт.}$$

Израсходованная энергия

$$W = Pt = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кВт} \cdot \text{ч.}$$

Пример 9-8. Катушка с индуктивностью $L = 51 \text{ мГ}$ и активным сопротивлением $r = 12 \text{ Ом}$ включена в сеть с напряжением $U = 250 \text{ В}$ и частотой $f = 50 \text{ Гц}$.

Определить: 1) реактивное сопротивление катушки; 2) полное сопротивление катушки; 3) силу тока в катушке; 4) активную мощность катушки; 5) реактивную мощность катушки; 6) энергию, запасенную в магнитном поле катушки.

Решение.

$$1) x_L = \omega L = 2\pi fL = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,051 = 16 \text{ Ом};$$

$$2) z = \sqrt{r^2 + x_L^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ Ом};$$

$$3) I = U/z = 250/20 = 12,5 \text{ А};$$

$$4) P = U_a I = I^2 r = 12,5^2 \cdot 12 = 1875 \text{ Вт};$$

$$5) \text{ по (9-37) } \sin \varphi = x_L/z = 16/20 = 0,8 \text{ и}$$

$$Q_L = UI \sin \varphi = 250 \cdot 12,5 \cdot 0,8 = 2500 \text{ вар};$$

$$6) W_{Lm} = LI^2 = 0,051 \cdot 12,5^2 = 7,97 \text{ Дж.}$$

Пример 9-9. Для катушки примера 9-5 определить:

1) амплитудное значение мощности в активном сопротивлении $P_{a.m.}$;

2) активную мощность P ;

3) реактивную мощность Q_L ; 4) полную мощность S .

Решение.

$$1) P_{a.m.} = 2U_a I = 2 \cdot 144 \cdot 12 = 3456 \text{ Вт};$$

$$2) P = UI \cos \varphi = 240 \cdot 12 \cdot 0,6 = 1758 \text{ Вт};$$

$$3) \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - (0,6)^2} = 0,8 \text{ и } Q_L = UI \sin \varphi = 240 \times 12 \cdot 0,8 = 2304 \text{ вар};$$

$$4) S = UI = 240 \cdot 12 = 2880 \text{ В} \cdot \text{А.}$$

9-7

Цепь с активным сопротивлением и емкостью

а) **Напряжение, ток, сопротивление.** Если в цепи с активным сопротивлением r и емкостью C (рис. 9-21) проходит синусоидальный ток $i = I_m \sin \omega t$, то напряжение на активном сопротивлении

$$u_a = ir = I_m r \sin \omega t = U_{a.m.} \sin \omega t,$$

а напряжение на емкости

$$u_c = I_m x_C \sin (\omega t - \pi/2) = U_{c.m.} \sin (\omega t - \pi/2).$$

Оба напряжения изменяются синусоидально. Первое из них совпадает по фазе с током, а второе отстает от него на $\pi/2$, или на $1/4$ периода (рис. 9-22, а, б и 9-23). Ампли-

тудные значения этих напряжений $U_{a.m} = I_m r$ и $U_{C.m} = I_m \cdot 1/\omega C = I_m x_C$, а действующие значения $U_a = I r$ и $U_C = I \cdot 1/\omega C = I x_C$.

Сумма напряжений

$$u = u_a + u_C = U_{a.m} \sin \omega t + U_{C.m} \sin (\omega t - \pi/2) = U_m \sin (\omega t - \varphi) \quad (9-48)$$

выражает мгновенное значение напряжения на зажимах цепи. Оно отстает по фазе от тока на угол φ , или, что то же, ток опережает напряжение на угол φ (рис. 9-22, а и 9-23). Амплитуда этого напряжения

$$U_m = \sqrt{U_{a.m}^2 + U_{C.m}^2},$$

а действующее значение

$$\begin{aligned} U &= U_m / \sqrt{2} = \\ &= \sqrt{(U_{a.m} / \sqrt{2})^2 + (U_{C.m} / \sqrt{2})^2} = \\ &= \sqrt{U_a^2 + U_C^2}. \end{aligned} \quad (9-49)$$

Если напряжение на зажимах цепи выбрать с нулевой начальной фазой $u = U_m \sin \omega t$, то ток в цепи $i = I_m \sin (\omega t + \varphi)$, т. е., естественно, опережает по фазе напряжение на тот же угол φ .

Подставив в (9-49) вместо U_a и U_C их выражения через токи и сопротивления, найдем, что

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_C^2} = \sqrt{(I r)^2 + (I x_C)^2} = I \sqrt{r^2 + x_C^2} = I z,$$

откуда получим закон Ома для действующих значений цепи с r и C :

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x_C^2}} = \frac{U}{z}. \quad (9-50)$$

Величина

$$z = \sqrt{r^2 + x_C^2} = \sqrt{r^2 + (1/\omega C)^2} \quad (9-51)$$

называется полным сопротивлением цепи и измеряется в омах.

Сопротивления r , x_C , z графически изображают сторонами прямоугольного треугольника сопротивлений, катетами которого являются сопротивления r и x_C , а гипотенузой — полное сопротивление z (рис. 9-24). Треугольник сопротивлений можно получить из треугольника напряжений (рис. 9-23), уменьшив все стороны его в I раз.

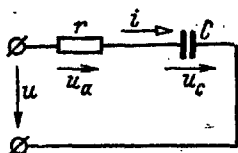


Рис. 9-21. Цепь с активным сопротивлением и емкостью.

Из треугольника напряжений и из треугольника сопротивлений можно определить угол сдвига по фазе между напряжением и током цепи, так как

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= U_a/U = Ir/Iz = r/z; \\ \sin \varphi &= U_c/U = x_c/z; \\ \operatorname{tg} \varphi &= U_c/U_a = x_c/r. \end{aligned} \right\} \quad (9-52)$$

Следует обратить внимание на то, что вектор напряжения на емкости повернут относительно вектора активного напряжения на 90° в обратную сторону вращения векторов, а вектор напряжения на индуктивности на 90° в направлении их вращения (рис. 9-23 и 9-17). Соответственно в треугольниках сопротивлений (рис. 9-24 и 9-18) сопротивление емкости повернуто относительно активного сопротивления на 90° в сторону, обратную направлению вращения векторов, а сопротивление индуктивности — на 90° в сторону их вращения.

б) **Мощность цепи.** В цепи с активным сопротивлением и емкостью мгновенная мощность

$$\begin{aligned} p &= ui = \\ &= U_m \sin(\omega t - \varphi) I_m \sin \omega t = \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi). \end{aligned} \quad (9-53)$$

Зависимость мгновенной мощности от времени построена на рис. 9-22, в.

Рис. 9-22. Ток, напряжение (а, б) и мощность (в) цепи с активным сопротивлением и емкостью.

Мощность цепи с r и C можно представить еще и в виде суммы мощностей в активном сопротивлении и в емкости

$$p = ui = u_a i + u_c i = p_a + p_c. \quad (9-54)$$

Мгновенная мощность в активном сопротивлении $p_a = u_a i = 2U_a I \sin^2 \omega t$ и мгновенная мощность в емкости $p_c = u_c i = -U_c I \sin 2\omega t$ уже рассмотрены выше, первая из них в § 9-26 и 9-66, а вторая — в § 9-56.

Средняя за период или активная мощность цепи с r и C

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt = UI \cos \varphi.$$

Реактивная мощность рассматриваемой цепи, характеризующая величину обменной энергии между генератором и электрическим полем цепи,

$$Q_C = \omega C U_C^2 = U_C I \sin \varphi.$$

Наконец, полная мощность цепи

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Мощности P , Q_C и S образуют стороны треугольника мощностей (рис. 9-25).

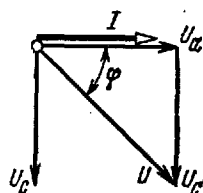


Рис. 9-23. Векторная диаграмма цепи с активным сопротивлением и емкостью.

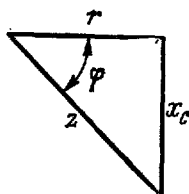


Рис. 9-24. Треугольник сопротивлений цепи с активным сопротивлением и емкостью.

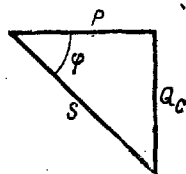


Рис. 9-25. Треугольник мощностей цепи с активным сопротивлением и емкостью.

Пример 9-10. Цепь, состоящая из конденсатора емкостью $C = 80$ мкФ и реостата с сопротивлением $r = 30$ Ом, находится под напряжением $U = 120$ В с частотой $f = 50$ Гц.

Определить следующие величины: 1) x_C ; 2) z ; 3) I ; 4) U_a ; 5) U_C ; 6) φ ; 7) P ; 8) Q_C ; 9) S .

Решение.

$$1) x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{10^6}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 80} = 40 \text{ Ом};$$

$$2) z = \sqrt{r^2 + x_C^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ Ом};$$

$$3) I = U/z = 120/50 = 2,4 \text{ А};$$

$$4) U_a = Ir = 2,4 \cdot 30 = 72 \text{ В};$$

$$5) U_C = Ix_C = 2,4 \cdot 40 = 96 \text{ В};$$

$$6) \cos \varphi = r/z = 30/50 = 0,6;$$

$$\sin \varphi = x_C/z = 40/50 = 0,8.$$

По тригонометрическим таблицам находим $\varphi = 53^\circ 10'$;

$$7) P = UI \cos \varphi = 120 \cdot 2,4 \cdot 0,6 = 172,8 \text{ Вт};$$

$$8) Q_C = UI \sin \varphi = 120 \cdot 2,4 \cdot 0,8 = 230,4 \text{ вар};$$

$$9) S = UI = 120 \cdot 2,4 = 288 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Цепь с активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью

а) Напряжение, ток, сопротивление. Если в цепи с активным сопротивлением r , индуктивностью L и емкостью C (рис. 9-26) проходит синусоидальный ток $i = I_m \sin \omega t$, то напряжение на активном сопротивлении $u_a = U_{a.m} \sin \omega t$, напряжение на индуктивности

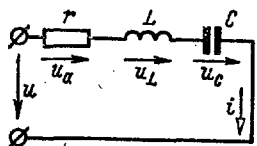


Рис. 9-26. Цепь с активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью.

$$u_L = U_{L.m} \sin(\omega t + \pi/2),$$

а напряжение на емкости

$$u_C = U_{C.m} \sin(\omega t - \pi/2).$$

Амплитуды этих напряжений

$$\begin{aligned} U_{a.m} &= I_m r; \\ U_{L.m} &= I_m \omega L = I_m x_L; \\ U_{C.m} &= I_m \cdot 1/\omega C = I_m x_C \end{aligned}$$

и их действующие значения

$$\begin{aligned} U_a &= I r; \\ U_L &= I \omega L = I x_L \\ \text{и } U_C &= I \cdot 1/\omega C = I x_C. \end{aligned}$$

Первое из этих напряжений совпадает по фазе с током, второе опережает по фазе ток на $1/4$ периода, а третье отстает по фазе от тока на $1/4$ периода.

На рис. 9-27, а и б построены зависимости тока и напряжений от времени, а на рис. 9-28 дана векторная диаграмма цепи.

Мгновенное значение напряжения на зажимах рассматриваемой неразветвленной цепи равно сумме трех составляющих, активной, индуктивной и емкостной:

$$u = u_a + u_L + u_C = U_{a.m} \sin \omega t + U_{L.m} \sin(\omega t + \pi/2) + U_{C.m} \sin(\omega t - \pi/2).$$

Напряжение на емкости изменяется в противофазе с напряжением на индуктивности и их алгебраическая сумма называется реактивной составляющей напряжения:

$$\begin{aligned} u_p &= u_L + u_C = U_{L.m} \sin(\omega t + \pi/2) + U_{C.m} \sin(\omega t - \pi/2) = \\ &= |U_{L.m} - U_{C.m}| \sin(\omega t \pm \pi/2) = U_{p.m} \sin(\omega t \pm \pi/2). \end{aligned}$$

Разность амплитудных значений напряжений $U_{Lм}$ и $U_{Cм}$ равна по величине амплитуде реактивной составляющей напряжения $U_{p.м}$. Реактивная составляющая напряжения опережает по фазе активную на угол $\pi/2$, когда $U_{Lм} > U_{Cм}$, или отстает на угол $\pi/2$ при $U_{Lм} < U_{Cм}$.

Напряжение на зажимах цепи равно сумме активной и реактивной составляющих:

$$\begin{aligned} u &= u_a + u_p = U_{a.м} \sin \omega t + \\ &+ U_{p.м} \sin (\omega t \pm \pi/2) = \\ &= U_m \sin (\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Амплитуда этого напряжения

$$\begin{aligned} U_m &= \sqrt{U_{a.м}^2 + (U_{Lм} - U_{Cм})^2} = \\ &= \sqrt{U_{a.м}^2 + U_{p.м}^2}; \end{aligned}$$

действующее значение

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{U_a^2 + (U_L - U_C)^2} = \\ &= \sqrt{U_a^2 + U_p^2}. \quad (9-55) \end{aligned}$$

График напряжения u для случая $U_L > U_C$ или, что то же, $x_L > x_C$, показан на рис. 9-27, а, вектор U — на рис. 9-28 для этого же случая, когда реактивное напряжение опережает по фазе ток на угол $\pi/2$; если $U_L < U_C$ или $x_L < x_C$, то реактивное напряжение отстает по фазе от тока на угол $\pi/2$ (рис. 9-30). В дальнейшем реактивную составляющую U_p будем считать алгебраической величиной и $U_p = U_L - U_C$, так что $U_p > 0$ при $U_L > U_C$ и $U_p < 0$ при $U_L < U_C$.

Заменим в (9-55) напряжения U_L и U_C их выражениями

$$U = \sqrt{(Ir)^2 + (Ix_L - Ix_C)^2} = I \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} = Iz, \quad (9-56)$$

где полное сопротивление цепи

$$z = \frac{U}{I} = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{r^2 + x^2}. \quad (9-57)$$

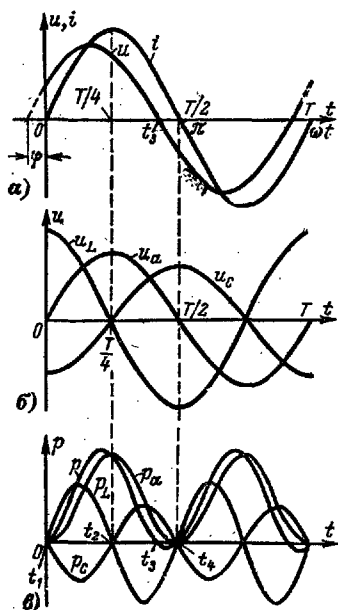


Рис. 9-27. Ток, напряжение (а, б) и мощность (в) цепи с активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью.

Полное сопротивление z графически изображается гипотенузой прямоугольного треугольника сопротивлений (рис. 9-29), одним катетом которого является активное сопротивление r , а другим модуль реактивного сопротивления цепи $x = x_L - x_C$. При небольшой разнице по величине между индуктивным и емкостным сопротивлениями каждое из них может быть значительно больше полного сопротивления цепи. Для цепи, в которой $x_L > x_C$, реактивное сопротивление положительно, для цепи, у которой $x_L < x_C$, реактивное сопротивление отрицательно. Таким

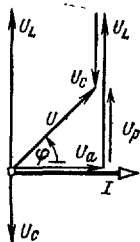


Рис. 9-28. Векторная диаграмма цепи с активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью при $x_L > x_C$.

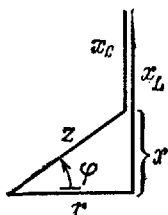


Рис. 9-29. Треугольник сопротивлений цепи с активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью при $x_L > x_C$.

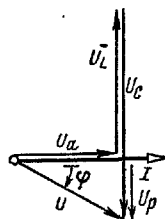


Рис. 9-30. Векторная диаграмма цепи с активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью при $x_L < x_C$.

образом, реактивное сопротивление — алгебраическая величина. Треугольник сопротивлений можно получить, уменьшив в I раз стороны треугольника напряжений.

б) Угол сдвига фаз. Угол сдвига фаз между напряжением и током равен углу между сторонами z и r треугольника сопротивлений и определяется через тангенс

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_p}{U_a} = \frac{U_L - U_C}{U_a} = \frac{x_L - x_C}{r} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{r} = \frac{x}{r}, \quad (9-58)$$

а также через косинус и синус:

$$\cos \varphi = r/z \text{ и } \sin \varphi = x/z. \quad (9-58a)$$

При $x_L > x_C$ или при $U_L > U_C$ (рис. 9-28 и 9-29) угол φ положителен; это значит, что напряжение на зажимах цепи опережает по фазе ток в цепи на угол φ или ток отстает по фазе на угол φ от напряжения на зажимах цепи (индуктивный режим цепи). При $x_L = x_C$ или при $U_L = U_C$ угол φ равен нулю, напряжение и ток в цепи совпадают по фазе;

в цепи имеет место резонанс напряжений (см. § 9-10). Наконец, если $x_L < x_C$ или $U_L < U_C$ (рис. 9-30 и 9-31), угол φ отрицателен, напряжение отстает по фазе на угол φ или ток опережает по фазе на угол φ напряжение цепи (емкостный режим цепи).

Будем далее всегда считать угол сдвига φ , представляющий собой разность начальных фаз напряжения и тока, алгебраической величиной и всегда откладывать на векторных диаграммах от вектора тока к вектору напряжения. Принимая при расчете всех неразветвленных цепей начальную фазу тока равной нулю или $i = I_m \sin \omega t$, получим для напряжения $u = U_m \sin (\omega t + \varphi)$.

В частности, для цепи с r и L ($x = x_L$, $x_C = 0$) или для цепи с r , L и C при положительном реактивном сопротивлении ($x_L > x_C$ и $x > 0$) угол сдвига фаз $\varphi > 0$, так как по (9-58) $\operatorname{tg} \varphi = x/r > 0$. Вектор напряжения на зажимах цепи U повернут относительно вектора тока I в положительную сторону, т. е. в сторону, противоположную направлению вращения стрелки часов (рис. 9-17 и 9-28). Для цепи с r и C ($x_L = 0$, $x = -x_C$) или для цепи r , L и C при отрицательном реактивном сопротивлении ($x_C > x_L$ и $x < 0$) угол сдвига фаз $\varphi < 0$, так как по (9-58) $\operatorname{tg} \varphi = x/r < 0$. Вектор напряжения на зажимах цепи U повернут относительно вектора тока I в сторону движения стрелки часов (рис. 9-23 и 9-30).

Во всех случаях из треугольника напряжений

$$U_a = U \cos \varphi; \quad U_p = U \sin \varphi. \quad (9-59)$$

в) **Сопоставление напряжений.** Напряжения на индуктивности и на емкости изменяются в противофазе и частично или полностью компенсируют друг друга. Следовательно, напряжение на зажимах цепи определяется величинами активного U_a и реактивного $U_p = U_L - U_C$ напряжений. При небольшой разнице в величинах индуктивного и емкостного напряжений каждое из них может быть больше напряжения всей цепи. Например, при $U_L = 6,2$ кВ, $U_C = 7$ кВ, $U_a = 0,6$ кВ получим $U = 1$ кВ.

Напряжения на отдельных участках, значительно превышающие приложенное к цепи напряжение, могут пред-

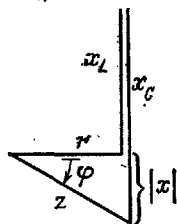


Рис. 9-31. Треугольник сопротивлений цепи с активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью при $x_L < x_C$.

ставлять опасность для изоляции установки и обслуживающего персонала и поэтому в цепях электроустановок недопустимы.

Рассмотрим в качестве примера трансформатор, соединенный с генератором двумя двухжильными кабелями l_1 и l_2 (рис. 9-32), между которыми поставлены плавкие предохранители. При перегорании одного из предохранителей (на рис. 9-32 — нижнего) трансформатор подключается к генератору через две емкости C , образованные жилами кабелей и землей. В полученной цепи напряжение U_C между разведенными жилами кабеля, а также напряжение на трансформаторе U_L могут быть больше напряжения генератора U (например, на рис. 9-30).

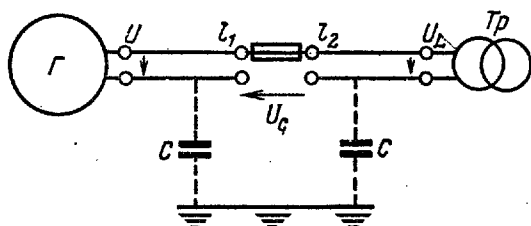


Рис. 9-32. Включение трансформатора последовательно с емкостью при перегорании предохранителя.

г) **Мощность цепи.** Мгновенная мощность цепи с активным сопротивлением r , индуктивностью L и емкостью C может быть представлена тремя составляющими:

$$p = p_a + p_L + p_C = u_a i + u_L i + u_C i. \quad (9-60)$$

Выбирая опять нулевую начальную фазу u тока, т. е. принимая $i = I_m \sin \omega t$ (рис. 9-27, а), получаем, как и раньше,

$$u_a = U_{a.m} \sin \omega t; \quad u_L = U_{L.m} \sin (\omega t + \pi/2) \quad \text{и} \\ u_C = U_{C.m} \sin (\omega t - \pi/2).$$

После подстановки напряжений и тока в (9-60) найдем мгновенную мощность цепи

$$p = 2U_a I \sin^2 \omega t + U_L I \sin 2\omega t - U_C I \sin 2\omega t.$$

Зависимости мгновенной мощности и ее составляющих от времени при $x_L > x_C$ показаны на рис. 9-27, в.

Составляющие p_L и p_C мгновенной мощности изменяются с двойной частотой и в каждый момент времени имеют про-

тивоположные знаки. В течение первой четверти периода мощность p_L положительна ($i > 0$, $u_L > 0$), и в соответствии с ростом тока происходит накопление энергии в магнитном поле от нуля при $t_1 = 0$ до величины $W_{L_m} = LI_m^2/2$ при $t_2 = T/4$. Это увеличение энергии магнитного поля происходит: 1) за счет энергии электрического поля, запас которой уменьшается от $W_{C_m} = CU_{C_m}^2/2$ при $t_1 = 0$, когда напряжение на емкости наибольшее, до нуля при $t_2 = T/4$, когда напряжение на зажимах емкости уменьшается до нуля; 2) за счет энергии генератора, восполняющего разность $W_{L_m} - W_{C_m}$, так как в рассматриваемом случае $x_C < x_L$ и $W_{C_m} < W_{L_m}$. В течение той же четверти периода

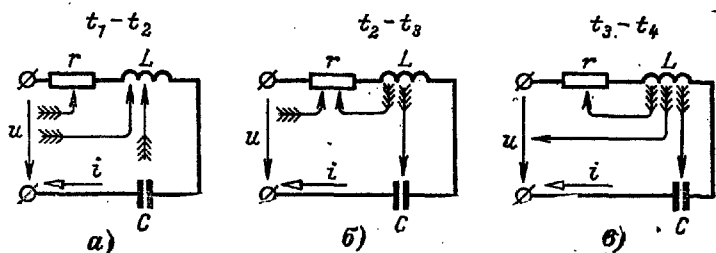


Рис. 9-33. Схемы движения энергии.

избыток электрической энергии, получаемой от генератора, преобразуется в тепло в активном сопротивлении ($p_a = u_a i = i^2 r$). Схема движения потоков энергии в течение первой четверти периода (интервал времени $t_1 - t_2$ на рис. 9-27, в) показана на рис. 9-33, а стрелками с хвостовым оперением.

В течение второй четверти периода от момента $t_2 = T/4$ до $t_4 = T/2$ мощность p_C положительна (рис. 9-27, в). Вследствие увеличения напряжения на зажимах емкости (рис. 9-27, б) происходит накопление энергии в электрическом поле от нуля до W_{C_m} при $t_4 = T/2$, когда напряжение на емкости максимально. Это увеличение энергии происходит за счет энергии магнитного поля, которая уменьшается от W_{L_m} до нуля в соответствии с уменьшением тока от максимального значения до нуля (рис. 9-27, а). Так как в рассматриваемом случае $W_{L_m} > W_{C_m}$, то часть энергии магнитного поля преобразуется в тепловую в активном сопротивлении r . Другая часть энергии, преобразуемой в тепловую в сопротивлении r , получается в течение времени $t_2 - t_3$ от генератора, так как мгновенная мощность

цепи p положительна. Схема движения потоков энергии в течение этого промежутка времени показана на рис. 9-33, б. С момента t_3 напряжение u на зажимах цепи становится отрицательным, а ток i еще до момента $t_4 = T/2$ не изменяет направления (рис. 9-27, а). Поэтому в интервале времени $t_3 - t_4$ мгновенная мощность цепи отрицательна ($p < 0$) и энергия, получаемая за счет уменьшения энергии магнитного поля, поступает в емкость, преобразуется в тепло в активном сопротивлении и частично возвращается генератору. Схема движения потоков энергии в течение этого промежутка времени показана на рис. 9-33, в.

В следующую половину периода процесс преобразования энергии повторяется с той лишь разницей, что направление тока и полярность напряжения будут противоположными.

Если сопротивление цепи $x_L < x_C$, то $U_{Lм} < U_{Cм}$ и $W_{Cм} < W_{Lм}$. В этом случае процесс протекает аналогично, с той лишь разницей, что в течение первой (и третьей) четверти периода при уменьшении напряжения на емкости и увеличении тока в цепи энергия электрического поля частично возвращается генератору. В течение второй (и четвертой) четверти периода, когда напряжение на емкости растет, увеличение энергии электрического поля происходит за счет энергии магнитного поля и за счет энергии, получаемой от генератора.

Средняя или активная мощность цепи

$$P = UI \cos \varphi = U_a I \quad (9-61)$$

всегда положительная.

Реактивная мощность, характеризующая обмен энергией между цепью и генератором,

$$Q = UI \sin \varphi = U_p I = (U_L - U_C) I. \quad (9-62)$$

Реактивная мощность может быть положительной (индуктивный режим: $U_L > U_C$; $x_L > x_C$ и $\varphi > 0$) или отрицательной (емкостный режим: $U_L < U_C$; $x_L < x_C$ и $\varphi < 0$).

Полная мощность цепи

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (9-63)$$

Пример 9-11. Цепь с активным сопротивлением $r = 40$ Ом, индуктивностью $L = 350$ мГ и емкостью $C = 40$ мкФ включена на напряжение $U = 125$ В с частотой $f = 50$ Гц.

Определить: 1) x_L ; 2) x_C ; 3) z ; 4) I ; 5) U_a ; 6) U_L ; 7) U_C ; 8) $\tan \varphi$; 9) $\cos \varphi$; 10) $\sin \varphi$; 11) угол φ ; 12) P ; 13) Q ; 14) S ; 15) $W_{Lм}$; 16) $W_{Cм}$.

Р е ш е н и е.

$$1) x_L = \omega L = 2\pi fL = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,350 = 110 \text{ Ом};$$

$$2) x_C = 1/\omega C = 1/2\pi fC = 10^6/(2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 40) = 80 \text{ Ом};$$

$$3) z = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{40^2 + (110 - 80)^2} = 50 \text{ Ом};$$

$$4) I = U/z = 125/50 = 2,5 \text{ А};$$

$$5) U_a = Ir = 2,5 \cdot 40 = 100 \text{ В};$$

$$6) U_L = Ix_L = 2,5 \cdot 110 = 275 \text{ В};$$

$$7) U_C = Ix_C = 2,5 \cdot 80 = 200 \text{ В};$$

$$8) \operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x_L - x_C}{r} = \frac{110 - 80}{40} = 0,75;$$

$$9) \cos \varphi = r/z = 40/50 = 0,8;$$

$$10) \sin \varphi = x/z = (110 - 80)/50 = 0,6;$$

$$11) \text{ по тригонометрическим таблицам находим } \varphi = 36^\circ 50';$$

$$12) P = UI \cos \varphi = 125 \cdot 2,5 \cdot 0,8 = 250 \text{ Вт};$$

$$13) Q = UI \sin \varphi = 125 \cdot 2,5 \cdot 0,6 = 187,5 \text{ вар};$$

$$14) S = UI = 125 \cdot 2,5 = 312,5 \text{ В} \cdot \text{А};$$

$$15) W_{Lm} = LI^2 = 0,350 \cdot 2,5^2 = 2,19 \text{ Дж};$$

$$16) W_{Cm} = CU_C^2 = 40 \cdot 10^{-6} \cdot 200^2 = 1,6 \text{ Дж}.$$

9-9

Общий случай неразветвленной цепи

Цепь (рис. 9-34) состоит из нескольких последовательно соединенных участков или элементов, обладающих активными и реактивными сопротивлениями. При прохождении

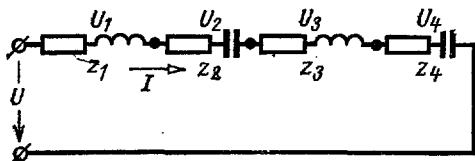


Рис. 9-34. Цепь с четырьмя последовательно соединенными участками или элементами.

по цепи тока I активная составляющая напряжения произвольного участка n

$$U_{an} = Ir_n,$$

реактивная составляющая напряжения участка

$$U_{pn} = Ix_n$$

рассматривается как алгебраическая величина, так как реактивное сопротивление x_n — алгебраическая величина.

На векторной диаграмме активные составляющие напряжения откладываются по направлению вектора тока,

а реактивные — под углом $\pm 90^\circ$ (в зависимости от знака x_n) к вектору тока. Векторная диаграмма цепи (рис. 9-34) показана на рис. 9-35, где векторы напряжений сложены в той же последовательности, в которой расположены участки цепи.

Напряжение на произвольном участке

$$U_n = \sqrt{U_{an}^2 + U_{pn}^2};$$

вектор его повернут относительно вектора тока на угол φ_n , определяемый через

$$\operatorname{tg} \varphi_n = x_n / r_n.$$

Сумма векторов всех напряжений равна вектору напряжения на зажимах цепи

$$\bar{U} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \bar{U}_3 + \dots$$

Действующее значение этого напряжения U определяется из прямоугольного треугольника (ABV на рис. 9-35). Одним катетом треугольника является активная составляющая напряжения цепи U_a (AB на рис. 9-35), равная арифметической сумме активных составляющих напряжений всех участков; другим катетом — реактивная составляющая напряжения цепи U_p (BV), которая равна алгебраической сумме реактивных составляющих всех участков цепи.

Таким образом, напряжение цепи

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = \sqrt{(\sum U_{an})^2 + (\sum U_{pn})^2}. \quad (9-64)$$

Заменив в (9-64) составляющие напряжений произведениями токов и сопротивлений, получим:

$$U = \sqrt{(Ir)^2 + (Ix)^2} = \sqrt{(\sum Ir_n)^2 + (\sum Ix_n)^2}$$

или

$$U = I \sqrt{r^2 + x^2} = I \sqrt{(\sum r_n)^2 + (\sum x_n)^2},$$

откуда полное сопротивление цепи

$$z = U/I = \sqrt{r^2 + x^2} = \sqrt{(\sum r_n)^2 + (\sum x_n)^2}. \quad (9-65)$$

Это сопротивление графически изображают (рис. 9-36) замыкающей стороной многоугольника сопротивлений

$$z = z_1 + z_2 + z_3 + \dots,$$

который можно получить из многоугольника напряжений (рис. 9-35), уменьшив каждую из его сторон в I раз.

Угол сдвига фаз φ между напряжением на зажимах цепи U и током I определяется через

$$\operatorname{tg} \varphi = x/r = \Sigma x_n / \Sigma r_n. \quad (9-66)$$

Если $x = \Sigma x_n > 0$, и, следовательно, угол $\varphi > 0$, то напряжение цепи опережает по фазе ток, что соответствует

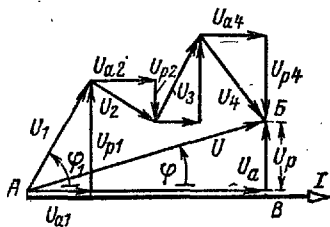


Рис. 9-35. Векторная диаграмма цепи, изображенной на рис. 9-34.

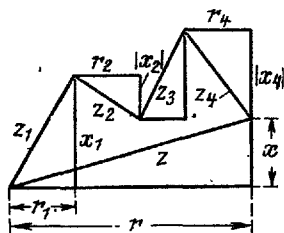


Рис. 9-36. Многоугольник сопротивлений цепи, изображенной на рис. 9-34.

индуктивному режиму работы цепи; если $x = \Sigma x_n < 0$, то $\varphi < 0$ и напряжение отстает по фазе от тока, следовательно, имеет место емкостный режим работы цепи.

Активная, реактивная и полная мощности цепи определяются по (9-61)—(9-63).

Пример 9-12. Четыре последовательно соединенных участка включены на напряжение $U = 217$ В с частотой $f = 50$ Гц.

Сопротивление участков: $r_1 = 3$ Ом; $x_{L1} = 11$ Ом; $r_2 = 4$ Ом; $x_{C2} = 3$ Ом; $r_3 = 5$ Ом; $x_{L3} = 7$ Ом; $r_4 = 6$ Ом; $x_{C4} = 7$ Ом.

Определить: 1) ток цепи; 2) угол сдвига фаз между напряжением и током; 3) активную, реактивную и полную мощности цепи; 4) напряжения на отдельных участках цепи; 5) углы сдвига фаз между напряжениями на участках и током цепи.

Решение. 1) $r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 3 + 4 + 5 + 6 = 18$ Ом;

$$x = x_{L1} - x_{C2} + x_{L3} - x_{C4} = 11 - 3 + 7 - 7 = 8 \text{ Ом};$$

$$z = \sqrt{r^2 + x^2} = \sqrt{18^2 + 8^2} = 19,7 \text{ Ом};$$

$$I = U/z = 217/19,7 = 11 \text{ А};$$

$$2) \operatorname{tg} \varphi = x/r = 8/18 = 0,445,$$

откуда $\varphi = 24^\circ$; $\cos \varphi = 0,913$; $\sin \varphi = 0,407$;

$$3) P = UI \cos \varphi = 217 \cdot 11 \cdot 0,913 = 2179 \text{ Вт};$$

$$Q = UI \sin \varphi = 217 \cdot 11 \cdot 0,407 = 971,5 \text{ вар};$$

$$S = UI = 217 \cdot 11 = 2387 \text{ В} \cdot \text{А};$$

$$4) z_1 = \sqrt{r_1^2 + x_{L1}^2} = \sqrt{3^2 + 11^2} = 11,4 \text{ Ом};$$

$$U_1 = I z_1 = 11 \cdot 11,4 = 125,4 \text{ В};$$

$$z_2 = \sqrt{r_2^2 + x_{C2}^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ Ом};$$

$$U_2 = I z_2 = 11 \cdot 5 = 55 \text{ В};$$

$$z_3 = \sqrt{r_3^2 + x_{L3}^2} = \sqrt{5^2 + 7^2} = 8,6 \text{ Ом};$$

$$U_3 = I z_3 = 11 \cdot 8,6 = 94,6 \text{ В};$$

$$z_4 = \sqrt{r_4^2 + x_{C4}^2} = \sqrt{6^2 + 7^2} = 9,22 \text{ Ом};$$

$$U_4 = I z_4 = 11 \cdot 9,22 = 101,4 \text{ В};$$

$$5) \operatorname{tg} \varphi_1 = x_1/r_1 = 11/3 = 3,66; \quad \varphi_1 = 74^\circ 40';$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = x_2/r_2 = -x_{C2}/r_2 = -3/4 = -0,75; \quad \varphi_2 = -36^\circ 50';$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = x_3/r_3 = 7/5 = 1,4; \quad \varphi_3 = 54^\circ 30';$$

$$\operatorname{tg} \varphi_4 = x_4/r_4 = -7/6 = -1,166; \quad \varphi_4 = -49^\circ 30'.$$

9-10

Резонанс в неразветвленной цепи (резонанс напряжений)

В неразветвленной цепи с катушкой и конденсатором, т. е. содержащей активное сопротивление r , индуктивность L и емкость C (рис. 9-26), которую называют еще последовательным контуром, при равенстве реактивных сопротивлений $x_L = x_C$ наступает резонанс напряжений.

Таким образом, при резонансе

$$\omega L = 1/\omega C \text{ или } \omega^2 LC = 1, \quad (9-67)$$

откуда угловая резонансная частота

$$\omega = 1/\sqrt{LC}, \quad (9-68)$$

а резонансная частота

$$f = \omega/2\pi = 1/(2\pi \sqrt{LC}). \quad (9-68a)$$

В гл. 7 было показано, что при замыкании заряженного конденсатора на индуктивную катушку с ничтожным активным сопротивлением возникает переменный ток с угловой частотой собственных колебаний $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Следовательно, резонанс в неразветвленной цепи имеет место при частоте тока ω , равной частоте собственных колебаний контура ω_0 .

Полное сопротивление цепи при резонансе напряжений

$$z = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} = r,$$

так как реактивное сопротивление $x = x_L - x_C = 0$. Таким образом, полное сопротивление цепи при резонансе равно ее активному сопротивлению, т. е. наименьшему из всех возможных при изменении частоты ω .

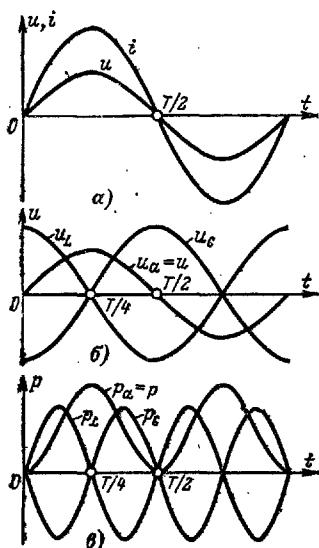


Рис. 9-37. Ток, напряжение (а, б) и мощность (в) при резонансе напряжений.

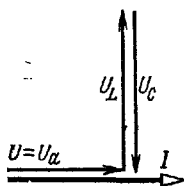


Рис. 9-38. Векторная диаграмма при резонансе напряжений.

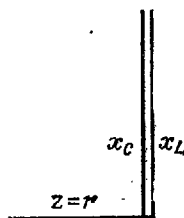


Рис. 9-39. Треугольник сопротивлений при $x_L = x_C$.

Наоборот, ток цепи при неизменном действующем значении напряжения источника U имеет наибольшее резонансное значение

$$I_p = U/r. \quad (9-69)$$

Так как реактивное сопротивление цепи равно нулю, то ток при резонансе совпадает по фазе с напряжением:

$$\operatorname{tg} \varphi = x/r = 0 \text{ и } \varphi = 0.$$

На рис. 9-37, а и б и 9-38 показаны мгновенные значения тока и напряжений и векторная диаграмма цепи при резонансе, а на рис. 9-39 дан вырождающийся в прямую треугольник сопротивлений.

При резонансе сопротивление каждого из реактивных участков цепи равно волновому сопротивлению цепи

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L = L/\sqrt{LC} = \sqrt{L/C} = z_v.$$

Напряжение на индуктивности $U_L = Ix_L$ и напряжение на емкости $U_C = Ix_C$, сдвинутые по фазе на 180° и равные при резонансе по величине, компенсируют друг друга; так что напряжение на зажимах цепи равно активному напряжению: $U = U_a$ (рис. 9-37, а и б и 9-38).

Отношение напряжения на любом из реактивных участков при резонансе к напряжению на зажимах цепи

$$\frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{I_p x_L}{(I_p r)} = \frac{I_p x_C}{(I_p r)} = \frac{x_L}{r} = \frac{x_C}{r} = \frac{z_n}{r} = Q. \quad (9-70)$$

Величина $Q = z_n/r$ называется добротностью контура (цепи). Если параметры цепи выбраны так, что $Q > 1$, то при резонансе напряжений U_L и U_C больше напряжения на зажимах цепи U (в Q раз).

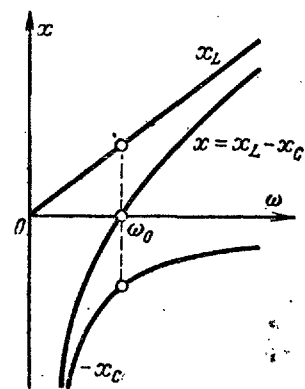


Рис. 9-40. Частотные характеристики.

Так как напряжения u_L и u_C равны по значению и изменяются в противофазе, то в любой момент времени равны по значению и противоположны по знаку мгновенные мощности $p_L = -p_C$. Поэтому накопление энергии магнитного поля происходит только за счет энергии электрического поля и наоборот, а вся энергия, получаемая цепью от генератора, преобразуется в тепло в активном сопротивлении, т. е. $p = p_a$ (рис. 9-37, в).

Подбор параметров цепи с целью получения в цепи резонанса называют настройкой цепи в резонанс.

При резонансе три величины ω , L и C связаны простым соотношением (9-67) $\omega^2 LC = 1$. Таким образом, настройку цепи в резонанс можно выполнить по-разному. Например, при неизменных ω и L — регулировкой емкости цепи C , при неизменных L и C — изменением частоты ω питающего напряжения, при неизменной ω — регулировкой L и C и т. д.

В неразветвленной цепи, состоящей из нескольких участков с параметрами L , C и r , резонанс напряжений возникает при выполнении условий $x = \sum x_L - \sum x_C = 0$.

На рис. 9-40 даны зависимости сопротивлений $x_L = \omega L$, $x_C = 1/\omega C$ и $x = x_L - x_C$ от частоты $\omega = 2\pi f$, называемые частотными характеристиками неразветвленной цепи.

Реактивное сопротивление индуктивности $x_L = \omega L$ увеличивается пропорционально частоте ω от 0 при $\omega = 0$ до ∞ при $\omega = \infty$. Реактивное сопротивление емкости $x_C = 1/\omega C$ изменяется обратно пропорционально частоте от ∞ до 0. Реактивное сопротивление цепи $x = x_L - x_C$ при изменении частоты ω от 0 до резонансной частоты $\omega = \omega_0$ и далее до $\omega = \infty$ изменяется от $x = -\infty$ до $x = 0$ и далее до $x = \infty$.

Если неразветвленная цепь с параметрами r , L и C находится под напряжением с неизменным действующим значением U и изменяющейся частотой ω , то будут изменяться все величины, определяющие режим цепи: I , U_a , U_L , U_C , φ , P , Q , S .

Кривые зависимости I , U_a , U_L , U_C и φ от частоты, называемые резонансными кривыми, показаны на рис. 9-41.

Ток $I = U/z = U/\sqrt{r^2 + x^2}$ при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ имеет нулевые значения, а при резонансной частоте $\omega = \omega_0$ максимален $I_p = U/r$ (рис. 9-41).

Напряжение на активном сопротивлении $U_a = Ir$ изменяется, естественно, пропорционально току; при резонансе оно имеет наибольшее значение, равное напряжению на зажимах цепи $U_{a, \text{наиб}} = U$.

Напряжение на емкости $U_C = Ix_C$ при $\omega = 0$ равно напряжению на зажимах цепи $U_C = U$, так как конденсатор не пропускает постоянного тока, т. е. $I = 0$, а следовательно, $U_L = Ix_L = 0$ и $U_a = Ir = 0$. При увеличении частоты напряжение на емкости растет до некоторой предельной величины $U_{C, \text{наиб}}$, а затем уменьшается до нуля, так как при $\omega = \infty$ получается $x_C = 0$ и $U_C = Ix_C = 0$.

Напряжение на индуктивности $U_L = Ix_L$ равно нулю при $\omega = 0$, так как $I = 0$ и $x_L = 0$. При увеличении частоты напряжение на индуктивности растет до некоторой предельной величины $U_{L, \text{наиб}}$, а затем уменьшается до напряжения на зажимах цепи $U_L = U$, так как при $\omega = \infty$, как показано выше, $U_a = Ir = 0$ и $U_C = Ix_C = 0$.

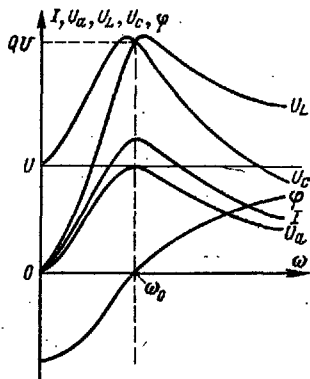


Рис. 9-41. Резонансные кривые при изменении частоты.

Напряжения на емкости и на индуктивности достигают своих предельных значений $U_{C \text{ наиб}} = U_{L \text{ наиб}} = \frac{QU}{\sqrt{1-1/4Q^2}}$ при разных частотах, не совпадающих с резонансной частотой, при которой $U_L = U_C = QU$ (рис. 9-41).

Угол сдвига фаз между напряжением и током цепи (рис. 9-41) изменяется от $-\pi/2$ при $\omega = 0$, так как в этом случае $\operatorname{tg} \varphi = (x_L - x_C)/r = (0 - \infty)/r = -\infty$, до 0 при резонансной частоте $\omega = \omega_0$ и затем до $+\pi/2$ при $\omega = \infty$, так как $\operatorname{tg} \varphi = (x_L - x_C)/r = (\infty - 0)/r = \infty$.

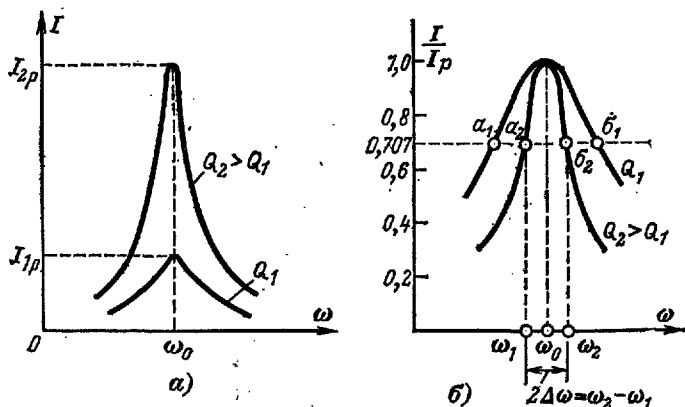


Рис. 9-42. Резонансные кривые тока при различной добротности контуров.

На рис. 9-42, а показаны резонансные кривые тока для последовательного контура при одинаковых U , L и C и двух значениях добротности: Q_1 и $Q_2 > Q_1$. На рис. 9-42, б даны те же зависимости, но по оси ординат отложено отношение тока к току при резонансе (I/I_p), т. е. выбран относительный масштаб для тока.

Из кривых видно, что интенсивные колебания тока в контуре возникают только в том случае, если частота напряжения питания ω близка к частоте собственных колебаний контура ω_0 . Говоря другими словами, контур пропускает колебания определенного диапазона частот. Это свойство характеризуют полосой пропускания контура или областью частот, в пределах которой ток в контуре не меньше $1/\sqrt{2} = 0,707$ резонансного значения ($I \geq 0,707 I_p$).

Проведя на рис. 9-42, б прямую, параллельную оси абсцисс, с ординатой 0,707 и опустив перпендикуляры из точек а, б пересечения этой прямой с резонансной кривой (на рисунке выполнено для контура с большей добротностью), получим на оси абсцисс граничные частоты ω_1 и ω_2 и ширину полосы пропускания контура

$$2\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1.$$

Из кривых рис. 9-42 следует, что чем больше значение добротности контура Q (чем меньше активное сопротивление контура), тем более узкой получается резонансная кривая и тем меньше полоса пропускания контура $2\Delta\omega$.

Резонансными кривыми называются также зависимости тех же величин от изменяющейся индуктивности L или емкости C при постоянной частоте ω .

Явление резонанса в электрических цепях широко применяется во всех областях электротехники и особенно в радиотехнике. Однако в некоторых случаях возникновение резонанса, не предусмотренное нормальным режимом работы, может привести к нежелательным и опасным последствиям; один из таких случаев был рассмотрен в § 9-8.

Пример 9-13. Определить резонансную частоту f_0 для цепи примера 9-11. Для режима резонанса определить величины

$$x_L, x_C; z; I_p; U_L; U_C; U_a; W_{L_m}; W_{C_m}.$$

Решение. Резонансная частота

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,35 \cdot 40 \cdot 10^{-6}}} = 42,5 \text{ Гц};$$

$$x_L = 2\pi f_0 L = 2 \cdot 3,14 \cdot 42,5 \cdot 0,35 = 93,6 \text{ Ом};$$

$$x_C = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{10^6}{2 \cdot 3,14 \cdot 42,5 \cdot 40} = 93,6 \text{ Ом};$$

$$z = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{40^2 + (93,6 - 93,6)^2} = 40 \text{ Ом};$$

$$I_p = U/r = 125/40 = 3,12 \text{ А};$$

$$U_L = I x_L = 3,12 \cdot 93,6 = 291 \text{ В};$$

$$U_C = I x_C = 3,12 \cdot 93,6 = 291 \text{ В};$$

$$U_a = I r = 3,12 \cdot 40 = 125 \text{ В};$$

$$W_{L_m} = I^2 L = 3,12^2 \cdot 0,35 = 3,4 \text{ Дж};$$

$$W_{C_m} = U_C^2 C = 291^2 \cdot 40 \cdot 10^{-6} = 3,4 \text{ Дж}.$$

Разветвленные цепи переменного тока

10-1

Простейший расчет цепи с двумя ветвями

Аналитический метод. Цепь, состоящая из двух параллельных ветвей (рис. 10-1) с активными сопротивлениями и индуктивностями, находится под синусоидальным напряжением $u = U_m \sin \omega t$. Рассчитаем режим цепи.

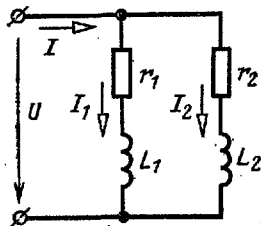


Рис. 10-1. Разветвленная цепь с активными и реактивными сопротивлениями.

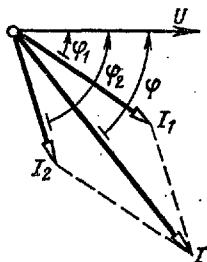


Рис. 10-2. Векторная диаграмма разветвленной цепи.

Ток в первой параллельной ветви

$$i_1 = \frac{U_m}{z_1} \sin(\omega t - \varphi_1) = I_{m1} \sin(\omega t - \varphi_1).$$

Ток во второй параллельной ветви

$$i_2 = \frac{U_m}{z_2} \sin(\omega t - \varphi_2) = I_{m2} \sin(\omega t - \varphi_2).$$

Действующие значения этих токов

$$I_1 = U/z_1 = Uy_1 \text{ и } I_2 = U/z_2 = Uy_2, \quad (10-1)$$

где $z_1 = \sqrt{r_1^2 + x_{L1}^2}$ и $z_2 = \sqrt{r_2^2 + x_{L2}^2}$ — полные сопротивления параллельных ветвей.

Величины

$$y_1 = 1/z_1 \text{ и } y_2 = 1/z_2, \quad (10-2)$$

обратные полным сопротивлениям, называются полными проводимостями ветвей.

Токи I_1 и I_2 отстают по фазе от напряжения цепи на углы φ_1 и φ_2 , тангенсы которых

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = x_{L1}/r_1 \text{ и } \operatorname{tg} \varphi_2 = x_{L2}/r_2.$$

Общий ток в неразветвленной части цепи

$$i = i_1 + i_2 = I_{m1} \sin(\omega t - \varphi_1) + I_{m2} \sin(\omega t - \varphi_2) = I_m \sin(\omega t - \varphi).$$

Его действующее значение I , равное геометрической сумме действующих значений токов I_1 и I_2 , найдем из векторной диаграммы (рис. 10-2):

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (10-3)$$

На рис. 10-2 показано, что углы сдвига фаз, как было принято ранее, отсчитывают от векторов тока к вектору напряжения, и для цепи с активными сопротивлениями и индуктивностями (рис. 10-1) $\varphi_1 > 0$; $\varphi_2 > 0$; $\varphi > 0$.

Ток в неразветвленной части цепи отстает по фазе от напряжения на угол φ , тангенс которого (§ 8-3)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2}{I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2}.$$

Активная мощность первой и второй ветвей

$$P_1 = UI_1 \cos \varphi_1, \quad P_2 = UI_2 \cos \varphi_2,$$

а всей цепи

$$P = UI \cos \varphi.$$

Реактивная мощность первой и второй ветвей

$$Q_1 = UI_1 \sin \varphi_1, \quad Q_2 = UI_2 \sin \varphi_2,$$

а всей цепи

$$Q = UI \sin \varphi.$$

Соответственно полные мощности

$$S_1 = UI_1, \quad S_2 = UI_2 \text{ и } S = UI.$$

Графоаналитический метод. В тех случаях, когда не требуется большой точности, пользуются графоаналитическим методом расчета разветвленных цепей.

Рассмотрим расчет такой цепи, состоящей из двух параллельных ветвей (рис. 10-1).

При заданном напряжении на зажимах цепи U и частоте его f и при известных активных сопротивлениях ветвей r_1 и r_2 и индуктивностях L_1 и L_2 по известной уже формуле (9-36) найдем сначала полные сопротивления ветвей

$$z_1 = \sqrt{r_1^2 + (\omega L_1)^2} \text{ и } z_2 = \sqrt{r_2^2 + (\omega L_2)^2}$$

и токи ветвей

$$I_1 = U/z_1 \text{ и } I_2 = U/z_2.$$

Затем определим тангенсы углов сдвига каждого из токов относительно напряжения на зажимах цепи

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = x_1/r_1 \text{ и } \operatorname{tg} \varphi_2 = x_2/r_2$$

и по логарифмической линейке или тригонометрической таблице найдем соответствующие углы сдвига φ_1 и φ_2 .

Выбрав подходящие масштабы для напряжения и токов (с тем чтобы диаграмма уложилась на предназначенном для этой цели листе бумаги), в произвольном направлении, например горизонтальном, отложим вектор напряжения U (рис. 10-2), а под углами φ_1 и φ_2 соответствующие векторы токов I_1 и I_2 .

Так как в ветвях с активными сопротивлениями и индуктивностями токи отстают по фазе от напряжения, то векторы токов должны быть повернуты относительно вектора напряжения U по ходу часовой стрелки.

Складывая векторы токов (см. § 8-3) по правилу треугольника (многоугольника) или по правилу параллелограмма, найдем вектор тока I в неразветвленной части цепи. Так как масштабы всех токов одинаковы, то, измерив длину вектора, найдем действующее значение тока в неразветвленной части цепи. Угол φ сдвига тока I относительно напряжения U найдем непосредственно из векторной диаграммы, пользуясь транспортиром.

Все остальные параметры (P , Q , S) находят расчетным путем по вышеприведенным формулам.

10-2

Расчет разветвленных цепей методом проводимостей

При расчете режима цепи с катушкой, обладающей индуктивностью L и сопротивлением r (§ 9-6, а), было отмечено, что для удобства расчета напряжение цепи можно рассматривать разложенным на две составляющие: активную U_a и реактивную U_p . В соответствии с этим катушка была представлена эквивалентной схемой с двумя последовательно соединенными элементами: активным r и реактивным x_L .

При расчете разветвленной цепи можно применить метод проводимостей, основанный на аналогичном приеме.

По методу проводимостей ток каждой параллельной ветви (в частности, катушки) рассматривают состоящим из двух составляющих: активной I_a и реактивной I_p . В соответствии с этим ветвь с любым приемником заменяют экви-

валентной схемой с двумя параллельно соединенными элементами: активным с проводимостью $g = I_a/U$ и реактивным с проводимостью $b = I_p/U$ (рис. 10-3, а).

Активная составляющая тока совпадает по фазе с напряжением параллельно соединенных вет-

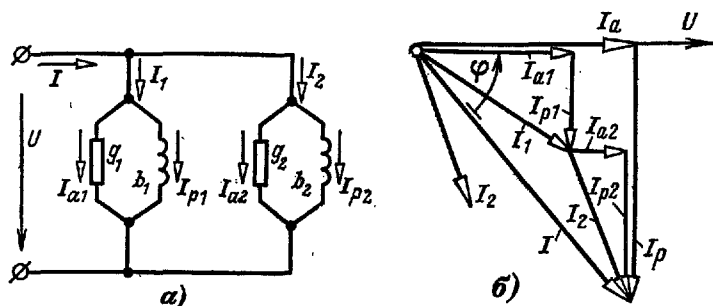


Рис. 10-3. Эквивалентная схема цепи по рис. 10-1 (а) и треугольники токов (б).

вей. Например, активная составляющая тока в первой ветви (рис. 10-3, а)

$$I_{a1} = I_1 \cos \varphi_1 = \frac{U}{z_1} \frac{r_1}{z_1} = U \frac{r_1}{z_1^2} = U g_1.$$

Величина

$$g_1 = r_1/z_1^2$$

называется активной проводимостью первой ветви.

Активная составляющая второго тока

$$I_{a2} = I_2 \cos \varphi_2 = U g_2,$$

где $g_2 = r_2/z_2^2$ — активная проводимость второй ветви.

Для произвольной ветви, в частности и для ветви с r и C или ветви с r , L и C , активная проводимость вычисляется по такой же формуле

$$g_b = r_b/z_b^2, \quad (10-4)$$

т. е. активная проводимость равна отношению активного сопротивления ветви к квадрату полного сопротивления, а активная составляющая тока ветви

$$I_{a,b} = I_b \cos \varphi_b = U g_b. \quad (10-5)$$

Реактивная составляющая первого тока

$$I_{p1} = I_1 \sin \varphi_1 = \frac{U}{z_1} \frac{x_1}{z_1} = U \frac{x_1}{z_1^2} = Ub_1,$$

где

$$b_1 = x_1/z_1^2$$

называется реактивной проводимостью первой ветви. Для схемы рис. 10-1 реактивная проводимость будет индуктивной:

$$b_1 = x_1/z_1^2 = b_{L1} = x_{L1}/z_1^2.$$

Реактивная составляющая второго тока

$$I_{p2} = I_2 \sin \varphi_2 = Ub_2,$$

где

$$b_2 = x_2/z_2^2 = x_{L2}/z_2^2.$$

В общем случае для произвольной ветви

$$b_v = x_v/z_v^2, \quad (10-6)$$

причем в общем случае x может быть или положительным (индуктивный режим) или отрицательным (емкостный режим), поэтому и реактивную проводимость нужно считать алгебраической величиной: положительной при $x_v > 0$ и отрицательной при $x_v \leq 0$.

Реактивная составляющая тока произвольной ветви, рассматриваемая как алгебраическая величина,

$$I_{pv} = I_v \sin \varphi_v = Ub_v. \quad (10-7)$$

В ветви с r и L реактивная составляющая отстает по фазе от напряжения на $1/4$ периода (рис. 10-3, б, где построения выполнены для случая $b_1 > 0$ и $b_2 > 0$), в ветви r и C — опережает напряжение на $1/4$ периода, а в ветви с тремя элементами с r , L и C — отстает на $1/4$ периода при $x_L > x_C$ или опережающей на $1/4$ периода при $x_L < x_C$. Таким образом, реактивная составляющая тока сдвинута относительно напряжения на угол $\pm \pi/2$.

Токи в ветвях и их составляющие изображаются на векторной диаграмме сторонами прямоугольных треугольников токов (рис. 10-3, б); поэтому токи и их составляющие связаны между собой теми же соотношениями, что и стороны треугольников:

$$I_1 = \sqrt{I_{a1}^2 + I_{p1}^2} = U \sqrt{g_1^2 + b_1^2}. \quad (10-8a)$$

$$I_2 = \sqrt{I_{a2}^2 + I_{p2}^2} = U \sqrt{g_2^2 + b_2^2}. \quad (10-8б)$$

Из сравнения (10-1) и (10-8) можно сделать вывод, что

$$y_1 = \sqrt{g_1^2 + b_1^2} \text{ и } y_2 = \sqrt{g_2^2 + b_2^2}$$

и вообще полная проводимость ветви

$$y = \sqrt{g^2 + b^2}. \quad (10-9)$$

Уменьшая в U раз стороны треугольника токов, получаем подобный ему треугольник проводимостей (рис. 10-4); естественно, что активная, реактивная и полная проводимости ветви связаны между собой так же, как стороны треугольника проводимостей.

Углы сдвига фаз φ_1 и φ_2 между напряжениями и токами в ветвях определяются через их тангенсы (рис. 10-4)

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = b_1/g_1 \text{ и } \operatorname{tg} \varphi_2 = b_2/g_2 \quad (10-10)$$

или через их синусы

$$\sin \varphi_1 = b_1/y_1 \text{ и } \sin \varphi_2 = b_2/y_2$$

(через косинусы определяются только величины, но не знаки углов сдвига фаз).

Активная составляющая общего тока (рис. 10-3)

$$I_a = I_{a1} + I_{a2} = Ug_1 + Ug_2 = U(g_1 + g_2) = Ug,$$

где $g = g_1 + g_2$ — активная проводимость всей цепи (рис. 10-4).

Реактивная составляющая общего тока

$$I_p = I_{p1} + I_{p2} = Ub_1 + Ub_2 = U(b_1 + b_2) = Ub;$$

здесь $b = b_1 + b_2$ — реактивная проводимость всей цепи (рис. 10-4).

Общий ток цепи

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{(Ug)^2 + (Ub)^2} = U\sqrt{g^2 + b^2} = Uy; \quad (10-11)$$

здесь

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = 1/z \quad (10-12)$$

— полная проводимость всей цепи (рис. 10-4) и для всей цепи, так же как для отдельной ветви

$$g = r/z^2 = ry^2 \text{ и } b = x/z^2 = xy^2. \quad (10-13)$$

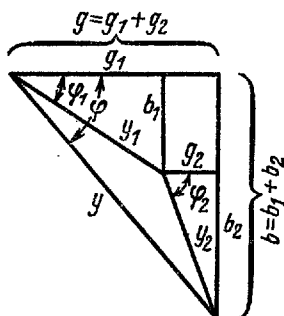


Рис. 10-4. Треугольники проводимостей.

Ток I отстает по фазе от напряжения U на угол φ , который определяется через его тангенс или синус

$$\operatorname{tg} \varphi = b/g; \sin \varphi = b/y. \quad (10-14)$$

Активная мощность цепи

$$P = UI \cos \varphi = UI \frac{g}{y} = UIzg = U^2g. \quad (10-15a)$$

Реактивная мощность цепи

$$Q = UI \sin \varphi = UI \frac{b}{y} = UIzb = U^2b. \quad (10-15b)$$

Полная мощность цепи

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U^2 \sqrt{g^2 + b^2} = U^2y. \quad (10-15b)$$

Пример 10-1. К сети с напряжением $U = 230$ В присоединен приемник энергии, имеющий две параллельные ветви (рис. 10-1) с параметрами: $r_1 = 2$ Ом; $x_{L1} = 3$ Ом; $r_2 = 3$ Ом; $x_{L2} = 1$ Ом.

Определить: 1) токи в ветвях I_1 , I_2 и общий ток I ; 2) углы сдвига фаз токов относительно напряжения сети; 3) активную, реактивную и полную мощности цепи.

Решение. 1) Активная, реактивная и полная проводимости ветвей

$$g_1 = r_1/z_1^2 = 2/(2^2 + 3^2) = 0,154 \text{ См};$$

$$b_1 = x_{L1}/z_1^2 = 3/(2^2 + 3^2) = 0,231 \text{ См};$$

$$y_1 = \sqrt{g_1^2 + b_1^2} = \sqrt{0,154^2 + 0,231^2} = 0,278 \text{ См};$$

$$g_2 = r_2/z_2^2 = 3/(3^2 + 1^2) = 0,3 \text{ См};$$

$$b_2 = x_{L2}/z_2^2 = 1/(3^2 + 1^2) = 0,1 \text{ См};$$

$$y_2 = \sqrt{g_2^2 + b_2^2} = \sqrt{0,3^2 + 0,1^2} = 0,316 \text{ См}.$$

Активная, реактивная и полная проводимости всей цепи:

$$g = g_1 + g_2 = 0,154 + 0,3 = 0,454 \text{ См};$$

$$b = b_1 + b_2 = 0,231 + 0,1 = 0,331 \text{ См};$$

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = \sqrt{0,454^2 + 0,331^2} = 0,55 \text{ См}.$$

Токи в ветвях и в неразветвленной части цепи

$$I_1 = Uy_1 = 230 \cdot 0,278 = 64 \text{ А}; \quad I_2 = Uy_2 = 230 \cdot 0,316 = 72,8 \text{ А};$$

$$I = Uy = 230 \cdot 0,55 = 127 \text{ А}.$$

2) Тангенсы углов и углы сдвига по фазе токов I_1 , I_2 и I относительно напряжения

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = b_1/g_1 = 0,231/0,154 = 1,5; \varphi_1 = 56^\circ 20';$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = b_2/g_2 = 0,1/0,3 = 0,333; \varphi_2 = 18^\circ 25';$$

$$\operatorname{tg} \varphi = b/g = 0,331/0,454 = 0,729; \varphi = 35^\circ 10'.$$

3) Активная, реактивная и полная мощности цепи:

$$P = U^2g = 230^2 \cdot 0,454 = 24\,016 \text{ Вт} \approx 24 \text{ кВт};$$

$$Q = U^2b = 230^2 \cdot 0,331 = 17\,510 \text{ вар} \approx 17,5 \text{ квар};$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{24^2 + 17,5^2} = 29,7 \text{ кВт} \cdot \text{А}.$$

Общий случай цепи с параллельными ветвями

Рассмотрим общий случай расчета режима на примере цепи с тремя параллельными ветвями (рис. 10-5). Первая ветвь содержит активное и индуктивное сопротивления (r_1 и x_{L1}), вторая ветвь активное и емкостное сопротивления (r_2 и x_{C2}) и третья ветвь активное, индуктивное и емкостное сопротивления (r_3 , x_{L3} и x_{C3}).

Активные проводимости ветвей вычисляются по формуле (10-4)

$$g_1 = r_1/z_1^2; \quad g_2 = r_2/z_2^2; \quad g_3 = r_3/z_3^2,$$

где $z_1 = \sqrt{r_1^2 + x_{L1}^2}$; $z_2 = \sqrt{r_2^2 + x_{C2}^2}$; $z_3 = \sqrt{r_3^2 + (x_{L3} - x_{C3})^2}$.

Активная проводимость цепи равна сумме проводимостей всех ветвей

$$g = g_1 + g_2 + g_3 = \Sigma g_n.$$

Реактивные проводимости отдельных ветвей в отличие от активных проводимостей являются алгебраическими величинами (10-6).

Реактивная проводимость первой ветви

$$b_1 = x_1/z_1^2 = x_{L1}/z_1^2.$$

Она положительна, так как $x_1 = x_{L1} = \omega L_1 > 0$ и $b_1 = b_{L1} > 0$.

Реактивная проводимость второй ветви

$$b_2 = x_2/z_2^2 = -x_{C2}/z_2^2.$$

Она отрицательна, так как $x_2 = -x_{C2} = -1/\omega C_2 < 0$ и, следовательно, $b_2 = -b_{C2} < 0$.

Индуктивная и емкостная проводимости b_{L1} и b_{C2} , как и индуктивное и емкостное сопротивления ветвей x_{L1} и x_{C2} , считаются положительными величинами. Поэтому индуктивная проводимость равна реактивной проводимости ветви с индуктивностью $b_{L1} = b_1$, а емкостная проводимость обратна по знаку реактивной проводимости ветви с емкостью $b_{C2} = -b_2$.

Реактивная проводимость третьей ветви

$$b_3 = x_3/z_3^2 = (x_{L3} - x_{C3})/z_3^2,$$

если $x_{L3} = \omega L_3 > x_{C3} = 1/\omega C_3$, то $b_3 > 0$, т. е. реактивная проводимость имеет индуктивный характер; при $x_{L3} < x_{C3}$ реактивная проводимость $b_3 < 0$, т. е. имеет емкостный характер.

Реактивная проводимость всей цепи — также алгебраическая величина

$$b = b_1 + b_2 + b_3 = \Sigma b_n.$$

Полная проводимость всей цепи

$$y = \sqrt{b^2 + g^2}.$$

Угол сдвига фаз между напряжением U и общим током I находится через тангенс или синус:

$$\operatorname{tg} \varphi = b/g \text{ или } \sin \varphi = b/y.$$

В зависимости от знака b угол φ может быть положительным или отрицательным, т. е. общий ток может отставать по фазе от напряжения ($\varphi > 0$) или опережать по фазе напряжение ($\varphi < 0$).

Аналогично определяются углы φ_1 , φ_2 и φ_3 для всех ветвей цепи. В ветвях с индуктивной реактивной проводимостью угол сдвига фаз положителен и ток в ветви отстает по фазе от напряжения. В ветвях с емкостной реактивной проводимостью ток опережает по фазе напряжение.

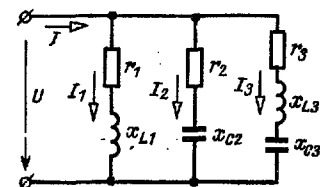


Рис. 10-5. Разветвленная цепь переменного тока.

стной реактивной проводимостью ток опережает по фазе напряжение.

Диаграмма проводимостей для цепи рис. 10-5, построенная в предположении, что $x_{L3} < x_{C3}$ ($b_3 < 0$), показана на рис. 10-6.

Следует обратить внимание, что в отличие от индуктивного сопротивления в треугольнике сопротивлений (см. рис. 9-18), индуктивная проводимость повернута относительно активной на 90° в сторону, обратную вращению векторов (рис. 10-6); то же относится и к емкостной проводимости и емкостному сопротивлению (см. рис. 9-24).

Из приведенной диаграммы (рис. 10-6) видно, что полная проводимость цепи с параллельными ветвями меньше арифметической суммы полных проводимостей ветвей, т. е. $y < y_1 + y_2 + y_3$. То же можно утверждать и в отношении

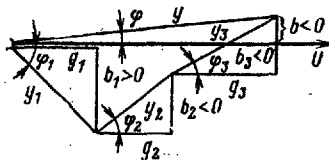


Рис. 10-6. Диаграмма проводимостей разветвленной цепи, изображенной на рис. 10-5.

токов, так как они пропорциональны полным проводимостям; таким образом, $I < I_1 + I_2 + I_3$.

Активная мощность цепи

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = U^2 g_1 + U^2 g_2 + U^2 g_3 = U^2 \sum g_n = U^2 g.$$

Реактивная мощность цепи

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = U^2 b_1 + U^2 b_2 + U^2 b_3 = U^2 \sum b_n = U^2 b.$$

Полная мощность цепи $S = U^2 y$, причем естественно, что $S < S_1 + S_2 + S_3$.

Диаграммы токов и мощностей подобны диаграмме проводимостей (рис. 10-6).

10-4

Расчет цепи со смешанным соединением сопротивлений

При расчете цепи со смешанным соединением сопротивлений (рис. 10-7, а) при заданных напряжениях U на зажимах цепи и сопротивлениях участков необходимо определить токи и напряжения на всех участках цепи.

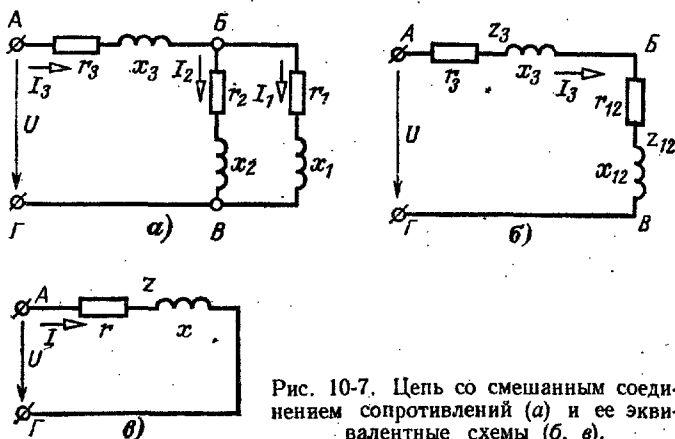


Рис. 10-7. Цепь со смешанным соединением сопротивлений (а) и ее эквивалентные схемы (б, в).

Заменим прежде всего разветвленную часть цепи между узлами $БВ$ неразветвленным эквивалентным участком. Для этого предварительно найдем проводимости ветвей

$$g_1 = r_1/z_1^2; \quad b_1 = x_1/z_1^2 = x_{L1}/z_1^2 = b_{L1};$$

$$g_2 = r_2/z_2^2; \quad b_2 = x_2/z_2^2 = x_{L2}/z_2^2 = b_{L2}$$

и активную, реактивную и полную проводимости разветвленного участка

$$g_{12} = g_1 + g_2; \quad b_{12} = b_1 + b_2 = b_{L1} + b_{L2};$$

$$y_{12} = \sqrt{g_{12}^2 + b_{12}^2}.$$

Полное эквивалентное сопротивление разветвленного участка между узлами BB и его активная и реактивная составляющие (10-2) и (10-13)

$$z_{12} = 1/y_{12}; \quad r_{12} = g_{12}z_{12}^2 \text{ и } x_{12} = b_{12}z_{12}^2.$$

Заменяв разветвленный участок эквивалентным неразветвленным, получим цепь с двумя последовательно соединенными сопротивлениями z_3 и z_{12} (рис. 10-7, б). Сложив активные и реактивные сопротивления участков AB и BB : $r = r_3 + r_{12}$ и $x = x_3 + x_{12}$, найдем полное эквивалентное сопротивление всей цепи AG (рис. 10-7, в)

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}.$$

Ток I в цепи рис. 10-7, в и равный ему ток I_3 в сопротивлении z_3

$$I = I_3 = U/z.$$

Этот ток сдвинут по фазе относительно напряжения цепи на угол, тангенс которого

$$\operatorname{tg} \varphi = x/r.$$

Напряжение на сопротивлении z_3

$$U_3 = Iz_3 = I_3z_3.$$

Угол сдвига тока I_3 относительно напряжения U_3 определяется через тангенс

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = x_3/r_3.$$

Напряжение на разветвленном участке цепи

$$U_1 = U_2 = U_{12} = I_3z_{12}.$$

Угол сдвига тока I_3 относительно этого напряжения определяется через тангенс

$$\operatorname{tg} \varphi_{12} = x_{12}/r_{12}.$$

Токи в параллельных ветвях

$$I_1 = \frac{U_1}{z_1} = \frac{U_1}{\sqrt{r_1^2 + x_1^2}} \text{ и } I_2 = \frac{U_2}{z_2} = \frac{U_2}{\sqrt{r_2^2 + x_2^2}}.$$

Углы сдвига этих токов относительно напряжения U_{12} определяются через тангенсы

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = x_1/r_1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = x_2/r_2.$$

Активная, реактивная и полная мощности цепи

$$P = UI_3 \cos \varphi; \quad Q = UI_3 \sin \varphi; \quad S = UI_3.$$

Активная, реактивная и полная мощности в отдельных участках цепи определяются по аналогичным формулам.

По найденным величинам построим векторную диаграмму (рис. 10-8). Откладываем в произвольном направлении (на рис. 10-8 в горизонтальном) вектор тока I_3 и под углом φ_{12} и к нему вектор напряжения U_{12} так, чтобы начала векторов совпадали. Из конца вектора напряжения U_{12} под углом φ_3 к вектору тока I_3 строим вектор напряжения U_3 . Соединив начало вектора U_{12} с концом вектора U_3 , получаем вектор напряжения на зажимах цепи U , повернутый на угол φ относительно вектора тока I . Векторы токов I_1 и I_2 откладываем отстающими по фазе на углы φ_1 и φ_2 относительно вектора напряжения U_{12} .

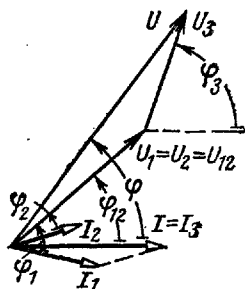


Рис. 10-8. Векторная диаграмма цепи, изображенной на рис. 10-7, а.

Если в рассмотренной цепи в одной из параллельных ветвей, например второй, индуктивность заменить емкостью, то в зависимости от того, какая из проводимостей (b_{L1} или b_{C2}) больше, реактивная проводимость $b_{12} = b_1 + b_2 = b_{L1} - b_{C2}$ получится положительной или отрицательной. Соответственно реактивное сопротивление x_{12} будет положительным или отрицательным, т. е. индуктивным или емкостным.

Пример 10-2. К сети переменного тока с частотой $f = 50$ Гц и напряжением $U = 125$ В подключена цепь (рис. 10-7, а) с параметрами: $r_1 = 0,5$ Ом; $x_1 = 1,2$ Ом; $r_2 = 0,8$ Ом; $x_2 = 0,6$ Ом; $r_3 = 0,42$ Ом; $x_3 = 0,15$ Ом. Требуется определить токи и напряжения на всех участках цепи.

Решение.

$$z_1^2 = r_1^2 + x_1^2 = 0,5^2 + 1,2^2 = 1,69 \text{ Ом}^2;$$

$$z_2^2 = r_2^2 + x_2^2 = 0,8^2 + 0,6^2 = 1 \text{ Ом}^2;$$

$$g_1 = r_1/z_1^2 = 0,5/1,69 = 0,3 \text{ См};$$

$$b_1 = x_1/z_1^2 = 1,2/1,69 = 0,7 \text{ См};$$

$$g_2 = r_2/z_2^2 = 0,8/1 = 0,8 \text{ См};$$

Параллельная эквивалентная схема (рис. 10-11) состоит из емкости C_2 и параллельно присоединенного активного сопротивления r_2 . Естественно, она должна удовлетворять тем же требованиям, что и первая схема.

На рис. 10-12 дана векторная диаграмма для этой схемы. Ток в активном сопротивлении I_a совпадает по фазе с напря-

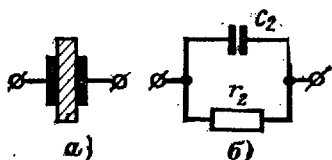


Рис. 10-11. Условное обозначение конденсатора с потерями (а) и его параллельная эквивалентная схема (б).

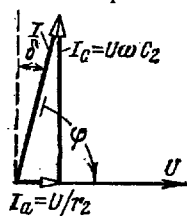


Рис. 10-12. Векторная диаграмма для схемы, изображенной на рис. 10-11, б.

жением U , ток в емкости I_C опережает напряжение U на угол $\pi/2$. Общий ток I , равный сумме токов двух ветвей, опережает по фазе напряжение на тот же угол $|\varphi| = \pi/2 - \delta$.

Активная мощность, развиваемая в цепи,

$$P = UI \cos \varphi = UI_a = U^2/r_2, \quad (10-18)$$

но так как из треугольника токов (рис. 10-12)

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{I_a}{I_C} = \frac{U/r_2}{U/x_C} = \frac{x_C}{r_2} = \frac{1}{\omega C r_2} \text{ и } r_2 = \frac{1}{\omega C_2 \operatorname{tg} \delta},$$

то мощность

$$P = UI \cos \varphi = U^2 \omega C_2 \operatorname{tg} \delta. \quad (10-19)$$

Измерив напряжение, ток и мощность конденсатора с потерями, можно определить параметры параллельной эквивалентной схемы:

$$y = I/U; \quad g_2 = P/U^2; \quad b_{C_2} = \omega C_2 = \sqrt{y^2 - g_2^2}$$

и, наконец,

$$C_2 = \frac{1}{\omega} \sqrt{y^2 - g_2^2} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{I^2}{U^2} - \left(\frac{P}{U^2}\right)^2} = \frac{1}{\omega U^2} \sqrt{I^2 U^2 - P^2}.$$

Следует учесть, что $g_2 = 1/r_2 \neq 1/r_1$ и $C_2 \neq C_1$.

Пример 10-3. Конденсатор включен в сеть с напряжением $U = 200$ В и частотой $f = 50$ Гц, ток в цепи конденсатора $I = 1$ А, активная мощность $P = 10$ Вт. Определить параметры параллельной эквивалентной схемы.

Решение. Сопротивление

$$r_2 = 1/g_2 = U^2/P = 200^2/10 = 4000 \text{ Ом};$$

емкость

$$C_2 = \frac{1}{\omega U^2} \sqrt{I^2 U^2 - P^2} = \frac{1}{314 \cdot 200^2} \sqrt{1 \cdot 200^2 - 10^2} \approx 16 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$$

Катушка. При низких частотах, например при стандартной частоте $f = 50$ Гц, катушка может быть заменена или последовательной эквивалентной схемой (рис. 9-15), или параллельной эквивалентной схемой (рис. 10-3, а), расчет параметров которой был уже рассмотрен в § 10-1 и 10-2.

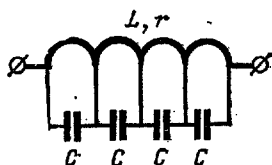


Рис. 10-13. Эквивалентная схема катушки.

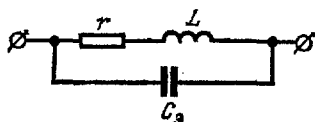


Рис. 10-14. Упрощенная эквивалентная схема катушки.

При более высоких частотах эквивалентная схема замещения катушки усложняется вследствие влияния емкостей C между отдельными витками катушки (рис. 10-13). При увеличении частоты емкостное сопротивление ($x_C = 1/\omega C$) между витками уменьшается и влияние междувитковой емкости увеличивается. Упрощенная эквивалентная схема катушки показана на рис. 10-14. В действительности все указанные на схеме параметры являются не сосредоточенными, а распределенными по длине катушки.

Применяемые в электротехнике образцовые катушки сопротивлений, катушки магазинов сопротивлений, реостаты и другие аналогичные устройства обладают некоторой индуктивностью и междувитковой емкостью, с которыми необходимо считаться при их работе в цепях с повышенной и высокой частотой.

10-6

Резонанс в разветвленной цепи (резонанс токов)

Параллельный контур без потерь. В разветвленной цепи (рис. 10-15) с двумя ветвями, одна из которых содержит индуктивность L — катушку, потерями в которой можно

пренебречь, а другая емкость C — конденсатор (параллельный колебательный контур без потерь), при равенстве реактивных проводимостей

$$b_L = 1/x_L = 1/\omega L \quad \text{и} \quad b_C = 1/x_C = \omega C$$

наступает резонанс токов. Таким образом, в случае резонанса токов в контуре без потерь, так же как при резонансе напряжений,

$$\omega L = 1/\omega C.$$

Следовательно, резонанс в рассматриваемой цепи можно получить подбором индуктивности, емкости или частоты; резонанс наступает при выполнении любого из соотношений

$$L = \frac{1}{\omega^2 C}; \quad C = \frac{1}{\omega^2 L}; \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0, \quad (10-20)$$

где ω — угловая частота напряжения питания, а ω_0 — собственная угловая частота колебаний контура.

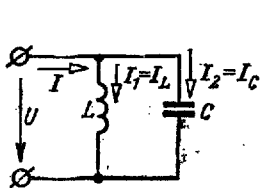


Рис. 10-15. Разветвленная цепь с индуктивностью и емкостью.

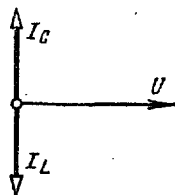


Рис. 10-16. Векторная диаграмма для цепи, изображенной на рис. 10-15.

При отсутствии потерь в ветвях их активные сопротивления $r_1 = r_2 = 0$ и активные проводимости также равны нулю, так как

$$g_1 = r_1/z_1^2 = 0 \quad \text{и} \quad g_2 = r_2/z_2^2 = 0.$$

Следовательно, равны нулю активная проводимость цепи $g = g_1 + g_2 = 0$ и активная слагающая тока цепи $I_a = Ug = 0$. Это и естественно, так как потери энергии в контуре отсутствуют.

При резонансе токов реактивная проводимость контура $b = b_1 + b_2 = b_L - b_C$ равна нулю, следовательно, равна нулю и полная проводимость контура $y = \sqrt{g^2 + b^2} = 0$, а сопротивление, наоборот, бесконечно велико: $z = 1/y = \infty$.

Поэтому при резонансе ток в неразветвленной части цепи $I = Uy = 0$, а токи в ветвях равны по абсолютной величине $I_C = Ub_C = I_L = Ub_L$ и изменяются в противофазе, что видно из векторной диаграммы (рис. 10-16) и графика мгновенных значений напряжения, токов и мощностей (рис. 10-17, а и б), где принято, что $u = U_m \sin \omega t$.

Отсутствие в цепи активных сопротивлений указывает на то, что энергия, запасенная в контуре, не рассеивается.

В течение первой четверти периода напряжение в сети и на емкости $u = u_C$ растет с нулевого значения до максимального $U_m = U_{Cm}$ (рис. 10-17, а), а ток в индуктивности i_L , который отстает по фазе от напряжения на угол $\pi/2$, уменьшается до нуля в конце первой четверти периода. Следовательно, в момент времени $t = T/4$ энергия контура сосредоточена в электрическом поле $W_{Cm} = CU_{Cm}^2/2$, а энергия магнитного поля $Li^2/2 = 0$. К концу второй четверти периода конденсатор разрядится ($u_C = u = 0$ при $t = T/2$), а вся энергия контура будет сосредоточена в магнитном поле, так как в этот момент времени $i_L = I_{Lm}$ и $Li_{Lm}^2/2 = W_{Lm}$. Так как $b_L = b_C$ или $1/\omega L =$

$= \omega C$ и $I_L = I_C = U_C \omega C$, то $LI_{Lm}^2 = LU_{Cm}^2 \omega^2 C^2 = CU_{Cm}^2$, т. е. $W_{Lm} = W_{Cm}$. Обмена энергии с источником питания нет, так как ток в неразветвленной части цепи равен нулю.

В течение следующей четверти периода энергия магнитного поля преобразуется в энергию электрического поля и затем процесс периодического обмена энергией повторяется.

На рис. 10-18 показаны частотные характеристики — зависимости от частоты проводимости двух ветвей $b_1 = b_L = 1/\omega L$ и $b_2 = -b_C = -\omega C$ и общей или эквивалентной проводимости цепи $b = b_1 + b_2 = 1/\omega L - \omega C$. Так как $I_1 = Ub_1$, $I_2 = U|b_2|$ и $I = Uy = U|b|$, то резонансные кривые токов подобны частотным характеристикам, если для последних откладывать по оси ординат модули проводимостей.

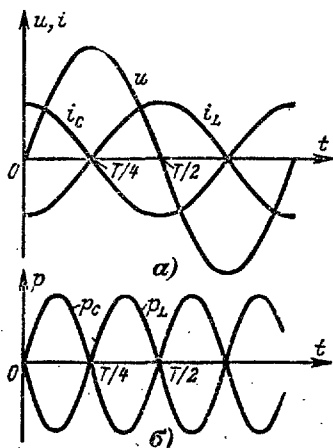


Рис. 10-17. Токи, напряжение (а) и мощность (б) для цепи, изображенной на рис. 10-15.

При изменении частоты от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_0$ (10-18), общая проводимость $b > 0$, т. е. индуктивная и изменяется от ∞ до 0. При $\omega = \omega_0$, как показано выше, имеет место резонанс токов, т. е. $b = 0$ и $I = 0$, $I_1 = I_L = Ub_L = I_2 = I_C = Ub_C$. При увеличении частоты от $\omega = \omega_0$ до $\omega = \infty$ общая проводимость изменяется от 0 до $-\infty$.

Параллельный контур с потерями. На рис. 10-19 представлена разветвленная цепь, состоящая из двух ветвей,

одна из которых содержит индуктивность L и активное сопротивление r_1 , а другая емкость C и активное сопротивление r_2 (параллельный колебательный контур с потерями).

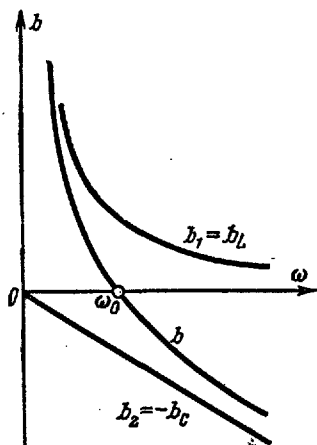


Рис. 10-18. Частотные характеристики проводимостей цепи, изображенной на рис. 10-15.

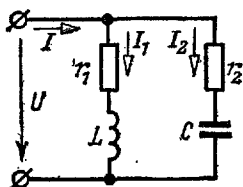


Рис. 10-19. Разветвленная цепь с активными сопротивлениями, индуктивностью и емкостью.

При заданном напряжении $u = U_m \sin \omega t$ на зажимах цепи токи в неразветвленной части и в ветвях определяются известными соотношениями

$$I = Uy = U\sqrt{g^2 + b^2}; \quad I_1 = U\sqrt{g_1^2 + b_1^2} \quad \text{и} \quad I_2 = U\sqrt{g_2^2 + b_2^2},$$

где

$$g_1 = r_1/z_1^2; \quad b_1 = b_L = x_L/z_1^2; \quad g_2 = r_2/z_2^2;$$

$$b_2 = -b_C = -x_C/z_2^2; \quad g = g_1 + g_2; \quad b = b_1 + b_2.$$

На рис. 10-20 и 10-22 даны векторные диаграммы, на которых показаны токи I , I_1 , I_2 и их активные и реактивные составляющие при $b_L > b_C$ (рис. 10-20) и $b_L < b_C$ (рис. 10-22).

Уменьшив стороны многоугольника токов в U раз, получим подобный многоугольник проводимостей (рис. 10-21 и 10-23).

Так как $b_1 = b_L > 0$, а $b_2 = -b_C < 0$, то отрезки, выражающие реактивные проводимости двух параллельных ветвей, направлены на рис. 10-21 и 10-23 противоположно, как и реактивные составляющие токов на рис. 10-20 и 10-22.

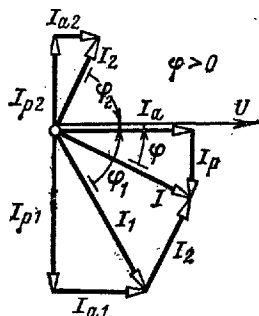


Рис. 10-20. Векторная диаграмма цепи, изображенной на рис. 10-19, при $b_L > b_C$.

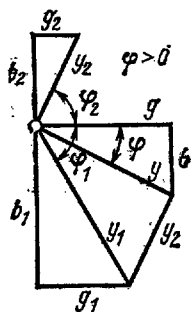


Рис. 10-21. Многоугольник проводимостей для цепи, изображенной на рис. 10-19, при $b_L > b_C$.

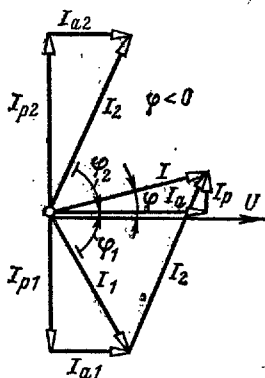


Рис. 10-22. Векторная диаграмма цепи, изображенной на рис. 10-19, при $b_L < b_C$.

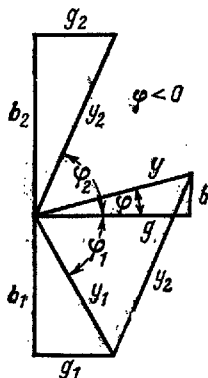


Рис. 10-23. Многоугольник проводимостей для цепи, изображенной на рис. 10-19, при $b_L < b_C$.

Тангенс угла сдвига по фазе тока I относительно напряжения U

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{g} = \frac{b_1 + b_2}{g} = \frac{b_L - b_C}{g}.$$

При $b_L > b_C$ ток I отстает по фазе от напряжения и угол $\varphi > 0$ (рис. 10-20 и 10-21). При $b_L < b_C$ ток I опережает по фазе напряжение U и угол $\varphi < 0$ (рис. 10-22 и 10-23).

Наконец, при $b_L = b_C$ угол сдвига $\varphi = 0$, так как $\operatorname{tg} \varphi = 0$ (рис. 10-24 и 10-25). В этом случае реактивные составляющие токов ветвей, равные по величине и изменяющиеся в противофазе, компенсируют друг друга и общий ток цепи совпадает по фазе с напряжением U , т. е. является активным $I = I_a = Ug = U(g_1 + g_2)$. Этот ток I при незначительных величинах r_1 и r_2 по сравнению с x_L и x_C , т. е. I_{a1} и I_{a2} по сравнению с I_{p1} и I_{p2} , будет меньше токов I_1 и I_2 в ветвях.

Режим цепи при $b = b_1 + b_2 = b_L - b_C = 0$ или $b_L = b_C$, когда общий ток совпадает по фазе с напряжением, называют

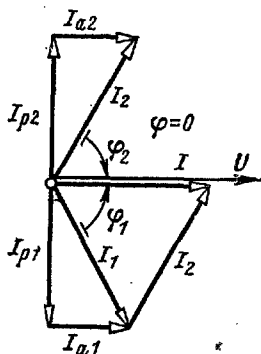


Рис. 10-24. Векторная диаграмма цепи, изображенной на рис. 10-19, при $b_L = b_C$.

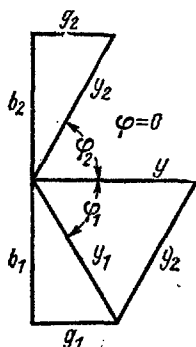


Рис. 10-25. Многоугольник проводимостей для цепи, изображенной на рис. 10-19, при $b_L = b_C$.

резонансом токов. Приняв во внимание, что $b_L = x_L/z_1^2$ и $b_C = x_C/z_2^2$, получим условия резонанса токов

$$\frac{\omega L}{r_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{1/\omega C}{r_2^2 + (1/\omega C)^2}. \quad (10-21)$$

При резонансе реактивные мощности ветвей $Q_1 = U^2 b_1$ и $Q_2 = U^2 b_2$ равны по величине, но так как $b_1 + b_2 = 0$, то реактивная мощность цепи, равная сумме реактивных мощностей в ветвях, равна нулю:

$$Q = Q_1 + Q_2 = U^2 (b_1 + b_2) = 0. \quad (10-22)$$

Это означает, что обмена энергией с источником питания нет.

Присутствие в ветвях активных сопротивлений указывает на происходящее в них необратимое преобразование

электрической энергии в тепловую, которое происходит за счет энергии источника питания. Следовательно, источник питания обеспечивает цепь активной мощностью и цепь в целом характеризуется при резонансе только активным сопротивлением. Действительно, так как

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = g = g_1 + g_2, \text{ то } z = 1/y = r.$$

Покажем на частном примере, что энергетический процесс при резонансе токов в контуре с потерями существенно отличается от процесса при резонансе напряжений.

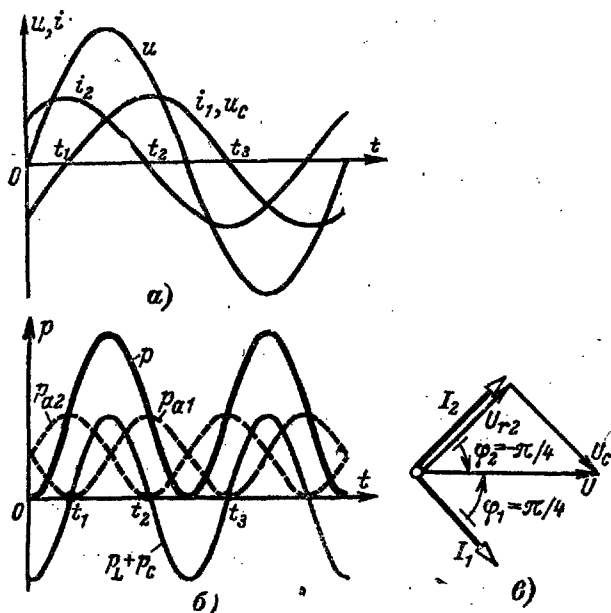


Рис. 10-26. Токи, напряжение (а), мощность (б) и векторная диаграмма (в) при резонансе токов.

Допустим, что параметры цепи (рис. 10-19) подобраны так, что ток в первой ветви i_1 отстает по фазе от напряжения u на угол $\pi/4$, а ток во второй ветви i_2 на такой же угол опережает напряжение u (рис. 10-26). В этом случае напряжение на конденсаторе u_c , отстающее по фазе от тока i_2 на угол $\pi/2$, совпадает по фазе с током i_1 и, следовательно, энергии в магнитном и электрическом полях накапливаются одновременно при нарастании тока i_1 и напряжения u_c , например, в течение четверти периода с момента t_1 , когда $i_1 = 0$ и $u_c = 0$,

до момента t_2 , когда они достигают амплитудных значений (рис. 10-26, а). Следовательно, за это время энергия, поступающая в цепь от источника питания ($p > 0$), накапливается в магнитном и электрическом полях ($p_L + p_C > 0$) и, кроме того, преобразуется в тепловую в сопротивлениях r_1 и r_2 ($p_{a1} > 0$ и $p_{a2} > 0$), что показано на рис. 10-26, б.

В следующую четверть периода с момента t_2 до момента t_3 ток i_1 и напряжение u_C уменьшаются и энергия, одновременно возвращаемая из магнитного и электрического полей ($p_L + p_C < 0$) и поступающая от источника питания ($p > 0$), преобразуется в тепловую в сопротивлениях r_1 и r_2 ($p_{a1} > 0$ и $p_{a2} > 0$).

Таким образом, при резонансе токов в рассматриваемой цепи параметры могут быть подобраны так, что даже не будет происходить обмена энергией между катушкой и конденсатором; иначе говоря, в общем случае сумма энергий магнитного и электрического полей не остается постоянной, как в параллельном колебательном контуре без потерь. Но при резонансе токов цепь обладает только активным сопротивлением и поэтому мгновенная мощность цепи p (рис. 10-26, б) все время остается положительной, как и на рис. 9-2, б.

Резонанс токов может возникнуть и в цепи с числом ветвей больше двух, если реактивная проводимость цепи

$$b \pm \Sigma b_L - \Sigma b_C = 0.$$

Пример 10-4. К источнику питания с напряжением $U = 130$ В и частотой $f = 50$ Гц присоединена цепь (рис. 10-19) с двумя ветвями, параметры которых: $r_1 = r_2 = 1,6$ Ом; $L = 0,0165$ Г; $C = 612$ мкФ.

Определить: 1) токи во всех участках цепи I_1 , I_2 и I ; 2) углы сдвига фаз этих токов относительно напряжения U ; 3) активную и реактивную мощности цепи; 4) наибольшие значения энергии, запасаемой в электрическом и в магнитном полях цепи.

Решение. Реактивные сопротивления ветвей

$$x_{L1} = 2\pi fL = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,0165 = 5,2 \text{ Ом};$$

$$x_{C2} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{10^9}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 612} = 5,2 \text{ Ом}.$$

Активные проводимости ветвей и всей цепи

$$g_1 = \frac{1}{z_1^2} = \frac{r_1}{r_1^2 + x_{L1}^2} = \frac{1,6}{1,6^2 + 5,2^2} = 0,054 \text{ См};$$

$$g_2 = \frac{1}{z_2^2} = \frac{r_2}{r_2^2 + x_{C2}^2} = \frac{1,6}{1,6^2 + 5,2^2} = 0,054 \text{ См};$$

$$g = g_1 + g_2 = 0,054 + 0,054 = 0,108 \text{ См}.$$

Реактивные проводимости ветвей и всей цепи

$$b_1 = \frac{x_1}{z_1^2} = \frac{x_{L1}}{z_1^2} = \frac{5,2}{1,6^2 + 5,2^2} = 0,176 \text{ См};$$
$$b_2 = \frac{x_2}{z_2^2} = \frac{-x_{C2}}{z_2^2} = \frac{-5,2}{1,6^2 + 5,2^2} = -0,176 \text{ См};$$
$$b = b_1 + b_2 = 0,176 - 0,176 = 0.$$

Полная проводимость цепи

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = g = 0,108 \text{ См}.$$

Активная и реактивная слагающие тока первой ветви

$$I_{a1} = Ug_1 = 130 \cdot 0,054 = 7,02 \text{ А};$$

$$I_{p1} = Ub_1 = 130 \cdot 0,176 = 22,9 \text{ А}.$$

Ток первой ветви

$$I_1 = \sqrt{I_{a1}^2 + I_{p1}^2} = \sqrt{7,02^2 + 22,9^2} = 23,9 \text{ А}.$$

Угол сдвига по фазе тока I_1 относительно напряжения U

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = b_1/g_1 = 0,176/0,054 = 3,26; \quad \varphi_1 = 73^\circ,$$

т. е. ток I_1 отстает по фазе от напряжения.

Активная и реактивная слагающие тока второй ветви

$$I_{a2} = Ug_2 = 130 \cdot 0,054 = 7,02 \text{ А};$$

$$I_{p2} = Ub_2 = 130 \cdot (-0,176) = -22,9 \text{ А}.$$

Ток второй ветви

$$I_2 = \sqrt{I_{a2}^2 + I_{p2}^2} = \sqrt{7,02^2 + 22,9^2} = 23,9 \text{ А}.$$

Угол сдвига по фазе тока I_2 относительно напряжения U

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = b_2/g_2 = -0,176/0,054 = -3,26; \quad \varphi_2 = -73^\circ,$$

т. е. ток I_2 опережает по фазе напряжение.

Активная и реактивная слагающие общего тока

$$I_a = I_{a1} + I_{a2} = 7,02 + 7,02 = 14,04 \text{ А};$$

$$I_p = I_{p1} + I_{p2} = 22,9 - 22,9 = 0.$$

Общий ток цепи

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = 14,04 \text{ А}.$$

Активная и реактивная мощности первой ветви

$$P_1 = U^2 g_1 = 130^2 \cdot 0,054 = 913 \text{ Вт} = 0,913 \text{ кВт};$$

$$Q_1 = U^2 b_1 = 130^2 \cdot 0,176 = 2974 \text{ вар} = 2,974 \text{ квар}.$$

Активная и реактивная мощности второй ветви

$$P_2 = U^2 g_2 = 130^2 \cdot 0,054 = 913 \text{ Вт} = 0,913 \text{ кВт};$$

$$Q_2 = U^2 b_2 = 130^2 \cdot (-0,176) = -2974 \text{ вар} = -2,974 \text{ квар}.$$

Активная и реактивная мощности цепи

$$P = P_1 + P_2 = 0,913 + 0,913 = 1,826 \text{ кВт};$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 0.$$

Максимальная энергия, запасаемая в электрическом поле,

$$W_{C_m} = CU_C^2 = (I_2 x_{C_2})^2 C = (23,9 \cdot 5,2)^2 \cdot 612 \cdot 10^{-6} = 9,4 \text{ Дж.}$$

Максимальная энергия, запасаемая в магнитном поле,

$$W_{L_m} = LI_1^2 = 0,0165 \cdot 23,9^2 = 9,4 \text{ Дж.}$$

10-7

Значение коэффициента мощности для энергетики

Электрические машины, аппараты и другие устройства характеризуются: 1) номинальным током I_n , который при длительном прохождении вызывает предельное допустимое нагревание; 2) номинальным напряжением U_n , на которое рассчитана и изготовлена машина или прибор; 3) номинальной полной мощностью, равной произведению U_n и I_n , т. е.

$$S_n = U_n I_n.$$

Полное использование мощности генератора происходит при номинальных напряжении и токе и работе с $\cos \varphi = 1$, так как в этом случае активная мощность наибольшая и равна номинальной полной мощности

$$P = U_n I_n \cos \varphi = U_n I_n = S_n. \quad (10-23)$$

Генератор, работающий при номинальных напряжении и токе, но при $\cos \varphi \neq 1$ развивает активную мощность, пропорциональную $\cos \varphi$. Следовательно, уменьшение $\cos \varphi$, величина которого определяется приемником энергии, вызывает неполное использование генератора.

Приемник энергии, работающий при заданных неизменных напряжении U и активной мощности P , но при различных $\cos \varphi$, потребляет ток тем больший, чем меньше его $\cos \varphi$. Действительно, обозначив через I_0 ток при $\cos \varphi_0 = 1$ и I — ток при $\cos \varphi < 1$, можем написать, что

$$P = UI_0 \cos \varphi_0 = UI \cos \varphi, \quad (10-24)$$

откуда следует:

$$I_0 \cos \varphi_0 = I \cos \varphi$$

или

$$I = I_0 \cos \varphi_0 / \cos \varphi = I_0 / \cos \varphi. \quad (10-25)$$

Обозначив через r сопротивление генератора и соединительных проводов, найдем мощность тепловых потерь в них: $\Delta P = I^2 r$. При постоянной мощности P и уменьшающемся $\cos \varphi$ ток, а значит, и мощность тепловых потерь увеличиваются. Если при $\cos \varphi_0 = 1$

$$\Delta P_0 = I_0^2 r, \quad (10-26)$$

то при других значениях $\cos \varphi$ с учетом (10-25) получим:

$$\Delta P = I^2 r = I_0^2 \frac{1}{\cos^2 \varphi} r = \Delta P_0 \frac{1}{\cos^2 \varphi}. \quad (10-27)$$

Таким образом, при постоянной мощности P приемника уменьшение $\cos \varphi$ вызывает увеличение потерь на нагревание, которые растут обратно пропорционально квадрату коэффициента мощности.

Для полного использования номинальной установленной мощности генераторов и уменьшения тепловых потерь необходимо повышать $\cos \varphi$ установок до значений, близких к единице (0,95—1).

У широко применяемых для привода станков и других машин асинхронных двигателей $\cos \varphi$ при холостом ходе составляет 0,2—0,3, а при номинальной нагрузке 0,83—0,85. Для повышения $\cos \varphi$ параллельно двигателю или группе двигателей включают конденсаторы. В этом случае энергия в магнитном поле двигателя частично или полностью накапливается за счет энергии электрического поля конденсаторов и наоборот, а генератор и провода, соединяющие его с цепью двигатель — конденсатор, разгружаются от обменной энергии (от реактивной слагающей тока).

Повышение $\cos \varphi$ электрических установок является важной технико-экономической проблемой. Повышение $\cos \varphi$ означает значительную экономию электрической энергии, так как уменьшаются потери в генераторах, трансформаторах, в воздушных и кабельных сетях. Одновременно разгрузка электрических установок от обменной энергии позволяет лучше использовать установленную мощность, т. е. увеличить активную мощность, развиваемую генераторами, и передачу энергии через трансформаторы и по линиям.

Пример 10-5. Номинальные данные генератора: $U_H = 6000$ В; $I_H = 250$ А; $S_H = 1500$ кВ·А.

Определить активную мощность генератора при $\cos \varphi_1 = 0,9$ и $\cos \varphi_2 = 0,3$.

Решение. Активная мощность

$$P_1 = U_H I_H \cos \varphi_1 = 6000 \cdot 250 \cdot 0,9 = 1350 \text{ кВт};$$

$$P_2 = U_H I_H \cos \varphi_2 = 6000 \cdot 250 \cdot 0,3 = 450 \text{ кВт}.$$

Пример 10-6. Напряжение приемника $U = 400$ В, мощность его $P = 50$ кВт. Сопротивление проводов, соединяющих потребителя с генератором, $r = 0,04$ Ом.

Определить мощность потерь в проводах при $\cos \varphi_1 = 0,9$ и $\cos \varphi_2 = 0,3$.

Решение. Токи приемника при этих режимах

$$I_1 = P/U \cos \varphi_1 = 50\,000/400 \cdot 0,9 = 139 \text{ А};$$

$$I_2 = P/U \cos \varphi_2 = 50\,000/400 \cdot 0,3 = 417 \text{ А}.$$

Мощность потерь в проводах

$$\Delta P_1 = I_1^2 r = 139^2 \cdot 0,04 = 19\,320 \cdot 0,04 = 772 \text{ Вт};$$

$$\Delta P_2 = I_2^2 r = 417^2 \cdot 0,04 = 173\,900 \cdot 0,04 = 6956 \text{ Вт}.$$

Та же мощность потерь в процентах от мощности приемника

$$\Delta P_1 = 772 \cdot 100/50\,000 = 1,54\%;$$

$$\Delta P_2 = 6956 \cdot 100/50\,000 = 13,8\%.$$

Пример 10-7. Двигатель работает при напряжении $U = 220$ В, частоте $f = 50$ Гц с $\cos \varphi_1 = 0,6$, развивая мощность $P = 20$ кВт.

Какой емкости конденсатор необходимо подключить параллельно двигателю с тем, чтобы установка работала с $\cos \varphi_2 = 0,9$?

Решение. Ток двигателя при $\cos \varphi_1 = 0,6$

$$I_1 = P/U \cos \varphi_1 = 20\,000/220 \cdot 0,6 = 152 \text{ А}.$$

По таблице тригонометрических функций находим $\varphi_1 = 53^\circ 10'$ и $\sin \varphi_1 = 0,8$.

Реактивная слагающая тока двигателя

$$I_{p1} = I_1 \sin \varphi_1 = 152 \cdot 0,8 = 121,6 \text{ А}.$$

При $\cos \varphi_2 = 0,9$, угол $\varphi_2 = 26^\circ 50'$, его $\sin \varphi_2 = 0,436$.

Ток установки двигатель—конденсатор, работающей при $\cos \varphi_2 = 0,9$,

$$I_2 = P/U \cos \varphi_2 = 20\,000/220 \cdot 0,9 = 101 \text{ А}.$$

Реактивная слагающая тока

$$I_{p2} = I_2 \sin \varphi_2 = 101 \cdot 0,436 = 44 \text{ А}.$$

Уменьшение реактивной слагающей тока вследствие включения конденсатора

$$I_C = I_{p1} - I_{p2} = 121,6 - 44 = 77,6 \text{ А}.$$

Реактивное сопротивление конденсатора

$$x_C = 1/\omega C = U/I_C = 220/77,6 = 2,83 \text{ Ом}.$$

Емкость конденсатора

$$C = \frac{1}{x_C \omega} = \frac{1}{x_C 2\pi f} = \frac{1}{2,83 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 50} = 0,00113 \text{ Ф} = 1\,130 \text{ мкФ}.$$

Таким образом, параллельно двигателю необходимо подключить конденсатор очень большой емкости $C = 1130$ мкФ.

Активная и реактивная энергия

Величина, определяемая как произведение активной мощности P и времени t , в течение которого мощность остается неизменной, называется активной энергией:

$$W_a = Pt = UI \cos \varphi t. \quad (10-28)$$

Она характеризует электрическую энергию, израсходованную в цепи переменного тока.

Если в течение времени t мощность изменяется, то время t делят на промежутки t_1, t_2, t_3 и т. д., в течение каждого из которых мощность остается неизменной, и энергию определяют как сумму

$$W_a = P_1 t_1 + P_2 t_2 + \dots = W_{a1} + W_{a2} + \dots$$

Активная энергия измеряется счетчиками активной энергии. Величина, определяемая как произведение реактивной мощности Q и времени t , называется реактивной энергией:

$$W_p = Qt = UI \sin \varphi t. \quad (10-29)$$

Она является чисто расчетной величиной, позволяющей определить среднее значение коэффициента мощности установки.

При изменяющейся реактивной мощности реактивная энергия определяется по формуле

$$W_p = Q_1 t_1 + Q_2 t_2 + \dots = W_{p1} + W_{p2} + \dots$$

Реактивная энергия измеряется счетчиками реактивной энергии.

При постоянных значениях мощностей отношение

$$\begin{aligned} \frac{W_a}{\sqrt{W_a^2 + W_p^2}} &= \frac{Ult \cos \varphi}{\sqrt{(Ult \cos \varphi)^2 + (Ult \sin \varphi)^2}} = \\ &= \frac{Ult \cos \varphi}{Ult \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} = \cos \varphi, \end{aligned}$$

т. е. равно коэффициенту мощности.

Если активная и реактивная мощности установки изменяются, то, измерив при помощи счетчиков активную и реактивную энергию за какой-то промежуток времени, можно найти отношение

$$\frac{W_a}{\sqrt{W_a^2 + W_p^2}} = \cos \varphi_{cp}, \quad (10-30)$$

называемое средним значением коэффициента мощности установки. Средний коэффициент мощности установки является важным технико-экономическим показателем режима работы установки.

Пример 10-8. В начале месяца счетчик активной энергии показал 1762 кВт·ч, а счетчик реактивной энергии 736 квар·ч. В конце месяца первый показал 1922 кВт·ч, а второй 846 квар·ч.

Определить среднее за месяц значение коэффициента мощности установки.

Решение. Израсходованная за месяц активная энергия

$$W_a = 1922 - 1762 = 160 \text{ кВт} \cdot \text{ч};$$

израсходованная за то же время реактивная энергия

$$W_p = 846 - 736 = 110 \text{ квар} \cdot \text{ч};$$

$$\cos \varphi_{\text{ср}} = \frac{W_a}{\sqrt{W_a^2 + W_p^2}} = \frac{160}{\sqrt{160^2 + 110^2}} = 0,82.$$

10-9

Измерение мощности

Измерение мощности в цепи переменного тока низкой и, в частности, промышленной частоты производится электродинамическими или ферродинамическими ваттметрами.

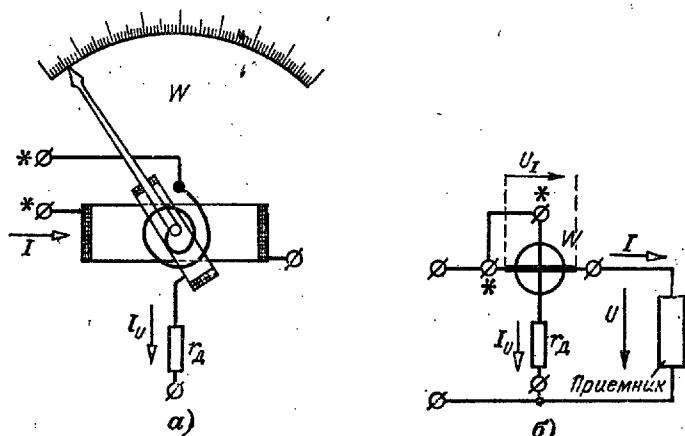


Рис. 10-27. Электродинамический ваттметр.

а — схема устройства; б — схема включения.

Электродинамический ваттметр (рис. 10-27, а) имеет две катушки. Первая из них неподвижная, последовательная, или катушка тока, включается последовательно с приемником, активная мощность которого измеряется (рис. 10-27, б). Вторая катушка — подвижная,

параллельная, или катушка напряжения крепится на одной оси с указательной стрелкой прибора. Эта катушка вместе с последовательно присоединенным добавочным сопротивлением r_d образует параллельную цепь ваттметра, которая включается параллельно приемнику.

Взаимодействие тока последовательной катушки I и параллельной I_U создаст вращающий момент, действующий на подвижную катушку. Мгновенное значение m этого момента пропорционально произведению мгновенных значений токов i и i_U , т. е.

$$m = k_1 i i_U,$$

где k_1 — коэффициент пропорциональности.

Считая, что напряжение на параллельной цепи ваттметра $u = U_m \sin \omega t$, а ток в последовательной катушке $i = I_m \sin (\omega t - \varphi)$, и пренебрегая малым сопротивлением катушки напряжения по сравнению с добавочным r_d , найдем ток в параллельной цепи ваттметра

$$i_U = \frac{U_m}{r_d} \sin \omega t.$$

Таким образом, вращающий момент

$$m = k_1 \frac{U_m}{r_d} \sin \omega t I_m \sin (\omega t - \varphi) = \frac{k_1}{r_d} \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi - \frac{k_1}{r_d} \frac{U_m I_m}{2} \cos (2\omega t - \varphi).$$

Среднее значение вращающего момента M за период T равно постоянной составляющей m , т. е. его первому члену:

$$M = \frac{1}{T} \int_0^T m dt = \frac{k_1}{r_d} UI \cos \varphi = \frac{k_1}{r_d} P.$$

Вращающий момент M вызывает поворот подвижной части ваттметра на угол α , при котором он уравновешивается противодействующим моментом пружин. Противодействующий момент пропорционален углу закручивания пружин

$$M_{\text{пр}} = k_2 \alpha,$$

где k_2 — коэффициент пропорциональности, так что $M = M_{\text{пр}}$ или

$$k_1 P / r_d = k_2 \alpha,$$

откуда

$$\alpha = k_1 P / (k_2 r_d) = k_3 P,$$

где $k_3 = k_1 / k_2 r_d$ — коэффициент пропорциональности.

Таким образом, отклонение стрелки прибора пропорционально активной мощности, которая определяется током последовательной обмотки ваттметра и напряжением на его параллельной цепи и сдвигом фаз между ними. Ваттметр, включенный по схеме рис. 10-27, б, измеряет мощность приемника и мощность потерь в последовательной катушке ваттметра, так как напряжение на параллельной цепи ваттметра больше напряжения приемника U из-за падения напряжения на последовательной катушке U_I . Ваттметр, включенный по схеме рис. 10-28, измеряет мощность приемника и мощность потерь в параллельной цепи ваттметра, так как ток в последовательной обмотке ваттметра больше тока I приемника вследствие ответвления тока I_U . Мощность потерь в обмотках ваттметра мала (1—3 Вт) и обычно ею пренебрегают.

Изменение фазы тока в одной из обмоток ваттметра на угол π или на половину периода вызывает изменение направления вращающегося момента и направления отклонения стрелки. Для облегчения правильной сборки схемы зажим последовательной обмотки ваттметра, соединяемый с источником питания, называется генераторным. Зажим параллельной цепи ваттметра, соединяемый с токовой обмоткой ваттметра, также называется генераторным. Генераторные зажимы отмечаются звездочками.

Электродинамический ваттметр для измерения реактивной мощности отличается от ваттметра активной мощности тем, что ток в его параллельной катушке сдвинут по фазе относительно напряжения на параллельной цепи на угол 90° . Вследствие этого угол сдвига между

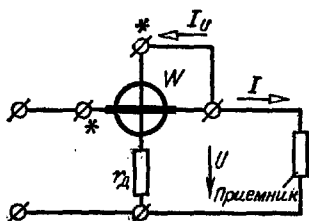


Рис. 10-28. Вторая схема включения ваттметра.

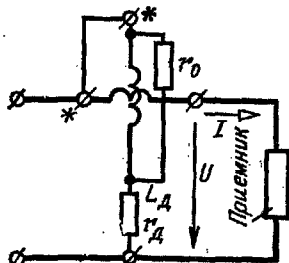


Рис. 10-29. Схема электродинамического ваттметра реактивной мощности.

токами в параллельной и последовательной катушках ваттметра равен не φ , а $90^\circ - \varphi$, и среднее значение вращающегося момента

$$M = k_4 UI \cos(90^\circ - \varphi) = k_4 UI \sin \varphi = k_4 Q,$$

т. е. пропорционально реактивной мощности. Угол поворота подвижной части ваттметра также пропорционален реактивной мощности.

Для получения сдвига фаз на 90° параллельную катушку шунтируют активным сопротивлением r_0 (рис. 10-29) и последовательно с разветвлением включают добавочную катушку r_d, L_d (рис. 10-29). Схема для получения сдвига фаз в 90° рассмотрена подробнее в § 11-10.

Ферродинамические приборы отличаются от электродинамических наличием стального магнитопровода, уменьшающего магнитное сопротивление цепи, в которой замыкается магнитный поток. Вследствие этого при малой н. с. получается большой магнитный поток, а следовательно, и большой вращающий момент.

10-10

Измерение угла сдвига фаз

Измеряя амперметром, вольтметром и ваттметром ток, напряжение и активную мощность цепи переменного тока, можно определить косинус угла сдвига фаз между напряжением и током по формуле

$$\cos \varphi = P/UI,$$

а угол φ (по модулю) — по его косинусу.

Этот способ измерения неудобен, так как требует одновременного отсчета по трем приборам и затраты времени на вычисления результатов измерения.

Угол сдвига фаз или его косинус измеряют обычно фазометром. Применяются электродинамические, ферродинамические и другие фазометры.

Электродинамический фазометр (рис. 10-30) состоит из неподвижной последовательной катушки и двух подвижных катушек напряжения. Катушки напряжения расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях и укреплены на одной оси со стрелкой прибора. Последовательно с одной из этих катушек включено активное добавочное сопротивление, последовательно с другой — индуктивное. Вследствие этого ток в первой из них практически совпадает по фазе с напряжением U , а во второй отстает от напряжения на угол 90° .

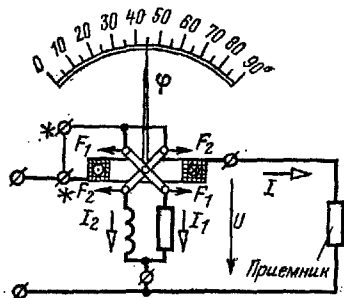


Рис. 10-30. Электродинамический фазометр.

В результате взаимодействия тока неподвижной катушки с токами I_1 и I_2 подвижных катушек возникают два вращающих момента, направленных противоположно друг другу. Фазометр в отличие от других приборов не имеет пружин для создания противодействующего момента. Поэтому под действием двух вращающих моментов подвижная часть прибора повернется на угол, при котором моменты уравновесятся. Можно показать, что угол поворота подвижной части (стрелки) зависит от угла сдвига фаз ϕ между напряжением U и током I приемника, так что на шкале прибора наносятся углы сдвига ϕ или $\cos \phi$.

Глава одиннадцатая

Расчет цепей синусоидального тока с применением комплексных чисел

11-1

Основные понятия

Для определения в произвольный момент времени t значения переменного тока i заданной частоты ω необходимо знать два числа, например амплитуду I_m и начальную фазу ψ . Действительно, зная I_m и ψ (а также ω), можно записать, что в любой момент времени

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Однако вместо двух вещественных чисел можно пользоваться одним комплексным числом. Применение комплекс-

ных чисел упрощает расчеты цепей переменного тока и находит широкое применение.

Комплексным числом или, короче, комплексом называется сумма вещественного числа L и мнимого $\sqrt{-M^2} = M \sqrt{-1}$, представляющего собой квадратный корень из отрицательного числа или произведение вещественного числа M и квадратного корня отрицательной единицы $\sqrt{-1}$, называемой мнимой единицей и обозначаемой в электротехнике буквой j .

Таким образом, комплексное число

$$L + \sqrt{-M^2} = L + \sqrt{-1} M = L + jM. \quad (11-1)$$

Вещественное число графически изображают отрезком на оси абсцисс x , которую называют осью вещественных величин или, короче, вещественной осью (рис. 11-1). Например, заданное вещественное положительное число K изобра-

жено на рис. 11-1 отрезком или вектором $\overline{OK}_1$ на положительной полуси вещественных величин.

Мнимое число графически изображают отрезком на оси ординат y , которую называют осью мнимых величин или, для краткости, мнимой осью, например, мнимое число jK на рис. 11-1 изображено вектором $\overline{OK}_2$ на положительной полуси мнимых величин.

Таким образом, мнимая единица j представляет собой по-

воротный множитель, при умножении на который вектор, изображающий вещественное число, поворачивается на угол 90° против направления движения часовой стрелки, т. е. в положительную сторону. Умножение на j мнимого числа или в общем случае комплексного числа также приводит к повороту изображающего вектора на 90° в том же направлении. Например, умножение на j поворачивает изображающий вектор $\overline{OK}_2$ на угол 90° в том же направлении и получается вектор $\overline{OK}_3$, изображающий отрицательное число $-K$, так как

$$j(jK) = j^2 K = -K;$$



Рис. 11-1. Графическое изображение вещественных и мнимых величин.

здесь принято во внимание, что по определению

$$j^2 = -1.$$

Третье умножение числа K на j дает отрицательное мнимое число.

$$j(j^2K) = j^3K = j^2jK = -jK,$$

т. е.

$$j^3 = -j,$$

и изображающий вектор вновь повернется на 90° и займет положение на отрицательной полуоси мнимых величин — вектор $\vec{OK}_4$ на рис. 11-1.

Четвертый поворот возвращает вектор в исходное положение, при этом

$$j^4 = j^2j^2 = (-1)(-1) = 1.$$

На рис. 11-2 комплексное число $A = L + jM$ изображено вектором A , проекция которого на вещественную ось равна его вещественной части $\operatorname{Re} A = A' = L$, а проекция на мнимую ось — мнимой части $\operatorname{Im} A = A'' = M$; таким образом, можно записать, что

$$A = A' + jA'' = \operatorname{Re} A + j \operatorname{Im} A, \quad (11-2)$$

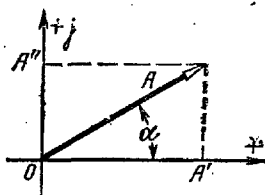


Рис. 11-2. Разложение вектора на составляющие, совпадающие по направлению с осями координат.

где Re и Im — обозначения вещественной и мнимой составляющих.

Положительные полуоси вещественных и мнимых величин обычно обозначают знаками «+» и «+j», как и показано на рис. 11-2 и последующих. Плоскость, на которой изображаются комплексные величины или числа, называют комплексной плоскостью.

Длина вектора A или модуль вектора

$$|A| = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2}. \quad (11-3)$$

Угол α , образованный вектором A и вещественной положительной полуосью и называемый аргументом вектора A , определяется через его тангенс:

$$\operatorname{tg} \alpha = A''/A' = \operatorname{Im} A / \operatorname{Re} A. \quad (11-4)$$

Положение вектора на комплексной плоскости определяется по знакам A' и A'' или величине α .

Итак, вектор, изображающий комплексную величину или число, определяется вещественной и мнимой частями или значениями модуля и аргумента.

Кроме рассмотренной алгебраической формы записи комплексных величин применяется еще тригонометрическая форма, при которой вещественная и мнимая части комплекса (11-2) выражаются через модуль и аргумент. Как видно на рис. 11-2,

$$A = A' + jA'' = |A| \cos \alpha + j |A| \sin \alpha = |A| (\cos \alpha + j \sin \alpha). \quad (11-5)$$

Применяется еще третья — показательная форма комплексных величин.

Комплексное число в показательной форме выражается произведением модуля и поворотного множителя $e^{j\alpha}$, т. е.

$$A = |A| (\cos \alpha + j \sin \alpha) = |A| e^{j\alpha}. \quad (11-6)$$

Из (11-6) следует, что поворотный множитель (формула Эйлера)

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha, \quad (11-7)$$

где $\operatorname{Re} e^{j\alpha} = \cos \alpha$ и $\operatorname{Im} e^{j\alpha} = \sin \alpha$.*

Поворотный множитель $e^{j\alpha}$ показывает, что вектор повернут относительно вещественной положительной полуоси на угол α против направления движения часовой стрелки. Отрицательному значению угла α соответствует поворот вектора по часовой стрелке.

Так как показатель степени должен быть отвлеченным числом, то угол α в выражении поворотного множителя должен выражаться в радианах. Однако ради большей наглядности допускается его условная запись в градусах.

Рассмотрим несколько характерных примеров вычислений с поворотным множителем, результаты которых полезно запомнить:

$$1) e^{j0} = \cos 0 + j \sin 0 = 1;$$

$$2) e^{j\pi/2} = e^{j90^\circ} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = 0 + j \cdot 1 = j;$$

* Для доказательства (11-7) найдем производную по α выражения $v = \cos \alpha + j \sin \alpha$. Производная $dv/d\alpha = -\sin \alpha + j \cos \alpha = j(\cos \alpha + j \sin \alpha) = jv$, откуда, разделив переменные $dv/v = j d\alpha$ и проинтегрировав левую и правую части, получим $\ln v = j\alpha + C$, где C — постоянная интегрирования.

При $\alpha = 0$, во-первых, $v = \cos 0 + j \sin 0 = 1$ и, во-вторых, $\ln v = C$, откуда $C = \ln 1 = 0$. Поэтому $\ln v = j\alpha$, т. е. $v = e^{j\alpha}$, что и требовалось доказать.

$$3) e^{-j\pi/2} = e^{-j90^\circ} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} - j \sin \frac{\pi}{2} = 0 - j \cdot 1 = -j;$$

$$4) e^{\pm j\pi} = e^{\pm j180^\circ} = (e^{j\pi/2})^2 = (j)^2 = -1.$$

11-2

Сложение и вычитание комплексных чисел

Для сложения и вычитания комплексных величин и чисел они записываются в алгебраической форме.

При сложении комплексных чисел складываются отдельно их вещественные и мнимые составляющие, например

$$A + B = (A' + jA'') + (B' + jB'') = (A' + B') + j(A'' + B'') = C' + jC'' = C. \quad (11-8)$$

Каждое комплексное число может быть представлено вектором, поэтому сложению комплексных чисел соответствует сложение векторов.

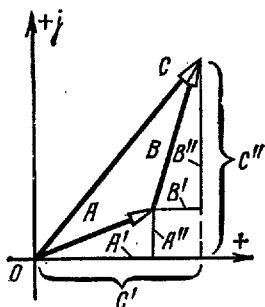


Рис. 11-3. Сложение двух векторов.

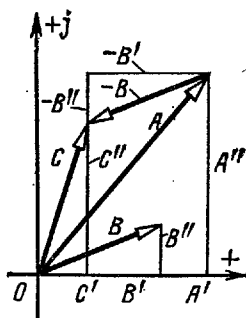


Рис. 11-4. Вычитание двух векторов.

Составляющая суммарного вектора, направленная по одной из осей, равна алгебраической сумме составляющих, направленных по той же оси (рис. 11-3), т. е. $C' = A' + B'$ и $C'' = A'' + B''$.

При вычитании комплексных чисел вычитаются отдельно их вещественные и мнимые составляющие, например

$$A - B = (A' + jA'') - (B' + jB'') = (A' - B') + j(A'' - B'') = C' + jC'' = C. \quad (11-9)$$

Вычитание комплексных чисел может быть заменено сложением уменьшаемого числа с вычитаемым, взятым

с обратным знаком, что следует из выражения

$$C = A - B = A + (-B),$$

или

$$C = (A' + jA'') + (-B' - jB'') = (A' - B') + j(A'' - B'') = C' + jC''.$$

Следовательно, вычитание векторов, представляющих комплексные величины, можно заменить сложением уменьшаемого вектора с вычитаемым вектором, взятым с обратным знаком (рис. 11-4).

Пример 11-1. Определить сумму C чисел $A = 2 + j3$ и $B = 5 + j6$.

Решение. Сумма $C = A + B = 2 + j3 + 5 + j6 = 7 + j9$.

Пример 11-2. Определить сумму C комплексных чисел $A = 4 + j6$ и $B = -3 + j2$.

Решение. Сумма $C = 4 + j6 + (-3 + j2) = 4 - 3 + j(6 + 2) = 1 + j8$.

Пример 11-3. Определить разность C чисел $A = 80 + j90$ и $B = 50 - j30$.

Решение. Разность $C = A - B = 80 + j90 - 50 + j30 = 30 + j120$.

Пример 11-4. Определить сумму C чисел $A = 10e^{j45^\circ}$ и $B = 6e^{-j30^\circ}$.

Решение. Выразим комплексные числа в алгебраической форме:

$$A = 10e^{j45^\circ} = 10 \cos 45^\circ + j10 \sin 45^\circ = 7,07 + j7,07;$$

$$B = 6e^{-j30^\circ} = 6 \cos 30^\circ - j6 \sin 30^\circ = 5,2 - j3.$$

Складывая, получаем:

$$C = A + B = (7,07 + j7,07) + (5,2 - j3) = 12,27 + j4,07.$$

Модуль суммы

$$|C| = \sqrt{12,27^2 + 4,07^2} = 12,9.$$

Тангенс аргумента

$$\operatorname{tg} \alpha = C''/C' = 4,07/12,27 = 0,331; \quad \alpha = 18^\circ 20'.$$

Сумма, выраженная в показательной форме, $C = 12,9 e^{j18^\circ 20'}$.

11-3

Умножение и деление комплексных чисел

Умножение и деление комплексных чисел выполняется проще, если они записаны в показательной форме.

Перемножим два комплекса, заданные своими модулями $|A|$ и $|B|$ и аргументами α и β . Произведение их

$$|A|e^{j\alpha} |B|e^{j\beta} = |AB|e^{j(\alpha+\beta)} = |C|e^{j\gamma} = C, \quad (11-10)$$

откуда

$$|C| = |AB| \quad \text{и} \quad \gamma = \alpha + \beta. \quad (11-11)$$

Таким образом, произведение двух комплексов представляет собой новый комплекс, модуль которого равен произведению модулей, а аргумент — сумме аргументов перемножаемых комплексов.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Если один из множителей — положительное вещественное число b , то в результате умножения комплекса A или изображающего его вектора $A = |A| e^{j\alpha}$ на число b получается комплекс или вектор

$$C = |Ab| e^{j\alpha}, \quad (11-12)$$

направленный вдоль вектора A и равный по модулю произведению модуля вектора A и числа b .

2. Если один из множителей — поворотный множитель $e^{j\beta}$, то в результате умножения вектора $A = |A| e^{j\alpha}$ на $e^{j\beta}$ получается вектор

$$C = |A| e^{j(\alpha+\beta)}, \quad (11-13)$$

модуль которого равен модулю вектора A , а аргумент — сумме аргументов сомножителей.

3. Комплексные величины, имеющие одинаковые модули и равные по величине, но противоположные по знаку аргументы, называются сопряженными. Сопряженный комплекс отмечается звездочкой. Например, для комплекса $A = |A| e^{j\alpha}$ сопряженным будет:

$$\dot{A} = |A| e^{-j\alpha}. \quad (11-14)$$

Произведение сопряженных множителей равно квадрату модуля

$$C = A\dot{A} = |A| e^{j\alpha} |A| e^{-j\alpha} = |A|^2. \quad (11-15)$$

4. Комплексы A и $1/A$, произведение которых равно единице

$$A \frac{1}{A} = |A| e^{j\alpha} \frac{1}{|A|} e^{-j\alpha} = 1, \quad (11-16)$$

называются обратными.

Если сомножители заданы в алгебраической форме, например, $A = A' + jA''$ и $B = B' + jB''$, то их произведение

$$\begin{aligned} AB &= (A' + jA'')(B' + jB'') = A'B' + A'jB'' + \\ &+ jA''B' + j^2A''B'' = (A'B' - A''B'') + j(A'B'' + \\ &+ A''B') = C' + jC'' = C. \end{aligned}$$

Пример 11-5. Определить произведение комплексов $A = 15 e^{j40^\circ}$ и $B = 5$.

Решение. $C = AB = 15e^{j40^\circ} 5 = 75e^{j40^\circ}$.

Пример 11-6. Определить произведение комплексов $A = 30e^{j20^\circ}$ и $e^{j\beta} = e^{j15^\circ}$.

Решение. $C = Ae^{j\beta} = 30e^{j20^\circ} e^{j15^\circ} = 30e^{j35^\circ}$.

Пример 11-7. Определить произведение комплексов $A = 40e^{j10^\circ}$ и $B = 5e^{j25^\circ}$.

Решение. $C = AB = 40e^{j10^\circ} 5e^{j25^\circ} = 200e^{j35^\circ}$.

Пример 11-8. Определить произведение комплексов $A = 70e^{j30^\circ}$ и $B = 0,5e^{-j10^\circ}$.

Решение. $C = AB = 70e^{j30^\circ} 0,5e^{-j10^\circ} = 35e^{j20^\circ}$.

Пример 11-9. Определить произведение комплексов $A = 2 + j4$ и $B = 8 + j6$.

Решение. $C = AB = (2 + j4)(8 + j6) = (2 \cdot 8 - 4 \cdot 6) + j(2 \cdot 6 + 4 \cdot 8) = -8 + j44$.

Частное от деления комплекса $A = |A| e^{j\alpha}$ на комплекс $B = |B| e^{j\beta}$ равно произведению комплекса A и комплекса $1/B$ — обратного делителю B , таким образом,

$$\frac{A}{B} = A \frac{1}{B} = \left| \frac{A}{B} \right| e^{j(\alpha - \beta)} = |C| e^{j\gamma} = C, \quad (11-17)$$

откуда

$$|C| = |A/B| \quad \text{и} \quad \gamma = \alpha - \beta. \quad (11-18)$$

Таким образом, частное от деления одного комплекса на другой представляет собой новый комплекс, модуль которого равен частному от деления модулей, а аргумент равен разности аргументов делимого и делителя.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Если делитель — положительное вещественное число b , а делимое — комплекс $A = |A| e^{j\alpha}$, то частное является комплексом или вектором

$$C = |A/b| e^{j\alpha}, \quad (11-19)$$

направленным вдоль вектора A и равным по модулю частному от деления модуля A на число b .

2. Если делитель — поворотный множитель $e^{j\beta}$, а делимое — комплекс $Ae^{j\alpha}$, то частное будет комплексом или вектором

$$C = \frac{|A| e^{j\alpha}}{e^{j\beta}} = |A| e^{j(\alpha - \beta)} = |C| e^{j\gamma}, \quad (11-20)$$

повернутым относительно вектора A на угол $-\beta$ и равным по величине модулю делимого A .

Если делимое и делитель даны в алгебраической форме, то следует предварительно обе величины перевести в показательную форму или устранить мнимость в знаменателе, что достигается умножением числителя и знаменателя дроби на комплекс, сопряженный делителю:

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} &= \frac{A' + jA''}{B' + jB''} \cdot \frac{B' - jB''}{B' - jB''} = \frac{A'B' - A''B'' + jA''B' + A'B''}{(B')^2 + (B'')^2} = \\ &= \frac{A'B' + A''B''}{(B')^2 + (B'')^2} + j \frac{A''B' - A'B''}{(B')^2 + (B'')^2} = C' + jC'' = C. \quad (11-21)\end{aligned}$$

Пример 11-10. Определить частное C от деления $A = 80e^{j40^\circ}$ на $B = 4$.

Решение. $C = A/B = 80e^{j40^\circ}/4 = 20e^{j40^\circ}$.

Пример 11-11. Определить частное C от деления комплекса $A = 60e^{j70^\circ}$ на e^{j30° .

Решение.

$$C = \frac{A}{e^{j30^\circ}} = \frac{60e^{j70^\circ}}{e^{j30^\circ}} = 60e^{j70^\circ} e^{-j30^\circ} = 60e^{j(70^\circ - 30^\circ)} = 60e^{j40^\circ}.$$

Пример 11-12. Определить частное C от деления $A = 50e^{j30^\circ}$ на $B = 2,5e^{j50^\circ}$.

Решение.

$$C = \frac{A}{B} = \frac{50e^{j30^\circ}}{2,5e^{j50^\circ}} = 20e^{j(30^\circ - 50^\circ)} = 20e^{-j20^\circ}.$$

Пример 11-13. Определить частное C от деления комплексов $A = 2 + j4$ и $B = 0,8 + j0,4$.

Решение.

$$\begin{aligned}C &= \frac{A}{B} = \frac{2 + j4}{0,8 + j0,4} \cdot \frac{0,8 - j0,4}{0,8 - j0,4} = \\ &= \frac{2 \cdot 0,8 - j2 \cdot 0,4 + j4 \cdot 0,8 + j4(-j0,4)}{0,8^2 + 0,4^2} = \frac{2 \cdot 0,8 + 4 \cdot 0,4}{0,8} + \\ &\quad + j \frac{4 \cdot 0,8 - 2 \cdot 0,4}{0,8} = 4,0 + j3,0.\end{aligned}$$

11-4

Закон Ома в комплексной форме

Выше, в § 8-3, было установлено, что мгновенное значение синусоидального тока или напряжения можно изображать проекцией вращающегося вектора на неподвижную ось. Покажем теперь, что вращающиеся векторы, а следовательно, и изображаемые ими синусоидальные величины можно выражать комплексными числами.

Допустим, что требуется представить комплексом ток, амплитуда которого I_m , а начальная фаза ψ , т. е.

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi). \quad (11-22)$$

Изобразим на комплексной плоскости под углом ψ к вещественной положительной полуоси вектор длиной I_m (рис. 11-5). Если этот вектор $I_m e^{j\psi}$ вращать в положительном направлении с угловой скоростью ω , то мгновенное значение аргумента вектора будет $(\omega t + \psi)$, а мгновенное значение тока i изобразится проекцией вращающегося вектора $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$ на мнимую ось, это условно можно записать так:

$$i = \text{Im} [I_m e^{j(\omega t + \psi)}] = \text{Im} [I_m e^{j\psi} e^{j\omega t}].$$

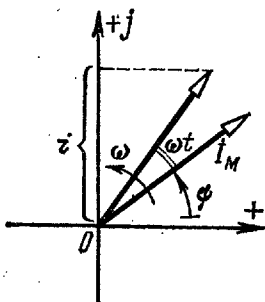


Рис. 11-5. Вектор тока на комплексной плоскости.

ток i (11-22) можно представить в символической записи комплексной величиной

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}, \quad (11-23)$$

где точка над буквой I_m означает, что эта комплексная величина и соответствующий вектор изображают синусоидально изменяющийся ток.

Учитывая, что на векторных диаграммах обычно откладывают не амплитудные, а действующие значения синусоидальных величин, комплекс тока запишем в виде

$$\dot{I} = I e^{j\psi} \quad (11-23a)$$

(отсутствие индекса «м» указывает на то, что записано действующее значение комплексной величины).

Аналогично выполняется символическая запись напряжения. Если

$$u = U_m \sin(\omega t + \alpha), \quad (11-24)$$

то комплекс напряжения

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\alpha} \quad \text{и} \quad \dot{U} = U e^{j\alpha}. \quad (11-25)$$

Частное от деления напряжения на зажимах цепи (ветви) в комплексной форме на ток, проходящий по ней, в комплексной форме, называется комплексным сопротивлением цепи и обозначается прописной буквой Z , т. е.

$$Z = \dot{U} / \dot{I} = \frac{U e^{j\alpha}}{I e^{j\psi}} = z e^{j(\alpha - \psi)} = z e^{j\varphi} \quad (11-26)$$

или

$$Z = z e^{j\varphi} = z \cos \varphi + j z \sin \varphi = r + jx, \quad (11-27)$$

где $r = z \cos \varphi$ — активное сопротивление; $x = z \sin \varphi$ — реактивное сопротивление.

Придав выражению (11-26) другой вид

$$\dot{I} = \dot{U} / Z, \quad (11-28)$$

получим уравнение, называемое законом Ома в комплексной форме

Например, при последовательном соединении активного сопротивления и индуктивности (рис. 9-15)

$$i = I_m \sin \omega t \quad \text{и} \quad u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

или в символической форме

$$\dot{I} = I e^{j0} = I \quad \text{и} \quad \dot{U} = U e^{j\varphi},$$

а комплексное сопротивление цепи

$$Z = \dot{U} / \dot{I} = U e^{j\varphi} / I = z e^{j\varphi} = z (\cos \varphi + j \sin \varphi); \quad (11-29)$$

так как для цепи с индуктивностью $x = x_L$, то

$$Z = r + jx_L = z e^{j\varphi}. \quad (11-29a)$$

Комплексное сопротивление и его вещественная и мнимая составляющие могут быть представлены на комплексной плоскости (рис. 11-6) в виде треугольника сопротивлений.

Следует обратить внимание на то, что точка над буквой Z не ставится; точка ставится только над комплексами, изображающими синусоидально изменяющиеся величины.

Модуль комплексного сопротивления, обозначаемый строчной буквой z , определяется по формуле (9-36)

$$z = \sqrt{r^2 + x_L^2},$$

а аргумент — через его косинус, синус или тангенс

$$\cos \varphi = r/z; \quad \sin \varphi = x_L/z; \quad \operatorname{tg} \varphi = x_L/r.$$

Из (11-29) и (11-29а) напряжение на зажимах цепи

$$\dot{U} = \dot{I}Z = \dot{I}r + \dot{I}jx_L = \dot{U}_a + \dot{U}_L.$$

Первое слагаемое этого выражения представляет собой комплексное напряжение на активном сопротивлении. Это напряжение совпадает по фазе с током (рис. 11-7) и, естественно, комплексы $\dot{I}r = Ir$ и $\dot{I} = I$ имеют одинаковый аргумент, равный нулю, так как начальная фаза тока выбрана равной нулю. Второе слагаемое — комплексное напряжение на индуктивности $\dot{I}jx_L = Ijx_L = Ix_Le^{j90^\circ}$, аргумент которого равен 90° , а у тока $\dot{I} = I$ аргумент равен нулю. Это означает, что напряжение на индуктивности опережает по фазе ток на

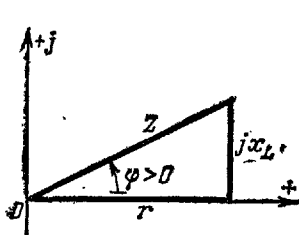


Рис. 11-6. Треугольник сопротивлений для цепи с r и L .

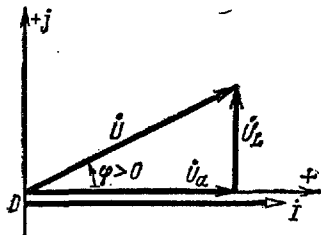


Рис. 11-7. Векторная диаграмма для цепи с r и L .

90° . Таким образом, множитель j в выражении $jx_L = j\omega L$ ясно показывает, что на индуктивности между напряжением и током имеет место сдвиг по фазе в 90° .

Для неразветвленной цепи с активным сопротивлением и емкостью (рис. 9-21) при $i = I_m \sin \omega t$ и $u = U_m \sin (\omega t + \varphi)$ комплексное сопротивление

$$Z = r + jx = r - jx_C = ze^{j\varphi}, \quad (11-30)$$

где $x = -x_C$; $z = \sqrt{r^2 + x_C^2}$; $\cos \varphi = r/z$; $\sin \varphi = -x_C/z$; $\operatorname{tg} \varphi = -x_C/r$.

Треугольник сопротивлений показан на рис. 11-8.

Напряжение на емкости

$$\dot{U}_C = -jx_C = x_C I e^{-j90^\circ}$$

отстает по фазе от тока на 90° (рис. 11-9). Напряжение на зажимах цепи

$$\dot{U} = \dot{I}Z = \dot{I}r - \dot{I}jx_C = \dot{U}_a + \dot{U}_C.$$

Следует обратить внимание на то, что комплекс Z не зависит от начальных фаз тока и напряжения. Например,

для цепи r и L при любой начальной фазе тока напряжение будет опережать ток цепи на угол φ , тангенс которого равен отношению x_L/r . Действительно, если выбрать у тока начальную фазу ψ [см. (11-22)], т. е. $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$, то напряжение [см. (11-24)] $u = U_m \sin(\omega t + \alpha)$ должно по-прежнему опережать ток на тот же угол φ , т. е. $\alpha = \psi + \varphi$ и комплексное сопротивление

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\alpha}}{Ie^{j\psi}} = \frac{U}{I} e^{j(\alpha-\psi)} = ze^{j\varphi}. \quad (11-31)$$

При расчетах разветвленных цепей часто применяют комплексные проводимости Y — величины, обратные комплексным сопротивлениям:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{ze^{j\varphi}} = \frac{1}{z} e^{-j\varphi} = ye^{-j\varphi} = \\ = y \cos \varphi - jy \sin \varphi = g - jb, \quad (11-32)$$

где $g = y \cos \varphi$ — активная проводимость; $b = y \sin \varphi$ — реактивная проводимость.

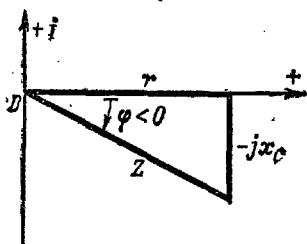


Рис. 11-8. Треугольник сопротивлений для цепи с r и C .

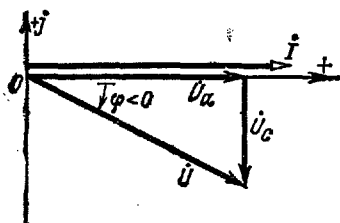


Рис. 11-9. Векторная диаграмма для цепи с r и C .

Например, для последовательной цепи с r и L комплексная проводимость (рис. 11-10)

$$Y = g - jb = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r + jx_L} = \frac{1}{r + jx_L} \frac{r - jx_L}{r - jx_L} = \frac{r - jx_L}{r^2 + x_L^2} = g - jb_L,$$

где активная проводимость g и индуктивная b_L определяются по известным уже выражениям

$$g = r/z^2; \quad b_L = x_L/z^2, \quad \text{а } z^2 = r^2 + x_L^2.$$

Модуль комплексной проводимости можно определить по известной формуле

$$y = \sqrt{g^2 + b_L^2},$$

а аргумент — через его синус, косинус или тангенс:

$$\sin \varphi = b/y = b_L/g; \quad \cos \varphi = g/y; \quad \operatorname{tg} \varphi = b/g = b_L/g,$$

откуда видно, что $\varphi > 0$, т. е. напряжение опережает по фазе ток.

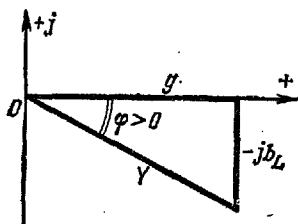


Рис. 11-10. Треугольник проводимостей для цепи с r и L .

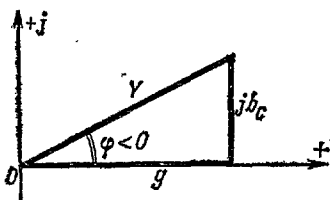


Рис. 11-11. Треугольник проводимостей для цепи с r и C .

Для последовательной цепи с r и C комплексная проводимость (рис. 11-11)

$$Y = g - jb = ye^{-j\varphi} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r - jx_C} = \frac{r + jx_C}{z^2} = g + jb_C,$$

где активная проводимость g и емкостная b_C определяются по известным уже выражениям

$$g = \frac{r}{z^2}; \quad b_C = \frac{x_C}{z^2}; \quad z^2 = r^2 + x_C^2.$$

Модуль комплексной проводимости

$$y = \sqrt{g^2 + b_C^2},$$

а аргумент определяется через синус, косинус или тангенс:

$$\sin \varphi = \frac{b}{y} = \frac{-b_C}{y}; \quad \cos \varphi = \frac{g}{y}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{g} = \frac{-b_C}{g},$$

откуда следует, что $\varphi < 0$, т. е. ток опережает по фазе напряжение.

Наконец, для цепи с r , L и C можно написать:

$$Z = r + jx_L - jx_C = r + j(x_L - x_C) = r + jx = ze^{j\varphi};$$

$$Y = \frac{1}{r + jx} = \frac{r - jx}{r^2 + x^2} = g - jb,$$

где активная и реактивная проводимости

$$g = \frac{r}{r^2 + x^2} = \frac{r}{z^2}; \quad b = \frac{x}{r^2 + x^2} = \frac{x_L - x_C}{z^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{r} = \frac{b}{g};$$

угол $\varphi > 0$ при $x > 0$ или при $b > 0$;

угол $\varphi < 0$ при $x < 0$ или при $b < 0$.

Пример 11-14. Неразветвленная цепь с активным сопротивлением $r = 3,2$ Ом и индуктивным $x_L = 2,4$ Ом находится под напряжением $u = 183 \sin(\omega t + 62^\circ)$ В. Определить ток в цепи.

Решение. Комплексное сопротивление

$$Z = r + jx_L = 3,2 + j2,4 \text{ Ом.}$$

Модуль и аргумент комплексного сопротивления

$$z = \sqrt{r^2 + x_L^2} = \sqrt{3,2^2 + 2,4^2} = 4 \text{ Ом;}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = x_L/r = 2,4/3,2 = 0,75; \quad \varphi = 37^\circ.$$

То же сопротивление в показательной форме

$$Z = ze^{j\varphi} = 4e^{j37^\circ} \text{ Ом.}$$

Комплексное напряжение

$$\dot{U} = \frac{183}{\sqrt{2}} e^{j62^\circ} = 130e^{j62^\circ} \text{ В.}$$

Ток в цепи

$$I = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{130e^{j62^\circ}}{4e^{j37^\circ}} = 32,5e^{j25^\circ} \text{ А;}$$

$$i = 32,5 \sqrt{2} \sin(\omega t + 25^\circ) \text{ А.}$$

Пример 11-15. Определить ток в цепи, пользуясь методом проводимостей, если напряжение на зажимах и параметры цепи те же, что и в примере 11-14.

Решение. Комплексная проводимость цепи

$$Y = \frac{r - jx_L}{z^2} = \frac{r}{z^2} - j \frac{x_L}{z^2} = g - jb_L = \frac{3,2}{16} - j \frac{2,4}{16} = 0,2 - j0,15 \text{ См;}$$

модуль ее

$$y = \sqrt{g^2 + b_L^2} = \sqrt{0,2^2 + 0,15^2} = 0,25 \text{ См}$$

и аргумент

$$\operatorname{tg} \varphi = b_L/g = 0,15/0,2 = 0,75; \quad \varphi = 37^\circ.$$

Комплексная проводимость цепи в показательной форме

$$Y = ye^{-j\varphi} = 0,25e^{-j37^\circ} \text{ См.}$$

Ток в цепи

$$I = \dot{U}Y = 130e^{j62^\circ} \cdot 0,25e^{-j37^\circ} = 32,5e^{j25^\circ} \text{ А.}$$

Пример 11-16. Неразветвленная цепь с активным сопротивлением $r = 80$ Ом и емкостным сопротивлением $x_C = 60$ Ом находится под напряжением $u = 183 \sin(\omega t + 25^\circ)$ В.

Определить ток в цепи.

Решение. Комплексное сопротивление

$$Z = r + jx = r - jx_C = 80 - j60 \text{ Ом;}$$

модуль и аргумент этого сопротивления

$$z = \sqrt{r^2 + x_C^2} = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100 \text{ Ом;}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = x/r = -x_C/r = -60/80 = -0,75; \quad \varphi = -37^\circ.$$

То же сопротивление в показательной форме

$$Z = ze^{j\varphi} = 100e^{-j37^\circ} \text{ Ом.}$$

Ток в цепи

$$I = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{130e^{j25^\circ}}{100e^{-j37^\circ}} = 1,3e^{j62^\circ} \text{ А;}$$

$$i = 1,3\sqrt{2} \sin(\omega t + 62^\circ) \text{ А.}$$

Пример 11-17. Определить ток в цепи, пользуясь методом проводимостей, если напряжение цепи и ее параметры те же, что и в примере 11-16.

Решение. Комплексная проводимость цепи

$$\begin{aligned} Y = g - jb &= g + jb_C = \frac{r - jx_C}{z^2} = \frac{r}{z^2} - j \frac{x_C}{z^2} = \\ &= \frac{80}{10\,000} - j \frac{60}{10\,000} = 0,008 - j0,006 \text{ См;} \end{aligned}$$

модуль ее

$$y = \sqrt{g^2 + b_C^2} = \sqrt{0,008^2 + 0,006^2} = 0,01 \text{ См}$$

и аргумент

$$\operatorname{tg} \varphi = b/g = -b_C/g = -0,006/0,008 = -0,75; \quad \varphi = -37^\circ.$$

Комплексная проводимость цепи в показательной форме

$$Y = ye^{-j\varphi} = 0,01e^{j37^\circ} \text{ См.}$$

Ток цепи

$$I = \dot{U}Y = 130e^{j25^\circ} \cdot 0,01e^{j37^\circ} = 1,3e^{j62^\circ} \text{ А.}$$

11-5 Мощность

Если ток и напряжение цепи выражены в комплексной форме, то активную и реактивную мощности цепи определяют, умножая комплексное напряжение на сопряженный комплексный ток.

Допустим, что $\dot{I} = I e^{j\psi}$, напряжение $\dot{U} = U e^{j\alpha} = U e^{j(\varphi + \psi)}$, т. е. вектор напряжения опережает вектор тока на угол φ , что при положительном значении угла φ соответствует индуктивной нагрузке.

Произведение комплекса напряжения и сопряженного комплекса тока представляет мощность в комплексной форме, которая в отличие от полной мощности S обозначается $\tilde{S}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^* &= U e^{j(\varphi + \psi)} I e^{-j\psi} = UI e^{j\varphi} = \\ &= UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ. \end{aligned} \quad (11-33)$$

Таким образом, вещественная часть полученного комплекса выражает активную мощность, а мнимая — реактивную мощность цепи. При емкостной нагрузке, т. е. при $\varphi < 0$ мнимая часть комплексной мощности имеет отрицательный знак.

Пример 11-18. Определить активную и реактивную мощности цепи, если напряжение $U = 220e^{j62^\circ}$ В, ток $I = 10e^{j25^\circ}$ А.

Решение.

$$\begin{aligned}\dot{U}I &= 220e^{j62^\circ} \cdot 10e^{-j25^\circ} = 2200e^{j37^\circ} = \\ &= 2200 \cos 37^\circ + j2200 \sin 37^\circ = \\ &= 220 \cdot 0,8 + j2200 \cdot 0,6 = 1760 + j1320 \text{ В} \cdot \text{А}; \\ P &= 1,760 \text{ кВт}; \quad Q = 1,320 \text{ квар}.\end{aligned}$$

11-6

Законы Кирхгофа

Введя комплексную форму записи для всех параметров, определяющих режим цепи переменного тока, можно геометрические операции над векторами заменить алгебраическими над изображающими их комплексами, а все соотношения и законы цепей постоянного тока формально применять к расчету цепей переменного тока.

В частности, при комплексной форме записи известные методы расчета цепей постоянного тока (метод контурных токов, метод узлового напряжения, метод преобразования и др.) применимы и для расчета цепей переменного тока.

Для узла электрической цепи переменного тока по первому закону Кирхгофа сумма мгновенных значений токов, направленных к узлу, равна сумме мгновенных значений токов, направленных от узла. То же самое правило справедливо и при записи токов в комплексной форме.

Например, для узла A (рис. 11-12) получим первый закон Кирхгофа в комплексной форме

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_3 + \dot{I}_5 = \dot{I}_2 + \dot{I}_4, \quad (11-34)$$

т. е. сумма комплексных токов, направленных к узлу, равна сумме комплексных токов, направленных от него.

Считая токи, направленные к узлу, положительными, а токи, направленные от узла, отрицательными, можно

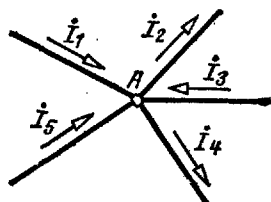


Рис. 11-12. Узел электрической цепи.

написать и так:

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = 0, \quad (11-35)$$

или в общем виде

$$\Sigma I = 0, \quad (11-36)$$

т. е. алгебраическая сумма комплексных токов, сходящихся в узле, равна нулю. Уравнение (11-36) по виду ничем не отличается от уравнения (2-2), выражающего то же правило для цепи постоянного тока.

Для замкнутого контура электрической цепи переменного тока по второму закону Кирхгофа алгебраическая сумма мгновенных значений э. д. с., действующих в контуре, равна алгебраической сумме мгновенных значений падений напряжения на отдельных его участках.

Приписав э. д. с. и токам, совпадающим по направлению с направлением обхода контура, знак «+», а несовпадающим — знак «-», получим при комплексной записи для любого замкнутого контура

$$\begin{aligned} \Sigma \dot{E} &= \Sigma (\dot{I}Z) = \Sigma (\dot{I}r + \dot{I}jx_L - \dot{I}jx_C) = \\ &= \Sigma \left(\dot{I}r + \dot{I}j\omega L - \dot{I}j \frac{1}{\omega C} \right), \end{aligned} \quad (11-37)$$

где к числу э. д. с. $\dot{E}$ относятся только э. д. с. источников, так как э. д. с. самоиндукции учитываются соответствующими падениями напряжения ($\dot{I}jx_L = \dot{I}j\omega L$). Таким образом, для всякого замкнутого контура алгебраическая сумма комплексных э. д. с. равна алгебраической сумме комплексных падений напряжений.

Последнее уравнение называется вторым законом Кирхгофа в комплексной форме. Оно также совпадает по виду с уравнением для цепи постоянного тока (2-3). Как и в цепях постоянного тока для записи уравнений по законам Кирхгофа необходимо задаться положительными направлениями токов.

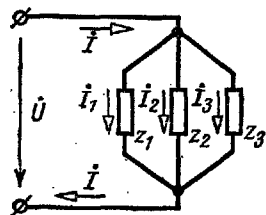


Рис. 11-13. Схема к примеру 11-19.

Пример 11-19. Определить ток $\dot{I}$ в неразветвленной части цепи (рис. 11-13), если токи в ветвях $i_1 = 14 \sin(\omega t + 66^\circ)$ А; $i_2 = 6,36 \sin(\omega t + 116,5^\circ)$ А; $i_3 = 8,3 \sin(\omega t - 59^\circ)$ А.

Решение. Определим комплексы токов в ветвях

$$I_1 = \frac{14}{\sqrt{2}} e^{j66^\circ} = \frac{14}{\sqrt{2}} (\cos 66^\circ + j \sin 66^\circ) = (4 + j9) \text{ A};$$

$$I_2 = \frac{6,36}{\sqrt{2}} e^{j116,5^\circ} = \frac{6,36}{\sqrt{2}} (\cos 116,5^\circ + j \sin 116,5^\circ) = (-2 + j4) \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{8,3}{\sqrt{2}} e^{-j59^\circ} = \frac{8,3}{\sqrt{2}} [\cos (-59^\circ) + j \sin (-59^\circ)] = (3 - j5) \text{ A}.$$

Комплекс тока в неразветвленной части цепи

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 4 + j9 - 2 + j4 + 3 - j5 = 5 + j8 \text{ A}.$$

Мгновенное значение тока

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi),$$

$$\text{где } I_m = I\sqrt{2} = \sqrt{5^2 + 8^2} \sqrt{2} = 9,44 \sqrt{2};$$

$$\operatorname{tg} \psi = 8/5 \quad \text{и} \quad \psi = 58^\circ;$$

таким образом,

$$i = 9,44 \sqrt{2} \sin(\omega t + 58^\circ) \text{ A}.$$

11-7

Расчет цепей с последовательно и параллельно соединенными сопротивлениями

Для неразветвленной цепи, например с четырьмя участками (рис. 11-14), по второму закону Кирхгофа комплексная э. д. с. источника питания равна алгебраической сумме комплексных падений напряжений

$$\dot{E} = \dot{I}Z_1 + \dot{I}Z_2 + \dot{I}Z_3 + \dot{I}Z_4.$$

Так как ток на всех участках неразветвленной цепи одинаков, то

$$\dot{E} = \dot{I}(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4),$$

откуда

$$\dot{E}/\dot{I} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = Z_s, \quad (11-38)$$

т. е. комплексное эквивалентное или общее сопротивление неразветвленной цепи равно сумме всех комплексных сопротивлений этой цепи.

При заданных параметрах участков (рис. 11-14)

$$\begin{aligned} Z &= r_1 + jx_{L1} + r_2 - jx_{C2} + r_3 + jx_{L3} + r_4 - jx_{C4} = \\ &= (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + j(x_{L1} + x_{L3} - x_{C2} - x_{C4}) = r_s + jx_s. \end{aligned}$$

Ток в цепи

$$\dot{I} = \dot{U}/Z_s.$$

Напряжения на отдельных участках

$$\dot{U}_1 = iZ_1; \dot{U}_2 = iZ_2; \dot{U}_3 = iZ_3; \dot{U}_4 = iZ_4.$$

Напряжение на зажимах цепи

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 + \dot{U}_4.$$

Комплексная мощность цепи определяется по формуле (11-33)

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^* = P + jQ.$$

По первому закону Кирхгофа комплексный ток в неразветвленной части цепи, имеющей, например, три параллель-

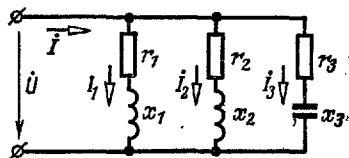
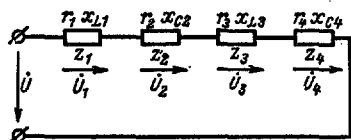


Рис. 11-14. Неразветвленная цепь.

Рис. 11-15. Разветвленная цепь.

ные ветви (рис. 11-15), равен алгебраической сумме комплексных токов всех ветвей цепи, т. е.

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3.$$

По закону Ома токи в ветвях и общий ток

$$\dot{I}_1 = \dot{U}/Z_1; \dot{I}_2 = \dot{U}/Z_2; \dot{I}_3 = \dot{U}/Z_3; \dot{I} = \dot{U}/Z_0.$$

Подставив выражения токов в предыдущее равенство, получим:

$$\dot{U}/Z_0 = \dot{U}/Z_1 + \dot{U}/Z_2 + \dot{U}/Z_3,$$

или, после сокращения,

$$1/Z_0 = 1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3.$$

Переходя к комплексным проводимостям, найдем, что

$$Y_0 = Y_1 + Y_2 + Y_3, \quad (11-39)$$

т. е. комплексная эквивалентная или общая проводимость разветвленной цепи равна сумме комплексных проводимостей всех параллельных ветвей.

В частном случае для часто встречающейся цепи с двумя параллельными ветвями можно написать:

$$1/Z_0 = 1/Z_1 + 1/Z_2 \text{ или } Z_0 = Z_1 Z_2 / (Z_1 + Z_2). \quad (11-40)$$

Пример 11-20. Определить эквивалентное сопротивление неразветвленной цепи, если сопротивления участков $r_1 = 5 \text{ Ом}$; $x_{L1} = 21 \text{ Ом}$; $r_2 = 4 \text{ Ом}$; $x_{C2} = 15 \text{ Ом}$; $r_3 = 3 \text{ Ом}$ и $x_{L3} = 10 \text{ Ом}$.

Решение. Комплексные сопротивления участков

$$Z_1 = 5 + j21 \text{ Ом}; \quad Z_2 = 4 - j15 \text{ Ом} \quad \text{и} \quad Z_3 = 3 + j10 \text{ Ом}.$$

Эквивалентное сопротивление цепи

$$Z_0 = Z_1 + Z_2 + Z_3 = 5 + j21 + 4 - j15 + 3 + j10 = 12 + j16 = 20e^{j53^\circ} \text{ Ом}.$$

Пример 11-21. Определить эквивалентное сопротивление двух параллельных ветвей, если $Z_1 = 1 - j0,5 \text{ Ом}$ и $Z_2 = 1 + j0,5 \text{ Ом}$.

Решение. Эквивалентное сопротивление

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(1 - j0,5)(1 + j0,5)}{1 - j0,5 + 1 + j0,5} = \\ &= \frac{1 + j0,5 - j0,5 + 0,25}{2} = 0,625 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

11-8

Расчет последовательно-параллельных и сложных цепей

Расчет режима цепи с последовательно-параллельным (смешанным) соединением сопротивлений (рис. 11-16) при заданном напряжении на зажимах U и известных параметрах цепи заключается в определении токов, напряжений и мощностей всех участков цепи. Если применить комплексный метод, то расчет таких цепей аналогичен расчету цепи постоянного тока с последовательно-параллельным соединением сопротивлений (§ 2-4).

Для цепи (рис. 11-16) расчет выполняется в следующем порядке.

Определяется сопротивление разветвленной части цепи

$$Z_{12} = Z_1 Z_2 / (Z_1 + Z_2).$$

Так как разветвленная часть цепи соединена последовательно с неразветвленным участком, то сопротивление всей цепи

$$Z = Z_3 + Z_{12}.$$

Ток в неразветвленной части цепи, равный сумме токов в параллельных ветвях,

$$I_3 = \dot{U} / Z.$$

Напряжение на неразветвленном участке Z_3

$$\dot{U}_3 = I_3 Z_3.$$

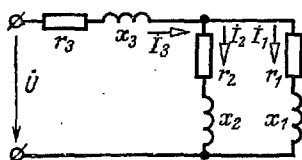


Рис. 11-16. Цепь со смешанным соединением сопротивлений.

Напряжение на параллельных ветвях

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dot{I}_3 Z_{12}.$$

Токи в параллельных ветвях

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 / Z_1; \quad \dot{I}_2 = \dot{U}_2 / Z_2.$$

Активные и реактивные мощности определяются по формуле (11-33).

В § 11-6 уже отмечалось, что применение комплексного метода позволяет для расчета цепей переменного тока пользоваться всеми методами расчета сложных цепей постоянного тока, рассмотренными в гл. 2.

В качестве иллюстрации рассмотрим применение метода узлового напряжения на примере цепи с двумя генераторами.

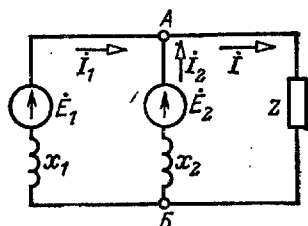


Рис. 11-17. Схема к примеру 11-22.

Пример 11-22. Определить токи во всех участках цепи (рис. 11-17), если э. д. с. генераторов $e_1 = 284 \sin \omega t$ В

и $e_2 = 298 \sin \omega t$ В. Направления э. д. с. указаны стрелками. Внутренние сопротивления генераторов индуктивные $x_1 = x_2 = 0,1$ Ом. Сопротивление нагрузки $Z = r + jx = 1 + j0,5$ Ом.

Решение. Проводимости участков цепи

$$Y_1 = Y_2 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{jx_1} = \frac{1}{j0,1} = \frac{1}{j0,1} - j = -j10 \text{ См};$$

$$Y_3 = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r + jx} = \frac{1}{1 + j0,5} \frac{1 - j0,5}{1 - j0,5} = 0,8 - j0,4 \text{ См}.$$

Комплексные э. д. с.

$$\dot{E}_1 = 284 / \sqrt{2} = 220 \text{ В}; \quad \dot{E}_2 = 298 / \sqrt{2} = 210 \text{ В}.$$

Напряжение между узлами АБ

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AB} = \dot{U} &= \frac{\sum (\dot{E} Y)}{\sum Y} = \frac{\dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_2 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \\ &= \frac{200 (-j10) + 210 (-j10)}{-j10 - j10 + 0,8 - j0,4} = 200,66 - j7,87 \text{ В}. \end{aligned}$$

Комплексные токи в участках цепи

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}}{Z_1} = \frac{200 - 200,66 + j7,87}{j0,1} = 78,7 + j6,6 = 78,8 e^{j4^\circ 50'} \text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2 - \dot{U}}{Z_2} = \frac{210 - 200,66 + j7,87}{j0,1} = 78,7 - j93,4 = 122 e^{-j50^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 78,7 + j6,6 + 78,7 - j93,4 = 157,4 - j86,8 = 180 e^{-j39^\circ} \text{ А}.$$

$$i_1 = 111,4 \sin(\omega t + 4^\circ 50') \text{ A};$$

$$i_2 = 172,6 \sin(\omega t - 50^\circ) \text{ A};$$

$$i = 254 \sin(\omega t - 39^\circ) \text{ A}.$$

11-9

Топографическая диаграмма

Напряжение на зажимах цепи переменного тока или на любом из ее участков можно выразить комплексным числом — комплексным напряжением и изобразить на комплексной плоскости вектором. Напряжение между двумя точками электрической цепи представляет собой разность потенциалов между этими точками. Следовательно, потенциалы отдельных точек цепи также можно представить комплексами — комплексными потенциалами и изображать соответствующими векторами. Вектор, изображающий комплексный потенциал, начинается в начале координат; его конец обозначают той же буквой (или цифрой), что и точку цепи, потенциал которой изображает вектор. Например, на рис. 11-18 построены векторы комплексных потенциалов $\dot{\varphi}_a = 10 + j20 \text{ В}$ и $\dot{\varphi}_b = 30 - j15 \text{ В}$ и разность векторов или вектор напряжения $\dot{U}_{ab} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b = 10 + j20 - 30 + j15 = -20 + j35 \text{ В}$.

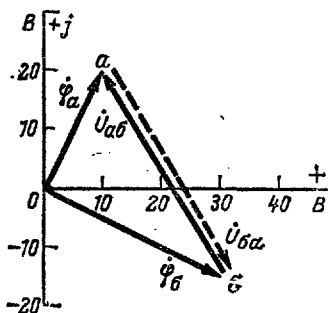


Рис. 11-18. Комплексные потенциалы.

Напряжение $\dot{U}_{ab}$ построено по правилу вычитания векторов, так что $\dot{\varphi}_a = \dot{\varphi}_b + \dot{U}_{ab}$ (рис. 11-18). Поэтому напряжение $\dot{U}_{ab}$ изображается вектором, направленным от точки b (второй индекс у напряжения $\dot{U}_{ab}$) к точке a (первый индекс).

Напряжение $\dot{U}_{ba} = \dot{\varphi}_b - \dot{\varphi}_a = 30 - j15 - 10 - j20 = 20 - j35 \text{ В}$. Очевидно, $\dot{U}_{ba} = -\dot{U}_{ab}$ и изображается вектором, направленным от точки a к точке b (рис. 11-18).

Такая векторная диаграмма называется топографической; она удовлетворяет двум условиям: 1) каждой точке электрической цепи соответствует определенная точка на векторной диаграмме и 2) вектор, проведенный из начала координат в какую-либо точку диаграммы, изображает комплексный потенциал соответствующей точки цепи.

При построении топографической диаграммы потенциал одной из точек цепи принимают равным нулю и на диаграмме точку нулевого потенциала совмещают с началом координат. На такой диаграмме отрезок, соединяющий любые две точки, также определяет комплексное напряжение между соответствующими точками цепи.

На рис. 11-19,а представлена неразветвленная цепь. Для построения топографической диаграммы (рис. 11-19,б) примем, например, потенциал точки d равным нулю, т. е. $\phi_d = 0$. Обходя контур в направлении, встречном току, определим потенциалы всех точек цепи.

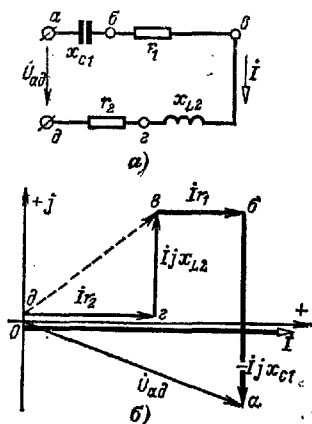


Рис. 11-19. Неразветвленная электрическая цепь (а) и ее топографическая диаграмма (б).

Начальную фазу общего тока примем равной нулю, т. е. $i = I$, и поэтому вектор тока i направлен вдоль вещественной положительной полуоси. Потенциал точки z , или ϕ_z , выше потенциала ϕ_d на величину падения напряжения в сопротивлении r_2 , т. е. на $I r_2$ или $\phi_z = \phi_d + I r_2 = 0 + I r_2 = I r_2$. Построив вектор $I r_2$, получим на диаграмме точку z . Потенциал точки $б$ или $\phi_б$ больше потенциала ϕ_z на величину падения напряжения на индуктивном сопротивлении x_{L2} или в комплексной форме на $I j x_{L2}$.

Построив вектор напряжения $\dot{U}_{zg} = \phi_г - \phi_z = I j x_{L2}$, начинающийся в точке z и опережающий ток по фазе на 90° , получим точку $б$. Потенциал точки $б$ или $\phi_б$ больше $\phi_з$ на падение напряжения $I r_1$. Построив из точки $б$ вектор напряжения $\dot{U}_{бг} = \phi_г - \phi_б = I r_1$, параллельный току, находим точку $г$. Наконец, построив вектор напряжения $\dot{U}_{га} = \phi_a - \phi_г = -I j x_{C1}$, начинающийся в точке $г$ и отстающий по фазе от тока на угол 90° , получим точку $а$ (рис. 11-19,б). Вектор, соединяющий точки d и $а$ и направленный от точки d к точке $а$, изображает напряжение $\dot{U}_{ad}$ на зажимах цепи.

Необходимо учесть, что векторы напряжений на топографической диаграмме имеют направления, обратные положительным направлениям напряжений относительно соответствующих точек цепи.

Например, напряжение $\dot{U}_{ed} = \dot{\phi}_e - \dot{\phi}_d$, направленное на схеме (рис. 11-19, а) от точки e к точке d по направлению тока, на топографической диаграмме имеет противоположное направление относительно этих точек, что согласуется с правилом вычитания векторов, согласно которому вектор разности всегда направлен в одну сторону с уменьшаемым вектором.

11-10

Получение угла сдвига фаз между напряжением и током в 90°

В ряде электрических цепей и, в частности, в некоторых измерительных приборах необходимо получить заданный угол сдвига фаз между напряжением на зажимах цепи и током в одной из ее ветвей. Одна из подобных схем для получения угла сдвига фаз в 90° показана на рис. 11-20, а на рис. 11-21 дана векторная диаграмма этой цепи.

На этой диаграмме, а также на последующих оси координат не изображены. Изображение осей не обязательно, так как

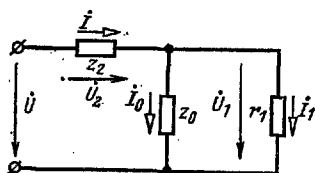


Рис. 11-20. Схема для получения сдвига в 90° между напряжением и током.

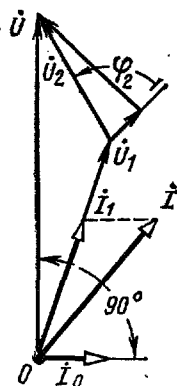


Рис. 11-21. Векторная диаграмма цепи, изображенной на рис. 11-20.

важны сдвиги по фазе между отдельными величинами и начальная фаза любой из них может быть выбрана равной нулю.

Для решения вопроса о том, как получить угол сдвига в 90° между напряжением цепи $\dot{U}$ и током $\dot{I}_0$ в ветви с сопротивлением Z_0 , сначала найдем зависимость между $\dot{U}$ и $\dot{I}_0$.

Напряжение на параллельных ветвях одинаково, поэтому

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 r_1 = \dot{I}_0 Z_0,$$

откуда

$$I_1 = I_0 Z_0 / r_1.$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$I = I_0 + I_1 = I_0 + I_0 \frac{Z_0}{r_1} = I_0 \frac{r_1 + Z_0}{r_1}.$$

Напряжение на зажимах цепи

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = I_0 Z_0 + I_0 \frac{r_1 + Z_0}{r_1} Z_2 = I_0 \left(Z_0 + \frac{r_1 + Z_0}{r_1} Z_2 \right).$$

Найдем отношение напряжения $\dot{U}$ к току $\dot{I}_0$, представляющее собой комплексную величину

$$\begin{aligned} \frac{\dot{U}}{\dot{I}_0} &= Z_0 + \frac{r_1 + Z_0}{r_1} Z_2 = r_0 + jx_0 + \frac{(r_1 + r_0 + jx_0)(r_2 + jx_2)}{r_1} = \\ &= \frac{r_0 r_1 + jx_0 r_1 + r_1 r_2 + r_0 r_2 + jx_0 r_2 + r_1 jx_2 + r_0 jx_2 - x_0 x_2}{r_1} = \\ &= \frac{r_0 r_1 + r_1 r_2 + r_0 r_2 - x_0 x_2}{r_1} + j \frac{x_0 r_1 + x_0 r_2 + r_1 x_2 + r_0 x_2}{r_1}. \end{aligned}$$

Для получения угла сдвига между напряжением $\dot{U}$ и током $\dot{I}_0$ в 90° необходимо, чтобы эта комплексная величина имела только мнимую составляющую (как комплексное сопротивление индуктивности или емкости, на которых напряжение и ток сдвинуты по фазе на 90°).

Приравняв нулю вещественную составляющую

$$\frac{r_0 r_1 + r_1 r_2 + r_0 r_2 - x_0 x_2}{r_1} = 0,$$

найдем, что

$$r_1 (r_0 + r_2) = x_0 x_2 - r_0 r_2,$$

откуда

$$r_1 = \frac{x_0 x_2 - r_0 r_2}{r_0 + r_2}. \quad (11-41)$$

Если сопротивления r_0 , x_0 , r_2 и x_2 известны, то по (11-41) можно определить активное сопротивление r_1 , которым необходимо шунтировать катушку с сопротивлением Z_0 для получения сдвига по фазе в 90° между напряжением $\dot{U}$ и током $\dot{I}_0$.

11-11

Индуктивно-связанные цепи

Последовательное соединение. Рассмотрим особенности расчета цепей, в которых есть индуктивно- или магнитно-связанные катушки. Начнем с простейшей цепи, состоящей

из двух последовательно соединенных катушек (рис. 11-22, а). В этом случае, как было показано в § 6-10, возможно их согласное или встречное включение.

При согласном включении магнитный поток первой катушки Φ_{11} и часть магнитного потока второй катушки, пронизывающая первую Φ_{21} , суммируются. Следовательно,

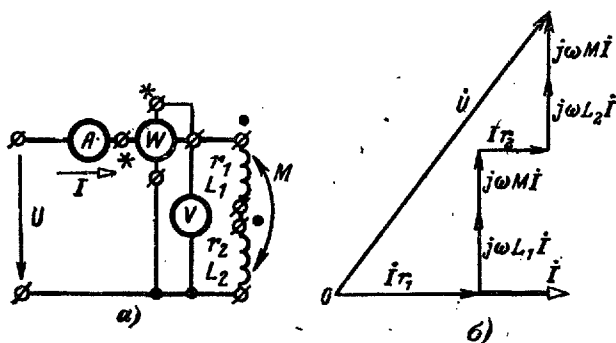


Рис. 11-22. Последовательное согласное соединение катушек (а) и их векторная диаграмма (б).

суммируются и возбуждаемые ими э. д. с. индукции e_{11} и взаимной индукции e_{M1} , соответственно равные (§ 6-10)

$$e_{L1} = -d\Psi_{11}/dt = -L_1 di_1/dt$$

и

$$e_{M1} = -d\Psi_{21}/dt = -M di_2/dt,$$

где при последовательном соединении $i_1 = i_2 = i$.

Напряжение u_1 на зажимах первой катушки при согласном соединении состоит из трех слагающих:

$$u_1 = r_1 i + L_1 di/dt + M di/dt$$

или в комплексной форме

$$\dot{U}_1 = r_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I}. \quad (11-42)$$

Уравнение (11-42) записано так же, как и уравнение по второму закону Кирхгофа в комплексной форме (11-37), только слева вместо э. д. с. источника питания стоит напряжение на зажимах, а справа дополнительно учтено падение напряжения, компенсирующее э. д. с. взаимной индукции.

Аналогично напряжение на зажимах второй катушки

$$u_2 = r_2 i + L_2 di/dt + M di/dt$$

или

$$\dot{U}_2 = r_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I}. \quad (11-43)$$

Напряжение на зажимах цепи

$$u = u_1 + u_2 = (r_1 + r_2) i + (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} + 2M \frac{di}{dt}$$

или

$$\dot{U} = r_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I} + r_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I}. \quad (11-44)$$

Векторная диаграмма цепи при последовательном согласном включении двух катушек показана на рис. 11-22, б.

Для того чтобы отличить на электрических схемах согласное включение от встречного, один из зажимов катушек называют началом, а другой — концом. У одной из катушек начало и конец могут быть выбраны произвольно. У второй катушки началом называют тот зажим, который надо присоединить к концу первой, чтобы получилось согласное соединение (или концом тот зажим, который надо присоединить к началу первой, чтобы получилось согласное соединение). Короче, можно сказать, что при согласном включении катушки соединены друг с другом разноименными зажимами или что при согласном соединении ток входит в одноименные зажимы. Начало катушек отмечается каким-либо знаком, например точкой (рис. 11-22, а), звездочкой и т. д.

При встречном включении катушек э. д. с. самоиндукции и взаимной индукции вычитаются. Поэтому напряжение на зажимах первой катушки

$$u_1 = r_1 i + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}$$

или

$$\dot{U}_1 = r_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I}. \quad (11-45)$$

Аналогично

$$\dot{U}_2 = r_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I} \quad (11-46)$$

и

$$\begin{aligned} \dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = r_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I} + \\ + r_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I}. \end{aligned} \quad (11-47)$$

Встречное включение получается, когда катушки соединены друг с другом одноименными зажимами (рис. 11-23, а). На рис. 11-23, б дана векторная диаграмма цепи при встречном включении катушек.

Суммарная (эквивалентная) индуктивность цепи и ее индуктивное сопротивление при согласном включении (11-44) больше, чем при встречном (11-47). При согласном соединении

$$L_c = L_1 + L_2 + 2M \quad (11-48)$$

и

$$x_c = \omega L_c = \omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M \quad (11-49)$$

при встречном соединении

$$L_B = L_1 + L_2 - 2M \quad (11-50)$$

и

$$x_B = \omega L_B = \omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M. \quad (11-51)$$

Если одноименные зажимы катушек неизвестны, то для расчета цепи необходимо предварительно провести разметку зажимов. Один из способов разметки зажимов заключается в следующем. Выберем у одной из катушек произвольно начало и конец. Присоединим к концу первой катушки

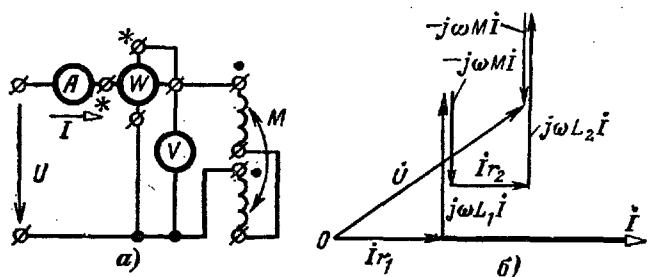


Рис. 11-23. Последовательное встречное соединение катушек (а) и векторная диаграмма (б).

любой из зажимов второй катушки, подключим цепь к источнику питания, например к сети переменного тока, и измерим напряжение U на зажимах цепи и ток $I = I_1$ в цепи. Затем к концу первой катушки присоединим другой зажим второй катушки и повторим измерения. При том же напряжении U на зажимах цепи ток I в цепи изменится и будет равен I_2 . Если $I_1 < I_2$, то первое соединение — согласное (к концу первой катушки присоединено начало второй), так как при согласном соединении суммарная индуктивность цепи больше и больше полное сопротивление цепи:

$$z_c = \sqrt{r^2 + x_c^2} > \sqrt{r^2 + x_B^2},$$

где $r = r_1 + r_2$.

Если $I_1 > I_2$, то второе соединение — согласное. Включение вольтметра и амперметра при этих двух спытах показано на рис. 11-22, а и 11-23, а. Ваттметр при разметке зажимов не нужен.

Отметим, что при проведении обоих опытов катушки нельзя перемещать в пространстве, так как взаимная индуктивность зависит от пространственного расположения катушек.

Понятия об одноименных и разноименных зажимах распространяются на любые индуктивно-связанные катушки независимо от места их включения в электрической цепи. Если катушки соединены не последовательно, то для разметки зажимов их надо отключить от цепи, соединить

последовательно (не перемещая в пространстве) и провести описанные выше два опыта.

В качестве примеров расчета электрических цепей рассмотрим воздушный трансформатор и параллельное соединение двух катушек.

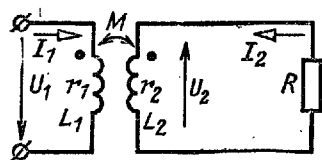


Рис. 11-24. Схема воздушного трансформатора.

Воздушный трансформатор.

Схема воздушного трансформатора, состоящего из двух индуктивно-связанных катушек (обмоток), одна из которых намотана на другую, показана на рис. 11-24. Обмотка трансформатора, присоединяемая к источнику питания с напряжением U_1 , называется первичной, другая, к которой подключается приемник, называется вторичной.

При холостом ходе трансформатора, т. е. при разомкнутой вторичной обмотке, ток $I_2 = 0$ и напряжение на зажимах первичной обмотки, как и для цепи с сопротивлением и индуктивностью,

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 r_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 = \dot{I}_1 Z_1, \quad (11-52)$$

где $Z_1 = r_1 + j\omega L_1$.

Так как вторичная обмотка разомкнута и ток $I_2 = 0$, то падение напряжения на активном r_2 и индуктивном ωL_2 сопротивлениях вторичной обмотки отсутствует. Следовательно, напряжение на зажимах вторичной цепи равно э. д. с. взаимной индукции, наведенной во вторичной обмотке током I_1 ,

$$\dot{U}_{2x} = \dot{E}_{2M} = -j\omega M \dot{I}_1. \quad (11-53)$$

Векторная диаграмма холостого хода дана на рис. 11-25.

Если вторичная цепь замкнута на сопротивление нагрузки R , то в ней проходит ток I_2 , возбуждающий магнитный

поток Φ_2 . В первичной обмотке наводится э. д. с. взаимной индукции

$$E_{1M} = -j\omega M \dot{I}_2.$$

Положительное направление этого тока может быть выбрано произвольно, например так, чтобы токи входили в одноименные зажимы (рис. 11-24). В этом случае, как и при последовательном соединении, надо считать, что э. д. с. самоиндукции и взаимной индукции суммируются и компенсирующие их напряжения записываются в уравнениях с одинаковыми знаками. Следовательно, напряжение на зажимах первичной цепи записывается аналогично (11-42):

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{I}_1 r_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \\ &= \dot{I}_1 Z_1 + j\omega M \dot{I}_2. \end{aligned} \quad (11-54)$$

Таким образом, напряжение $\dot{U}_1$ состоит из активной составляющей $\dot{I}_1 r_1$, совпадающей по фазе с током $\dot{I}_1$ (рис. 11-26), составляющей $j\omega L_1 \dot{I}_1$, опережающей по фазе ток $\dot{I}_1$ на 90° , и составляющей $j\omega M \dot{I}_2 = -\dot{E}_{1M}$, опережающей по фазе ток $\dot{I}_2$ на 90° .

Так как во вторичной цепи нет источника питания, то можно по второму закону Кирхгофа записать:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{I}_2 (r_2 + R) + j\omega L_2 \dot{I}_2 + \\ &+ j\omega M \dot{I}_1 = \dot{I}_2 Z_{22} + j\omega M \dot{I}_1, \end{aligned} \quad (11-55)$$

Рис. 11-26. Векторная диаграмма цепи, изображенной на рис. 11-24, при замкнутой вторичной цепи.

где $\dot{I}_2 R = \dot{U}_2$ — напряжение на зажимах вторичной обмотки и напряжение на присоединенной

к ней нагрузке R ; $Z_{22} = r_2 + j\omega L_2 + R$ — сопротивление вторичной цепи.

Электродвижущая сила взаимной индукции во вторичной обмотке

$$\dot{E}_{2M} = -j\omega M \dot{I}_1,$$

или из (11-55)

$$\dot{E}_{2M} = -j\omega M \dot{I}_1 = \dot{I}_2 Z_{22} = \dot{I}_2 (r_2 + R) + j\omega L_2 \dot{I}_2. \quad (11-56)$$

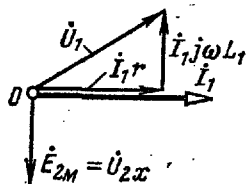


Рис. 11-25. Векторная диаграмма цепи, изображенной на рис. 11-24, при холостом ходе.

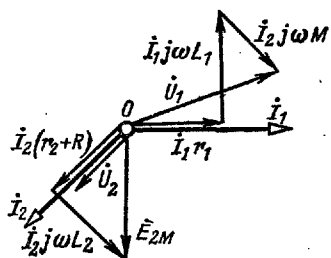


Рис. 11-26. Векторная диаграмма цепи, изображенной на рис. 11-24, при замкнутой вторичной цепи.

На диаграмме (рис. 11-26) показано, что э. д. с. E_{2M} отстает по фазе от тока I_1 на 90° и равна сумме падений напряжений на активных сопротивлениях r_2 и R и на индуктивности L_2 .

Из (11-56) определяется ток вторичной цепи

$$I_2 = -j\omega M \dot{I}_1 / Z_{22}. \quad (11-57)$$

Подставив это выражение тока I_2 в (11-54), для напряжения первичной цепи получим:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1 - j^2 \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} \dot{I}_1 = \dot{I}_1 \left(Z_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \right), \quad (11-58)$$

откуда определяется ток в первичной цепи

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1 Z_{22}}{Z_1 Z_{22} + \omega^2 M^2}. \quad (11-59)$$

Итак, при заданных параметрах цепи и напряжении источника питания можно рассчитать токи I_1 (11-59), а затем I_2 (11-57), после чего построить векторную диаграмму.

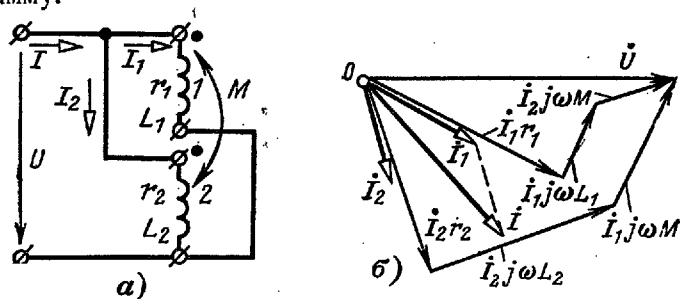


Рис. 11-27. Цепь с двумя параллельными индуктивно-связанными ветвями при согласном соединении (а) и ее векторная диаграмма (б).

Параллельное соединение индуктивно-связанных катушек. Возможны два случая параллельного соединения катушек одноименными (рис. 11-27, а) и разноименными (рис. 11-28, а) зажимами.

Выбрав положительные направления токов так, как показано на рис. 11-27, а и 11-28, а будем считать первое соединение согласным (токи входят в одноименные зажимы), а второе — встречным. Запишем выражения напряжений на каждой из параллельных ветвей при согласном соединении катушек (рис. 11-27, а).

Напряжение на первой ветви

$$u = i_1 r_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

или в комплексной записи

$$\dot{U} = \dot{I}_1 Z_1 + j\omega M \dot{I}_2, \quad (11-60)$$

Напряжение на второй ветви

$$\dot{U} = \dot{I}_2 Z_2 + j\omega M \dot{I}_1, \quad (11-61)$$

где $Z_1 = r_1 + j\omega L_1$ и $Z_2 = r_2 + j\omega L_2$.

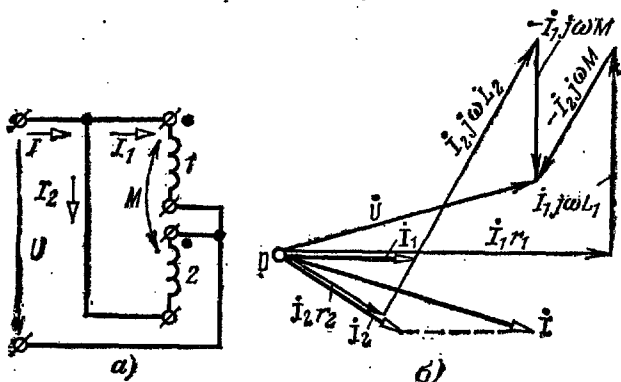


Рис. 11-28. Цепь с двумя параллельными индуктивно-связанными ветвями при встречном соединении (а) и ее векторная диаграмма (б).

Исключая из (11-60) и (11-61) ток $\dot{I}_2$, определяем ток в первой ветви

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U} Z_2 - \dot{U} j\omega M}{Z_1 Z_2 + \omega^2 M^2} = \frac{\dot{U} (Z_2 - j\omega M)}{Z_1 Z_2 + \omega^2 M^2}. \quad (11-62)$$

Аналогично, исключая ток $\dot{I}_1$, находим ток во второй ветви:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U} (Z_1 - j\omega M)}{Z_1 Z_2 + \omega^2 M^2}. \quad (11-63)$$

Уравнения для напряжения $\dot{U}$ при встречном соединении катушек (рис. 11-28, а) отличаются от написанных для согласного соединения только знаком перед слагаемым с коэффициентом взаимной индуктивности M . Поэтому расчетные формулы для токов в ветвях можно записать сразу:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U} (Z_2 + j\omega M)}{Z_1 Z_2 + \omega^2 M^2} \quad \text{и} \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U} (Z_1 + j\omega M)}{Z_1 Z_2 + \omega^2 M^2}. \quad (11-64)$$

Естественно, что ток в неразветвленной части цепи для любой из параллельных схем соединения катушек определяется по одной и той же формуле

$$I = I_1 + I_2. \quad (11-65)$$

На рис. 11-27, б и 11-28, б показаны векторные диаграммы для обоих случаев параллельного соединения катушек.

11-12

Измерение взаимной индуктивности

Согласное и встречное последовательное соединения катушек (рис. 11-22, а и 11-23, а) можно использовать для измерения их взаимной индуктивности.

Измерив амперметром, вольтметром и ваттметром ток, напряжение и мощность цепи при каждом соединении, определим активное, полное и индуктивное сопротивления:

1) для согласного соединения

$$r = r_1 + r_2 = P_c / I_c^2;$$

$$z_c = \sqrt{r^2 + x_c^2} = U / I_c,$$

$$x_c = \omega L_c = \sqrt{z_c^2 - r^2};$$

2) для встречного соединения

$$r = r_1 + r_2 = P_b / I_b^2;$$

$$z_b = \sqrt{r^2 + x_b^2} = U / I_b,$$

$$x_b = \omega L_b = \sqrt{z_b^2 - r^2},$$

причем для сопротивления r должно быть получено прежнее значение. Из (11-49) и (11-51) следует, что

$$x_c - x_b = 4\omega M,$$

откуда взаимная индуктивность катушек

$$M = \frac{x_c - x_b}{4\omega} = \frac{L_c - L_b}{4}, \quad (11-66)$$

где $L_c = x_c / \omega$ — индуктивность цепи при согласном соединении катушек, а $L_b = x_b / \omega$ — при встречном соединении.

Следует заметить, что, оставив в схеме рис. 11-22, а или 11-23, а одну катушку, можно определить по показаниям приборов ее индуктивность:

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{z^2 - r^2}. \quad (11-67)$$

Взаимную индуктивность двух катушек можно измерить и иначе, воспользовавшись схемой рис. 11-29.

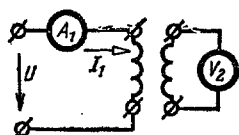


Рис. 11-29. Схема для измерения взаимной индуктивности.

откуда

откуда

Так как при разомкнутой вторичной цепи э. д. с. взаимной индукции равна по величине и напряжению, измеряемому вольтметром (11-53),

$$U_2 = E_2 = \omega M I_1,$$

то взаимная индуктивность

$$M = U_2 / \omega I_1, \quad (11-68)$$

где I_1 — ток первичной цепи, измеряемый амперметром.

Глава двенадцатая

Трехфазные цепи

12-1

Трехфазные системы

Многофазной системой электрических цепей называется система, состоящая из нескольких электрических цепей переменного тока одной частоты, э. д. с. которых имеют разные фазы.

Отдельные цепи многофазной системы сокращенно называются фазами. Таким образом, термину фаза соответствуют два понятия: 1) угол, определяющий стадию изменения синусоидальной величины, и 2) одна из составных частей многофазной системы. Многофазную систему электрических цепей, соединенных друг с другом, называют обычно многофазной цепью.

Совокупность э. д. с., напряжений или токов в фазах многофазной цепи называют многофазной системой э. д. с., напряжений или токов.

В настоящее время из всех многофазных систем наиболее широкое распространение получила трехфазная система, т. е. система, состоящая из трех электрических цепей переменного тока одной частоты, э. д. с. которых имеют разные фазы.

Трехфазная система переменного тока, изобретенная выдающимся русским инженером М. О. Доливо-Добровольским в 1891 г., получила распространение во всем мире как система, обеспечивающая наиболее выгодную передачу электроэнергии и позволяющая создать надежные, простые и дешевые электродвигатели, генераторы и трансформаторы.

Простейший трехфазный генератор (рис. 12-1) имеет устройство, аналогичное однофазному генератору с той лишь разницей, что его якорь имеет не одну, а три одинако-

вые обмотки (фазы), начало и концы которых обозначают соответственно буквами A, B, C и X, Y, Z и которые сдвинуты в пространстве относительно друг друга на равные углы $2\pi/3 = 120^\circ$. При вращении якоря в обмотках генератора индуктируются э. д. с. одинаковой частоты и равной амплитуды, сдвинутые по фазе относительно друг друга на

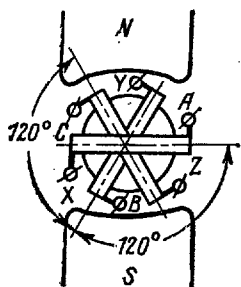


Рис. 12-1. Устройство простейшего трехфазного генератора.

одинаковые углы $2\pi/3 = 120^\circ$, или на $1/3$ периода. Такая система трех э. д. с. называется симметричной. Наоборот, если амплитуды э. д. с. не равны друг другу или углы сдвига не равны $2\pi/3$, то система э. д. с. называется несимметричной.

Приняв за начало отсчета времени ($t = 0$) начало периода э. д. с. в первой обмотке, называемой фазой A , напишем ее выражение:

$$e_A = E_m \sin \omega t. \quad (12-1)$$

В симметричной трехфазной системе э. д. с. второй фазы B отстает по фазе от э. д. с. e_A первой на $1/3$ периода, следовательно,

$$e_B = E_m \sin [\omega (t - T/3)] = E_m \sin (\omega t - 2\pi/3). \quad (12-2)$$

Электродвижущая сила третьей фазы C отстает по фазе от э. д. с. e_A на $2/3$ периода или, что то же, опережает по фазе э. д. с. e_A на $1/3$ периода; следовательно,

$$e_C = E_m \sin [\omega (t + T/3)] = E_m \sin (\omega t + 2\pi/3). \quad (12-3)$$

На рис. 12-2 показаны синусоиды э. д. с., соответствующие написанным уравнениям, и их векторная диаграмма. Предполагается, что для вещественной положительной полуоси на комплексной плоскости выбрано направление вертикально вверх, а не направо, как в предыдущей главе; поэтому вектор э. д. с. первой фазы e_A , имеющей нулевую начальную фазу, направлен вертикально вверх. При этом комплекс э. д. с. первой фазы $\dot{E}_A = E$, а комплексы э. д. с. остальных двух фаз

$$\dot{E}_B = \dot{E}_A e^{-j2\pi/3} = E e^{-j2\pi/3}$$

и

$$\dot{E}_C = \dot{E}_A e^{+j2\pi/3} = E e^{+j2\pi/3}.$$

Положительные направления э. д. с. в обмотках генератора выбираются от концов обмоток X, Y, Z к началам A, B, C .

Последовательность прохождения э. д. с. через амплитудные (или нулевые) значения называют последо-

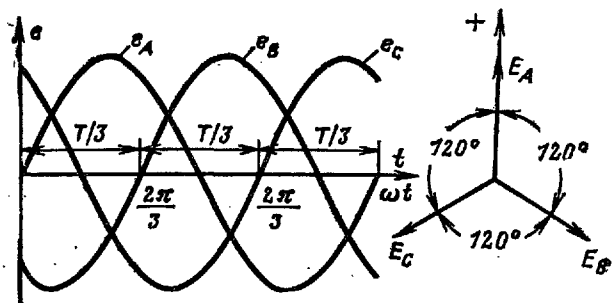


Рис. 12-2. График и векторная диаграмма симметричных э. д. с. трехфазного генератора.

вательностью фаз; например, последовательность фаз э. д. с., изображенных на рис. 12-2, будет А, В, С.

Каждую обмотку трехфазного генератора можно соединить с отдельным приемником энергии (рис. 12-3). В этом

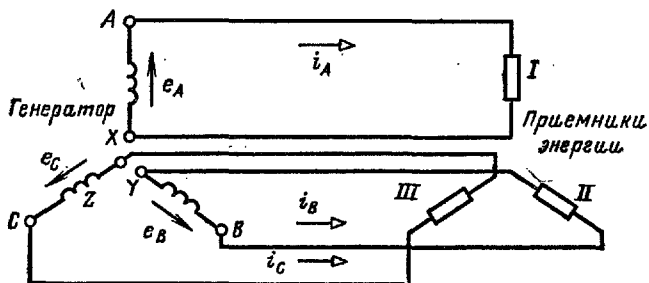


Рис. 12-3. Несвязанная трехфазная система.

случае получается не с в я з а н н а я трехфазная система с тремя самостоятельными цепями и шестью проводами — не экономичная и поэтому не нашедшая применения.

12-2

Соединение обмоток генератора звездой

Соединение обмоток генератора звездой или треугольником позволяет уменьшить число проводов, соединяющих генератор с приемником, с шести при несвязанной системе до четырех или до трех.

При соединении звездой (рис. 12-4) к началам обмоток генератора A, B, C присоединяют три линейных провода, идущих к приемнику. Концы обмоток X, Y, Z объединяют в узел, называемый нейтралью генератора или его нейтральной точкой. В четырехпроводной системе к нейтрали генератора присоединяется нейтральный провод. В трехпроводной системе он отсутствует.

Напряжения между линейными и нейтральным проводами называются фазными напряжениями: U_A, U_B и U_C . Фазное напряжение отличается от фазной э. д. с.



Рис. 12-4. Схема соединения обмоток генератора звездой.

на величину падения напряжения в обмотке генератора. Напряжения между линейными проводами называются линейными: U_{AB}, U_{BC} и U_{CA} . Положительное направление напряжения во внешней цепи указывается порядком записи индексов, например, положительное направление напряжения U_{AB} от точки A к точке B (рис. 12-4).

Мгновенные значения фазных напряжений равны разностям мгновенных значений потенциалов начал и концов соответствующих обмоток:

$$u_A = \varphi_A - \varphi_X; u_B = \varphi_B - \varphi_Y; u_C = \varphi_C - \varphi_Z. \quad (12-4)$$

Мгновенные значения линейных напряжений равны разностям мгновенных значений потенциалов начал соответствующих обмоток, т. е.

$$u_{AB} = \varphi_A - \varphi_B; u_{BC} = \varphi_B - \varphi_C; u_{CA} = \varphi_C - \varphi_A. \quad (12-5)$$

Концы обмоток соединены в узел, поэтому потенциалы их одинаковы $\varphi_X = \varphi_Y = \varphi_Z$.

Мгновенное значение линейного напряжения между проводами A и B

$$u_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = (\varphi_X + u_A) - (\varphi_Y + u_B) = u_A - u_B. \quad (12-6)$$

По аналогии для двух других линейных напряжений можем написать:

$$u_{BC} = u_B - u_C; u_{CA} = u_C - u_A. \quad (12-7)$$

Следовательно, можно утверждать, что мгновенное значение любого линейного напряжения равно алгебраической разности мгновенных значений соответствующих фазных напряжений. Аналогично при символической записи любое комплексное линейное напряжение равно разности соответствующих фазных комплексных напряжений, т. е.

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A. \quad (12-8)$$

На векторной диаграмме (рис. 12-5, а) вектор любого линейного напряжения равен разности соответствующих векторов фазных напряжений. Из векторной диаграммы

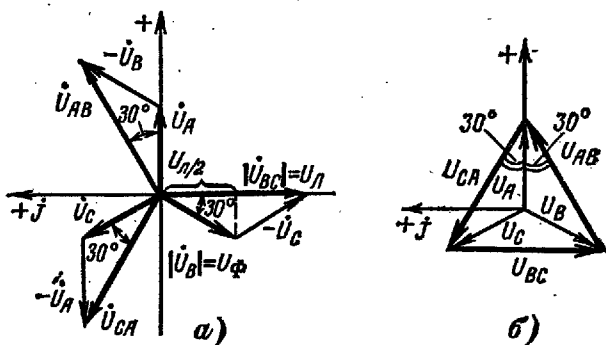


Рис. 12-5. Векторная диаграмма фазных и линейных напряжений при соединении обмоток генератора звездой.

(рис. 12-5, а) видно, что векторы двух смежных фазных напряжений и вектор соответствующего линейного напряжения, например векторы $\dot{U}_B$, $\dot{U}_C$ и $\dot{U}_{BC}$, образуют замкнутый треугольник. При симметричной системе напряжений фазные напряжения равны друг другу по величине, т. е. $U_A = U_B = U_C = U_\phi$, и линейные напряжения одинаковы по величине, т. е. $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_L$. Поэтому треугольник равнобедренный и имеет углы 30° , 30° и 120° . Из треугольника находим, что

$$\frac{1}{2} U_L = U_\phi \cos 30^\circ;$$

или

$$U_L = 2U_\phi \cos 30^\circ = \frac{2U_\phi \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} U_\phi = 1,73 U_\phi, \quad (12-9)$$

т. е. линейное напряжение в $\sqrt{3}$ раз больше фазного напряжения.

Кроме того, из рис. 12-5, а следует, что звезда векторов линейных напряжений повернута на 30° в сторону вращения векторов относительно звезды векторов фазных напряжений.

Алгебраическая сумма линейных напряжений всегда равна нулю. Действительно, приняв во внимание выражение (12-5), можно написать:

$$u_{AB} + u_{BC} + u_{CA} = \varphi_A - \varphi_B + \varphi_B - \varphi_C + \varphi_C - \varphi_A = 0$$

или

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0.$$

Таким образом, векторы линейных напряжений $\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$, $\dot{U}_{CA}$ всегда образуют замкнутый треугольник. Например, три вектора линейных напряжений симметричной системы (рис. 12-5, а), перенесенные параллельно самим себе, образуют замкнутый треугольник (рис. 12-5, б).

Пример 12-1. Определить линейное напряжение симметричного генератора, если фазное напряжение 127 В.

Решение. Линейное напряжение $U_\pi = \sqrt{3}U_\phi = 1,73 \cdot 127 = 220$ В.

Пример 12-2. Определить фазное напряжение симметричной системы, если линейное напряжение 380 В.

Решение. Фазное напряжение $U_\phi = U_\pi / \sqrt{3} = 380 / 1,73 = 220$ В.

12-3

Соединение обмоток генератора треугольником

Соединение обмоток трехфазного генератора (рис. 12-6), при котором конец первой обмотки X соединяется с началом второй обмотки B , конец второй обмотки Y — с началом третьей C и конец третьей Z — с началом первой A , называется **треугольником**.

Линейные провода, идущие к приемнику, присоединяются к началам обмоток генератора A , B , C и в то же время к концам соответствующих соседних обмоток Z , X , Y (рис. 12-6). Вследствие этого фазные напряжения на обмотках генератора одновременно являются и линейными напряжениями.

Обмотки генератора, соединенные треугольником, образуют замкнутый контур с малым сопротивлением, в котором действует сумма трех э. д. с. e_A , e_B и e_C . Чтобы в контуре при отсутствии нагрузки не возник ток, сумма этих э. д. с.

в любой момент времени должна быть равна нулю. Этому требованию удовлетворяет симметричная система трех э. д. с. (§ 12-1), изображенная на рис. 12-7. В этом можно убедиться, сложив э. д. с.,

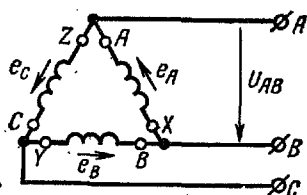


Рис. 12-6. Схема соединения обмоток генератора треугольником.

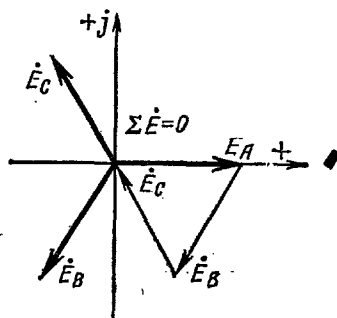


Рис. 12-7. Векторная диаграмма э. д. с. при соединении обмоток генератора треугольником.

выраженные уравнениями (12-1) — (12-3), а также три вектора э. д. с. (рис. 12-7) или комплексы э. д. с.

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = E_A (1 + e^{-j2\pi/3} + e^{+j2\pi/3}) = 0, \quad (12-10)$$

так как

$$1 + e^{-j2\pi/3} + e^{+j2\pi/3} = 1 + \cos \frac{2\pi}{3} - j \sin \frac{2\pi}{3} + \\ + \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Неправильное соединение обмоток, при котором у одной из них начало и конец поменяли местами, например B и Y (рис. 12-8, а), приводит к тому, что алгебраическая сумма э. д. с. в замкнутом контуре

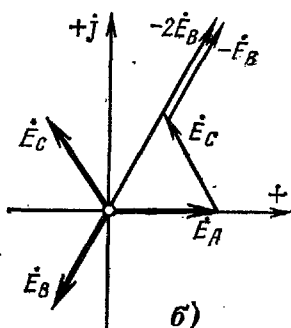
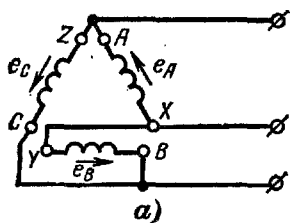


Рис. 12-8. Неправильная схема соединения обмоток генератора треугольником (а) и векторная диаграмма э. д. с. (б).

не будет равна нулю. Так, при указанном неправильном соединении (рис. 12-8, а) сумма э. д. с. в контуре, как видно из построений на рис. 12-8, б,

$$\dot{E}_A - \dot{E}_B + \dot{E}_C = (\dot{E}_A + \dot{E}_C) - \dot{E}_B = -2\dot{E}_B,$$

т. е. она равна удвоенной фазной э. д. с., что при малом сопротивлении контура эквивалентно короткому замыканию генератора.

12-4

Соединение приемников энергии звездой

Трехфазная цепь с нейтральным проводом, сопротивлением которого можно пренебречь. Выше отмечалось, что при соединении обмоток генератора звездой можно получить четырехпроводную или трехпроводную трехфазную систему.

Четырехпроводная система получается при замене трех обратных проводов несвязанной трехфазной системы (рис. 12-3) одним нейтральным проводом. Два различных, но равноценных изображения схемы такой цепи показаны на

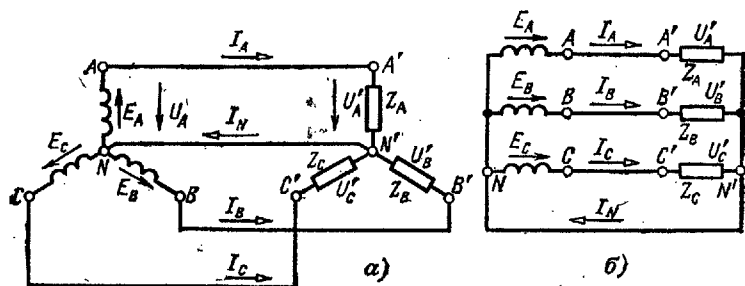


Рис. 12-9. Две равноценные схемы трехфазной четырехпроводной цепи.

рис. 12-9, а, б. Один конец нейтрального провода присоединен к нейтрали генератора N , другой конец — к нейтрали N' приемников (нагрузки), также соединенных звездой.

При достаточно малом сопротивлении нейтрального провода разность потенциалов между нейтральными точками N и N' равна нулю. Таким образом, создается три самостоятельных контура, причем нейтральный провод с весьма малым сопротивлением обеспечивает равенство фазных напряжений генератора и соответствующих фазных напряжений приемника, т. е. $U_A = U'_A$, $U_B = U'_B$ и $U_C = U'_C$.

При заданных фазных напряжениях и известных сопротивлениях приемников ток в каждом из контуров определяется по закону Ома, т. е.

$$I_A = \dot{U}_A / Z_A; \quad I_B = \dot{U}_B / Z_B; \quad I_C = \dot{U}_C / Z_C. \quad (12-11)$$

Положительное направление тока в нейтральном проводе в отличие от положительных направлений токов в линейных проводах выбирается от приемников к генератору. Поэтому ток в нейтральном проводе по первому закону Кирхгофа равен сумме токов в линейных проводах, т. е. **линейных токов**:

$$I_N = I_A + I_B + I_C. \quad (12-12)$$

Ток в нейтральном проводе обуславливается неодинаковой (неравномерной) нагрузкой фаз. В частном случае при одинаковой нагрузке фаз, как это будет показано ниже, он равен нулю. Практически ток в нейтральном проводе в большинстве случаев значительно меньше линейных токов. Поэтому в трехфазных системах нейтральный провод имеет сечение, в 2—3 раза меньшее сечения линейных проводов.

Обрыв нейтрального провода при неодинаковой нагрузке фаз приемника вызывает изменение фазных напряжений: повышение на одних фазах приемников и понижение на других. Такое изменение напряжения недопустимо; например, при осветительной нагрузке понижение напряжения на части ламп накаливания вызывает недостаточный накал их, а на других повышение напряжения приводит к перегоранию ламп. Ввиду изложенного в нейтральных проводах предохранители не устанавливают.

Мощность в отдельных фазах приемников энергии в трехфазной цепи с нейтральным проводом определяется по тем же формулам, которые применялись для цепей переменного тока, т. е. комплексная мощность

$$\begin{aligned} \tilde{S}_A = \dot{U}_A \dot{I}_A = P_A + jQ_A; \quad \tilde{S}_B = \dot{U}_B \dot{I}_B = P_B + jQ_B; \\ \tilde{S}_C = \dot{U}_C \dot{I}_C = P_C + jQ_C. \end{aligned} \quad (12-13)$$

Активные мощности отдельных фаз можно определить и по формулам

$$\begin{aligned} P_A = U_A I_A \cos \varphi_A; \quad P_B = U_B I_B \cos \varphi_B; \\ P_C = U_C I_C \cos \varphi_C, \end{aligned} \quad (12-13a)$$

а активная мощность всей цепи равна сумме активных мощностей отдельных фаз

$$P = P_A + P_B + P_C.$$

Реактивные мощности отдельных фаз

$$Q_A = U_A I_A \sin \varphi_A; Q_B = U_B I_B \sin \varphi_B; Q_C = U_C I_C \sin \varphi_C \quad (12-136)$$

и реактивная мощность всей цепи

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C.$$

Поэтому по (12-13) и $\tilde{S} = \tilde{S}_A + \tilde{S}_B + \tilde{S}_C$ (но суммировать полные мощности, т. е. $S_A = \sqrt{P_A^2 + Q_A^2}$ и т. д., а не комплексные нельзя).

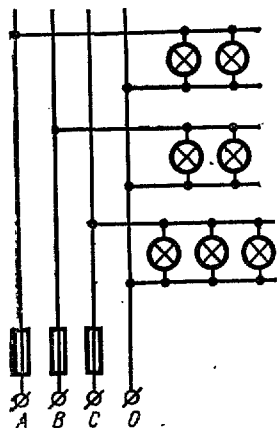


Рис. 12-10. Схема включения однофазных приемников энергии в четырехпроводную трехфазную цепь.

Приемники электрической энергии можно разделить на две группы. К одной из них относятся электрические лампы, нагревательные приборы и другие однофазные приемники, которые не могут обеспечить равномерной нагрузки фаз. В четырехпроводной трехфазной системе эти приемники включаются между нейтральным проводом и каждым из линейных проводов (рис. 12-10), причем их номинальное напряжение должно быть равно фазному напряжению сети.

К другой группе относятся, например, трехфазные электродвигатели, которые имеют три одинаковые (симметричные) обмотки, обеспечивающие равномерную нагрузку трех фаз. Для таких приемников нейтральный провод не нужен (ток в нем равен нулю) и их включают в трехфазную сеть без нейтрального провода; их номинальное линейное напряжение должно быть равно линейному напряжению трехфазной сети, в которую они включаются.

Пример 12-3. Фазные напряжения генератора $U_\phi = 240$ В, сопротивления фаз приемника (рис. 12-9) $Z_A = r_A = 20$ Ом; $Z_B = r_B = 8$ Ом и $Z_C = r_C = 50$ Ом. Сопротивлением линейных и нейтрального проводов можно пренебречь. Определить токи во всех участках цепи.

Решение. Направим вектор $\dot{U}_A$ по вещественной положительной полуоси; тогда $\dot{U}_A = U_A = 240$ В; напряжение

$$\dot{U}_B = \dot{U}_A e^{-j2\pi/3} = 240 (\cos 120^\circ - j \sin 120^\circ) = (-120 - j208) \text{ В};$$

аналогично напряжение

$$\dot{U}_C = \dot{U}_A e^{j2\pi/3} = (-120 + j208) \text{ В.}$$

Токи в участках

$$I_A = \dot{U}_A / Z_A = 240/20 = 12 \text{ А; } I_A = 12 \text{ А;}$$

$$I_B = \dot{U}_B / Z_B = (-120 - j208)/8 = (-15 - j26) \text{ А;}$$

$$I_B = \sqrt{15^2 + 26^2} = 30 \text{ А;}$$

$$I_C = \dot{U}_C / Z_C = (-120 + j208)/50 = (-2,4 + j4,16) \text{ А;}$$

$$I_C = \sqrt{2,4^2 + 4,16^2} = 4,8 \text{ А;}$$

$$I_N = I_A + I_B + I_C = 12 - 15 - j26 - 2,4 + j4,16 = (-5,4 - j21,8) \text{ А;}$$

$$I_N = \sqrt{5,4^2 + 21,8^2} = 22 \text{ А.}$$

Трехфазная цепь без нейтрального провода при симметричном режиме. В четырехпроводной трехфазной цепи при симметричной системе напряжений и равномерной нагрузке,

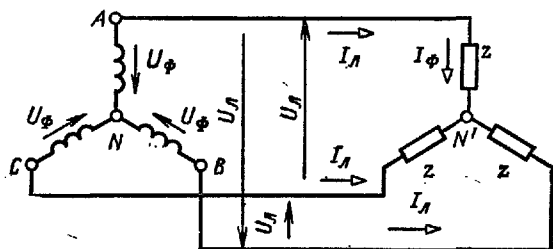


Рис. 12-11. Схема трехпроводной трехфазной системы.

т. е. одинаковом сопротивлении фаз приемника $Z_A = Z_B = Z_C$, система токов также симметрична — это симметричный режим цепи

$$I_A; I_B = I_A e^{-j2\pi/3}; I_C = I_A e^{+j2\pi/3}.$$

Ток в нейтральном проводе

$$I_N = I_A + I_B + I_C = I_A (1 + e^{-j2\pi/3} + e^{+j2\pi/3}) = 0.$$

Очевидно, равна нулю и разность потенциалов на концах нейтрального провода независимо от величины его сопротивления. Таким образом, равномерная нагрузка обеспечивает равенство потенциалов нейтральных точек N генератора и N' нагрузки. В этом случае нейтральный провод не нужен и он может быть отсоединен без изменения режима работы цепи. Так получается трехфазная трехпроводная система (рис. 12-11), соединенная по схеме звезда — звезда.

Расчет трехфазной системы при симметричном режиме сводится к расчету одной фазы.

Допустим, что в цепь с симметричной системой напряжений $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_\Delta$ и $U_A = U_B = U_C = U_\phi$ включен приемник, соединенный звездой (рис. 12-11) и имеющий одинаковые сопротивления фаз $Z_A = Z_B = Z_C = Z_\phi$.

При симметричной системе напряжений фазное напряжение

$$U_\phi = U_\Delta / \sqrt{3}. \quad (12-14)$$

Токи в фазах приемников — фазные токи, равные им токи в линейных проводах — линейные токи

$$I_\phi = I_\Delta = U_\phi / z. \quad (12-15)$$

Угол сдвига фаз между фазным напряжением и фазным током определяется через его тангенс, косинус или синус:

$$\operatorname{tg} \varphi_\phi = x/r; \quad \cos \varphi_\phi = r/z; \quad \sin \varphi_\phi = x/z. \quad (12-16)$$

Средняя или активная мощность одной фазы

$$P_\phi = U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi.$$

Активная мощность всей трехфазной цепи

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi = \sqrt{3} U_\Delta I_\Delta \cos \varphi_\phi, \quad (12-17)$$

так как

$$U_\phi I_\phi = U_\Delta I_\Delta / \sqrt{3}.$$

Реактивная мощность одной фазы

$$Q_\phi = U_\phi I_\phi \sin \varphi_\phi.$$

Реактивная мощность всей трехфазной цепи

$$Q = \sqrt{3} U_\Delta I_\Delta \sin \varphi_\phi. \quad (12-18)$$

Полная мощность трехфазной цепи (при симметричном режиме)

$$S = 3\bar{U}_\phi \bar{I}_\phi = \sqrt{3} U_\Delta I_\Delta. \quad (12-19)$$

Пример 12-4. Фазное напряжение генератора, соединенного звездой, $U_\phi = 220$ В. Трехфазный приемник, соединенный звездой, имеет активное сопротивление фазы $r = 4$ Ом и реактивное $x_L = 3$ Ом.

Определить фазные и линейные токи и мощность приемника.

Решение. Сопротивление фазы приемника

$$z_\phi = \sqrt{r^2 + x_L^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ Ом.}$$

Линейный ток и равный ему фазный ток

$$I_{\text{л}} = I_{\text{ф}} = U_{\text{ф}} / z_{\text{ф}} = 220 / 5 = 44 \text{ А.}$$

Коэффициент мощности

$$\cos \varphi_{\text{ф}} = r / z = 4 / 5 = 0,8.$$

Линейное напряжение цепи

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} U_{\text{ф}} = 1,73 \cdot 220 = 380 \text{ В.}$$

Активная мощность цепи

$$P = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi_{\text{ф}} = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 44 \cdot 0,8 = 23\,140 \text{ Вт} = 23,14 \text{ кВт.}$$

Трехфазная цепь с нейтральным проводом, обладающим сопротивлением. В трехфазной цепи при соединении генератора и приемника звездой нейтральный провод, сопротивлением которого можно пренебречь, обеспечивает равенство потенциалов нейтральных точек генератора N и

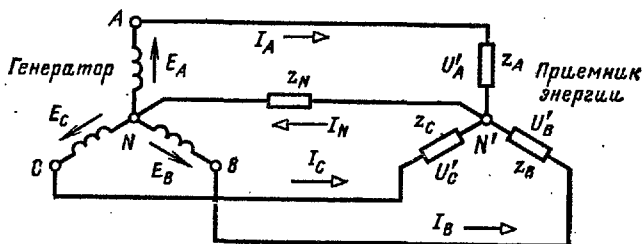


Рис. 12-12. Схема четырехпроводной трехфазной системы.

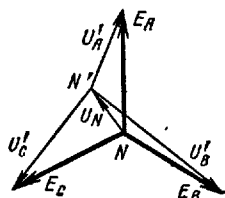
приемника N' . Поэтому при малых сопротивлениях линейных проводов фазные напряжения приемника равны соответствующим фазным напряжениям генератора.

Если сопротивлением нейтрального провода Z_N пренебречь нельзя (рис. 12-12), то при неодинаковых сопротивлениях фаз приемника через нейтральный провод проходит ток I_N и между нейтральными точками приемника N' и генератора N возникает разность потенциалов — с м е щ е н и е н е й т р а л и: $U_{N'N} = U_N = I_N Z_N$.

Пренебрегая сопротивлением фаз генератора и линейных проводов, напряжения на фазах приемника определим как разности соответствующих э. д. с. генератора и напряжения нейтралей, т. е.

$$U'_A = E_A - U_N; \quad U'_B = E_B - U_N; \quad U'_C = E_C - U_N. \quad (12-20)$$

При симметричной системе э. д. с. фазные напряжения приемника отличаются друг от друга тем больше, чем больше смещение нейтрали. На рис. 12-13 построены векторы э. д. с. и фазные напряжения приемника U'_A, U'_B, U'_C при некотором смещении нейтрали U_N .



Применив метод узловых напряжений (§ 2-9), смещение нейтрали определим по формуле

$$\begin{aligned} \dot{U}_{N'N} = \dot{U}_N &= \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N} = \\ &= \frac{\Sigma(\dot{E}Y)}{\Sigma Y}, \end{aligned} \quad (12-21)$$

Рис. 12-13. Векторная диаграмма э. д. с. генератора и напряжений на фазах приемника энергии.

где $Y_A = 1/Z_A$; $Y_B = 1/Z_B$; $Y_C = 1/Z_C$; $Y_N = 1/Z_N$ и $\dot{E}_A = \dot{U}_A$; $\dot{E}_B = \dot{U}_B$; $\dot{E}_C = \dot{U}_C$, так как сопротивления фаз генератора не учитываются.

Если сопротивлениями фаз генератора и линейных проводов пренебречь нельзя, то их следует учесть соответствующим увеличением сопротивлений фаз приемника.

Таким образом, расчет рассматриваемой цепи сводится к определению напряжения нейтрали (смещения нейтрали),

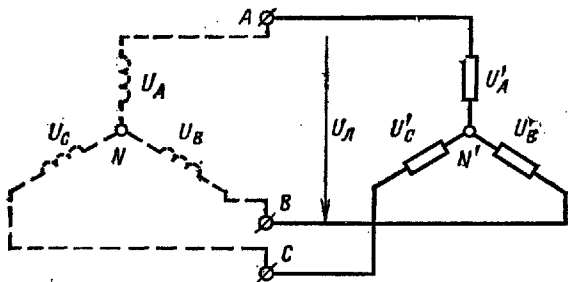


Рис. 12-14. Приемник энергии, соединенный звездой.

после чего по формулам (12-20) находятся фазные напряжения приемника и по закону Ома фазные и равные им линейные токи цепи

$$I_A = \dot{U}'_A Y_A; I_B = \dot{U}'_B Y_B; I_C = \dot{U}'_C Y_C; I_N = \dot{U}_N Y_N, \quad (12-22)$$

причем по первому закону Кирхгофа

$$I_N = I_A + I_B + I_C.$$

Мощности в фазах нагрузки можно определить по комплексам напряжения и сопряженным комплексам токов:

$$\dot{U}'_A \dot{I}_A = P_A + jQ_A; \quad \dot{U}'_B \dot{I}_B = P_B + jQ_B; \quad \dot{U}'_C \dot{I}_C = P_C + jQ_C \quad (12-23)$$

или по формулам, аналогичным (12-13а) и (12-13б).

Рассмотренный метод расчета применим и для трехпроводной цепи, если принять $Z_N = \infty$, $Y_N = 0$ и $I_N = 0$.

При расчете токов приемника, соединенного звездой и подключенного к сети с заданной симметричной системой линейных напряжений U_Δ , можно допустить, что эти напряжения U_Δ создаются заменяющим генератором (на рис. 12-14 показан пунктиром), который питает данный приемник энергии. Фазные напряжения такого генератора $U_A = U_B = U_C = E_A = E_B = E_C = U_\Delta / \sqrt{3}$. После этого полученная цепь рассчитывается рассмотренным выше методом.

Пример 12-5. К симметричному генератору, соединенному звездой с фазными э. д. с. $E_A = E_B = E_C = 120$ В, присоединен приемник, соединенный звездой (рис. 12-12), сопротивления фаз которого $Z_A = r_A = 1$ Ом, $Z_B = r_B = 0,4$ Ом, $Z_C = r_C = 2,5$ Ом. Сопротивление нейтрального провода $Z_N = 0,3 + j0,4$ Ом.

Определить фазные напряжения и фазные токи приемника.

Решение. Комплексные фазные э. д. с. генератора (в вольтах):

$$\dot{E}_A = 120; \quad \dot{E}_B = \dot{E}_A e^{-j120^\circ} = -60 - j104;$$

$$\dot{E}_C = \dot{E}_A e^{-j240^\circ} = -60 + j104.$$

Проводимости отдельных участков цепи (в сименсах):

$$Y_A = 1/Z_A = 1; \quad Y_B = 1/Z_B = 2,5; \quad Y_C = 1/Z_C = 0,4;$$

$$Y_N = 1/Z_N = 1/(0,3 + j0,4) = 1,2 - j1,6.$$

Узловое напряжение

$$\begin{aligned} \dot{U}_N &= \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N} = \\ &= \frac{120 \cdot 1 + (-60 - j104) \cdot 2,5 + (-60 + j104) \cdot 0,4}{1 + 2,5 + 0,4 + 1,2 - j1,6} = (2,6 - j42) \text{ В.} \end{aligned}$$

Напряжения на фазах приемника (в вольтах):

$$\dot{U}'_A = \dot{E}_A - \dot{U}_N = 120 - 2,6 + j42 = 117,4 + j42;$$

$$U'_A = \sqrt{117,4^2 + 42^2} = 122;$$

$$\dot{U}'_B = \dot{E}_B - \dot{U}_N = -60 - j104 - 2,6 + j42 = -62,6 - j62;$$

$$U'_B = \sqrt{62,6^2 + 62^2} = 84,4;$$

$$\dot{U}'_C = \dot{E}_C - \dot{U}_N = -60 + j104 - 2,6 + j42 = -62,6 + j146,2;$$

$$U'_C = \sqrt{62,6^2 + 146,2^2} = 159.$$

Токи (в амперах):

$$I_A = \dot{U}'_A Y_A = (117,4 + j42) \cdot 1 = 117,4 + j42;$$

$$I_A = \sqrt{117,4^2 + 42^2} = 122;$$

$$I_B = \dot{U}'_B Y_B = (-62,6 - j62) \cdot 2,5 = -158 - j155;$$

$$I_B = \sqrt{158^2 + 155^2} = 221;$$

$$I_C = \dot{U}'_C Y_C = (-62,6 + j146,2) \cdot 0,4 = -25 + j58;$$

$$I_C = \sqrt{25^2 + 58^2} = 62;$$

$$I_N = \dot{U}_N Y_N = (2,6 - j42) (1,2 - j1,6) = -64 - j55;$$

$$I_N = \sqrt{64^2 + 55^2} = 84,5.$$

Топографическая диаграмма. Напряжения между отдельными точками трехфазной цепи можно найти графически, построив топографическую диаграмму.

Построим диаграмму для цепи по рис. 12-12. Будем считать, что точка N , расположенная в начале координат (рис. 12-15), соответствует нейтральной точке генератора,

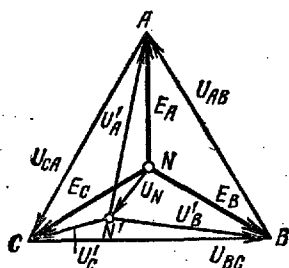


Рис. 12-15. Топографическая диаграмма цепи, изображенной на рис. 12-12.

потенциал которой принят за нулевой: $\varphi_N = 0$. Откладывая из точки N векторы фазных э. д. с. $\vec{E}_A$, $\vec{E}_B$ и $\vec{E}_C$, получаем точки A , B и C , соответствующие точкам цепи, обозначенным теми же буквами. Вектор $\vec{AB}$, равный разности векторов $\vec{E}_A - \vec{E}_B$, изображает линейное напряжение $\vec{U}_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$. Аналогично векторы $\vec{BC}$ и $\vec{CA}$ изображают линейные напряжения $\vec{U}_{BC}$ и $\vec{U}_{CA}$.

Отложив из точки N вектор $\vec{N'N}$, изображающий смещение нейтрали

$\vec{U}_N = \vec{U}_{N'N} = \varphi_{N'} - \varphi_N = \varphi_{N'}$, получим точку N' — потенциал нейтральной точки приемника, а векторы $\vec{AN'}$, $\vec{BN'}$ и $\vec{CN'}$ изображают соответствующие фазные напряжения приемника $\vec{U}'_A$, $\vec{U}'_B$ и $\vec{U}'_C$.

Если смещение нейтрали отсутствует, т. е. $U_N = U_{N'N} = 0$, то точка N' совпадает с точкой N .

Рассмотрим построение топографических диаграмм для двух частных режимов работы трехфазной цепи.

1. Допустим, что система э. д. с. генератора симметрична, нейтральный провод отсутствует ($Z_N = \infty$; $Y_N = 0$), сопротивления фаз B и C приемника одинаковы ($Z_B = Z_C$) и

произошел разрыв в линейном проводе A вследствие перегорания предохранителя (рис. 12-16). Таким образом, между точками A и N' сопротивление $Z'_A = \infty$, а проводимость $Y'_A = 1/Z'_A = 0$. Так как в рассматриваемом случае сопро-

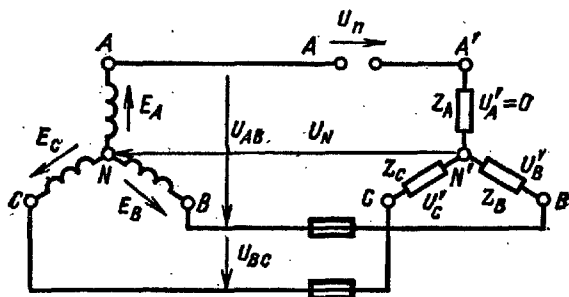


Рис. 12-16. Схема трехпроводной трехфазной системы при разрыве одного из линейных проводов.

тивления Z_B и Z_C оказываются соединенными последовательно и находятся под линейным напряжением $\dot{U}_{BC}$, то на каждом из этих сопротивлений напряжение равно $\dot{U}_{BC}/2$ и точка N' на топографической диаграмме расположена на середине вектора $\overline{BC}$ (рис. 12-17). Из диаграммы видно, что смещение нейтрали

$$\dot{U}_N = \dot{U}_{N'N} = -\dot{E}_A/2.$$

Напряжение на фазе приемника A равно нулю, так как ток $I_A = 0$ и $\dot{U}'_A = I_A Z_A = 0$. Напряжение между зажимами перегоревшего предохранителя U_n или равное ему напряжение между точками A и N'

$$\begin{aligned} \dot{U}_n &= \dot{U}_{AN'} = \dot{E}_A - \dot{U}_N = \\ &= \dot{E}_A - (-\dot{E}_A/2) = \frac{3}{2} \dot{E}_A. \end{aligned}$$

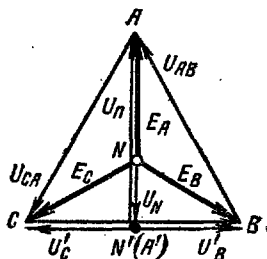


Рис. 12-17. Топографическая диаграмма цепи, изображенной на рис. 12-16.

То же решение можно получить расчетом, применяя формулу (12-21). Действительно,

$$\begin{aligned} \dot{U}_N &= \frac{\sum \dot{E} Y}{\sum Y} = \frac{\dot{E}_A 0 + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{0 + Y_B + Y_C} = \\ &= \frac{Y_B (\dot{E}_B + \dot{E}_C)}{2 Y_B} = \frac{\dot{E}_B + \dot{E}_C}{2} = -\frac{\dot{E}_A}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, получено то же смещение нейтрали, что и по топографической диаграмме.

Итак, в симметричной трехпроводной цепи при соединении приемников энергии звездой обрыв одного из проводов вызывает уменьшение до нуля напряжения на фазе приемника с оборванным проводом и уменьшение напряжения

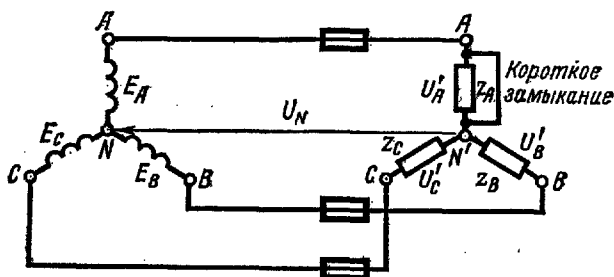


Рис. 12-18. Схема трехпроводной трехфазной системы при коротком замыкании одной из фаз приемника.

на двух других фазах приемника в $\frac{U_\phi}{U_{\phi/2}} = \frac{U_\phi/\sqrt{3}}{U_\phi/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ раз, т. е. примерно на 16%.

2. Допустим, что при симметричной системе э. д. с. генератора и одинаковых сопротивлений фаз *B* и *C* нагрузки $Z_B = Z_C$ произошло короткое замыкание фазы *A*, т. е. $Z_A = 0$ (рис. 12-18). Нейтральный провод отсутствует, т. е. $Z_N = \infty$ и $Y_N = 0$. В этом случае напряжение на фазе нагрузки *A* равно нулю ($U'_A = 0$), потенциалы точек *A* и *N'* равны, т. е. $\varphi_A = \varphi_{N'}$ (рис. 12-19), и, следовательно, на сопротивлении Z_B напряжение $\dot{U}'_B = \dot{U}_{BA} = -\dot{U}_{AB}$, а на сопротивлении Z_C напряжение $\dot{U}'_C = \dot{U}_{CA}$. Таким образом, нейтральная точка нагрузки *N'* сместилась относительно нейтральной точки генератора *N* на величину E_A , т. е.

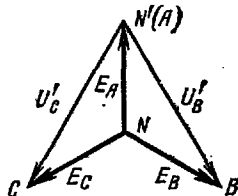


Рис. 12-19. Топографическая диаграмма цепи, изображенной на рис. 12-18.

$$\dot{U}_N = \dot{U}_{N'N} = \dot{E}_A.$$

К такому же выводу можно прийти, воспользовавшись формулой (12-21). Умножив числитель и знаменатель

(12-21) на Z_A , а затем приравняв Z_A нулю, получим:

$$\dot{U}_N = \dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{E}_A + \dot{E}_B Y_B Z_A + \dot{E}_C Y_C Z_A}{1 + Z_A (Y_B + Y_C)} = \dot{E}_A.$$

Таким образом, при коротком замыкании одной из фаз приемника напряжение на других фазах приемника увеличивается в $\sqrt{3}$ раз. Например, если лампы накаливания присоединены между нейтральным и линейными проводами, то при обрыве нейтрального провода и одновременном замыкании накоротко одной из фаз нагрузки лампы в двух других фазах окажутся под напряжением, в $\sqrt{3}$ большим номинального, что приведет к их перегоранию. Следовательно, нейтральный провод должен обладать достаточной прочностью.

12-5

Соединение приемников энергии треугольником

Схему соединения обмоток генератора треугольником (§ 12-3) и такую же схему соединения приемников энергии (рис. 12-20,а) можно получить из несвязанной трехфазной цепи с шестью проводами (рис. 12-20,б) путем замены каждой пары смежных проводов на рис. 12-20,б одним линейным проводом.

При соединении в треугольник приемники энергии с сопротивлениями Z_{AB} , Z_{BC} , Z_{CA} подключаются непосредственно к линейным проводам, вследствие чего линейные напряжения в то же время являются и фазными напряжениями приемников.

За положительное направление линейных токов принимается направление от источника питания к приемникам. За положительное направление фазных токов в треугольнике приемников принимается направление от A' к B' , от B' к C' и от C' к A' , которое указывается порядком букв в индексах, например I_{AB} .

При переходе от несвязанной системы к связанной (рис. 12-20,а и б) напряжения на фазах приемника остаются неизменными, поэтому фазные токи остаются теми же самыми.

Таким образом, ток в каждом линейном проводе равен разности фазных токов двух фаз, которые соединены с данным проводом (рис. 12-20,а и б). Эту связь между линейными и фазными токами можно установить и другим путем.

Применяя первый закон Кирхгофа, для точки A' (рис. 12-20, а) можно написать:

$$I_A + I_{CA} = I_{AB} \text{ или } I_A = I_{AB} - I_{CA}. \quad (12-24)$$

Аналогично для точек B и C

$$I_B = I_{BC} - I_{AB} \text{ и } I_C = I_{CA} - I_{BC}. \quad (12-25)$$

Фазные токи приемников определяются по закону Ома

$$I_{AB} = \dot{U}_{AB}/Z_{AB}; \quad I_{BC} = \dot{U}_{BC}/Z_{BC}; \quad I_{CA} = \dot{U}_{CA}/Z_{CA}. \quad (12-26)$$

На рис. 12-21 даны векторные диаграммы токов и напряжений при соединении приемников треугольником.

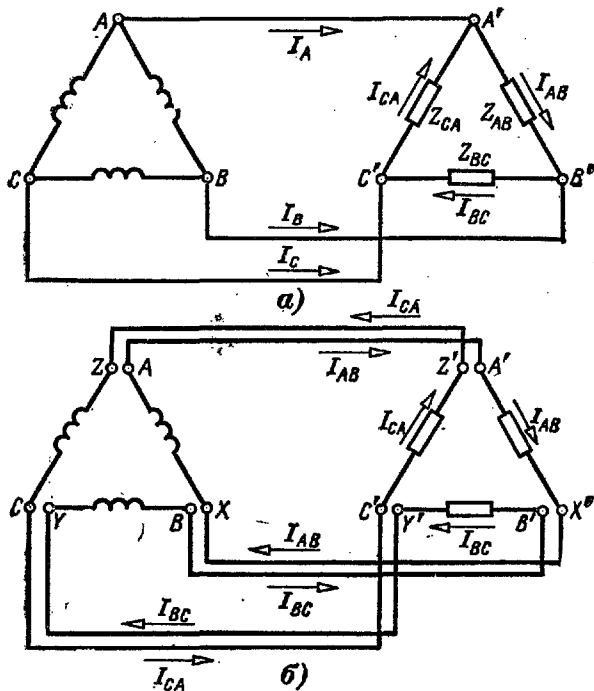


Рис. 12-20. Трехфазные цепи.

а — связанная; б — несвязанная.

На рис. 12-21, а все векторы проведены из общего начала, а на рис. 12-21, б векторы напряжений расположены по сторонам треугольника, соответственно перенесены и векторы токов; такая диаграмма более наглядна.

При несимметричном режиме работы комплексные мощности в отдельных фазах

$$\left. \begin{aligned} \tilde{S}_{AB} &= \dot{U}_{AB} \dot{I}_{AB} = P_{AB} + jQ_{AB}; \\ \tilde{S}_{BC} &= \dot{U}_{BC} \dot{I}_{BC} = P_{BC} + jQ_{BC}; \\ \tilde{S}_{CA} &= \dot{U}_{CA} \dot{I}_{CA} = P_{CA} + jQ_{CA}. \end{aligned} \right\} \quad (12-27)$$

Комплексная, активная и реактивная (но не полная) мощности всей трехфазной цепи определяются суммированием соответствующих мощностей всех фаз.

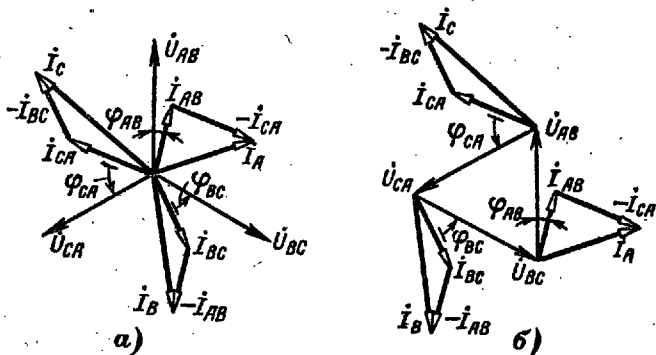


Рис. 12-21. Векторные диаграммы цепи, изображенной на рис. 12-20, а.

Пример 12-6. К сети с симметричными линейными напряжениями $U_L = 220$ В подключен приемник, соединенный треугольником, сопротивление фаз которого (в омах) $Z_{AB} = 3 + j4$; $Z_{BC} = 10$; $Z_{CA} = 8 + j6$. Определить фазные и линейные токи.

Решение. Представим линейные напряжения комплексными числами. Направим вектор $\dot{U}_{AB}$ по вещественной оси, т. е. примем $\dot{U}_{AB} = U_{AB} = 220$ В, в этом случае напряжения (в вольтах)

$$\dot{U}_{BC} = 220e^{-j120^\circ} = -110 - j190;$$

$$\dot{U}_{CA} = 220e^{j120^\circ} = -110 + j190.$$

Фазные токи (в амперах)

$$\dot{I}_{AB} = \dot{U}_{AB} / Z_{AB} = 220 / (3 + j4) = 26,4 - j35,2;$$

$$I_{AB} = \sqrt{26,4^2 + 35,2^2} = 44;$$

$$\dot{I}_{BC} = \dot{U}_{BC} / Z_{BC} = (-110 - j190) / 10 = -11 - j19;$$

$$I_{BC} = \sqrt{11^2 + 19^2} = 22;$$

$$\dot{I}_{CA} = \dot{U}_{CA} / Z_{CA} = (-110 + j190) / (8 + j6) = 2,6 + j21,8;$$

$$I_{CA} = \sqrt{2,6^2 + 21,8^2} = 22.$$

Линейные токи (в амперах)

$$I_A = I_{AB} - I_{CA} = 26,4 - j35,2 - 2,6 - j21,8 = 23,8 - j57;$$

$$I_B = I_{BC} - I_{AB} = -11 - j19 - 26,4 + j35,2 = -37,4 + j16,2;$$

$$I_C = I_{CA} - I_{BC} = 2,6 + j21,8 + 11 + j19 = 13,6 + j40,8;$$

$$I_A = \sqrt{23,8^2 + 57^2} = 78,7; \quad I_B = \sqrt{37,4^2 + 16,2^2} = 40,8;$$

$$I_C = \sqrt{13,6^2 + 40,8^2} = 43,3.$$

Симметричный режим трехфазной цепи характеризуется симметричной системой напряжений и симметричной системой токов, что возможно только при симметричном трехфазном приемнике, который имеет одинаковые комплексные сопротивления всех фаз.

Таким образом, при симметричной системе линейных напряжений $\dot{U}_{AB}$; $\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{AB}e^{-j2\pi/3}$; $\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{AB}e^{j2\pi/3}$ и сопротивлениях фаз приемника $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} = 1/Y$ фазные токи

$$\left. \begin{aligned} I_{AB} &= \dot{U}_{AB}Y; \\ I_{BC} &= \dot{U}_{BC}Y = \dot{U}_{AB}Ye^{-j2\pi/3}; \\ I_{CA} &= \dot{U}_{CA}Y = \dot{U}_{AB}Ye^{j2\pi/3} \end{aligned} \right\} \quad (12-28)$$

образуют симметричную систему. Следовательно, действующие значения токов равны между собой, а по фазе токи сдвинуты на равные углы $2\pi/3$ относительно друг друга.

Линейные токи, равные разностям соответствующих фазных токов, также образуют симметричную систему.

Векторная диаграмма для симметричного режима цепи дана на рис. 12-22. Из диаграммы видно, что векторы фазных токов смежных фаз вместе с вектором соответствующего линейного тока образуют равнобедренный треугольник с углами 30° , 30° и 120° . Таким образом, можно написать $I_n/2 = I_\phi \cos 30^\circ$ или

$$I_n = 2I_\phi \cos 30^\circ = 2I_\phi \sqrt{3}/2 = \sqrt{3} I_\phi,$$

т. е. линейный ток в $\sqrt{3}$ раз больше фазного тока. Кроме того, каждый линейный ток отстает по фазе от соответствующего фазного тока на угол 30° .

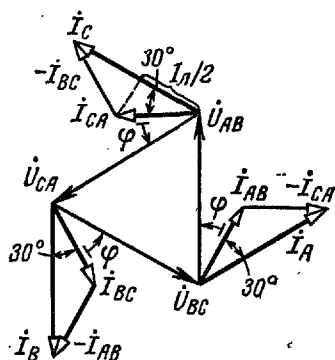


Рис. 12-22. Векторная диаграмма при равномерной нагрузке фаз приемника, соединенного треугольником.

Расчет трехфазной цепи, соединенной в треугольник, при симметричном режиме работы сводится к расчету одной фазы.

Фазное напряжение

$$U_{\phi} = U_{\text{л}}; \quad (12-29)$$

фазный ток

$$I_{\phi} = U_{\phi} / z_{\phi}; \quad (12-30)$$

линейный ток

$$I_{\text{л}} = \sqrt{3} I_{\phi}; \quad (12-31)$$

активная мощность цепи при симметричном режиме

$$P = 3U_{\phi}I_{\phi} \cos \varphi_{\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}}I_{\text{л}} \cos \varphi_{\phi}. \quad (12-32)$$

Реактивная и полная мощности цепи при симметричном режиме соответственно

$$Q = 3U_{\phi}I_{\phi} \sin \varphi_{\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}}I_{\text{л}} \sin \varphi_{\phi} \quad (12-33)$$

и

$$S = 3U_{\phi}I_{\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}}I_{\text{л}}. \quad (12-34)$$

Пример 12-7. Трехфазный асинхронный двигатель, соединенный треугольником, подключен к сети с линейным напряжением 220 В. Определить линейные и фазные токи двигателя, если он развивает мощность 5 кВт при $\cos \varphi = 0,75$.

Решение. Линейный ток двигателя

$$I_{\text{л}} = \frac{P}{\sqrt{3} U_{\text{л}} \cos \varphi} = \frac{5000}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0,75} = 17,5 \text{ А.}$$

Фазный ток двигателя

$$I_{\phi} = I_{\text{л}} / \sqrt{3} = 17,5 / 1,73 \approx 10 \text{ А.}$$

Схемы соединения приемников энергии не зависят от схемы соединения обмоток генератора. Основным условием, определяющим схему соединения приемников, является соотношение между напряжением сети и номинальным напряжением приемника. Приемник должен включаться так, чтобы на зажимах однофазного приемника или на зажимах каждой фазы трехфазного приемника было напряже-

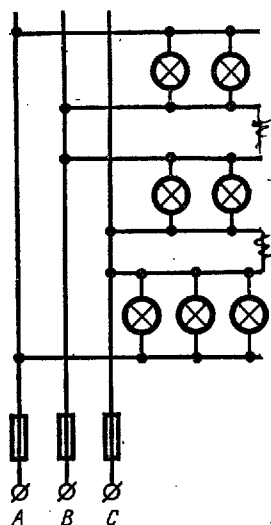


Рис. 12-23. Схема включения однофазных приемников треугольником.

ние, равное их номинальному фазному напряжению. Например, лампы накаливания с номинальным напряжением 127 В включаются по схеме звезда с нейтральным проводом (рис. 12-10) при линейном напряжении сети $220 \text{ В} = \sqrt{3} \times 127 \text{ В}$ или по схеме треугольника при напряжении сети 127 В (рис. 12-23); лампы с номинальным напряжением 220 В включаются в сеть с напряжением 380 В $= \sqrt{3} \cdot 220 \text{ В}$ по схеме звезда с нейтральным проводом (рис. 12-10) и по схеме треугольника (рис. 12-23) в сеть с линейным напряжением 220 В; электродвигатель с номинальными напряжениями 127/220 В включается в сеть с напряжением 127 В по схеме треугольник (Δ), а в сеть с напряжением 220 В по схеме звезда (Y); аналогично при напряжениях электродвигателя 220/380 В он включается треугольником в сеть с напряжением 220 В или звездой в сеть с напряжением 380 В.

12-6

Преобразование схем трехфазных цепей

Преобразование треугольника в эквивалентную звезду и обратное преобразование звезды в эквивалентный треугольник. Расчет трехфазной цепи с приемниками, соединенными треугольником, когда сопротивлениями подводящих проводов нельзя пренебречь (рис. 12-24, а), значительно упрощается, если треугольник заменить эквивалентной звездой.

Из § 2-8 известно, что сопротивления лучей эквивалентной звезды можно определить через сопротивления сторон треугольника по формулам

$$\left. \begin{aligned} Z'_A &= \frac{Z_{AB}Z_{CA}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}; \\ Z'_B &= \frac{Z_{BC}Z_{AB}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}; \\ Z'_C &= \frac{Z_{CA}Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}. \end{aligned} \right\} \quad (12-35)$$

При симметричной (равномерной) нагрузке, т. е. при $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} = Z_{\Delta}$, сопротивление луча эквивалентной звезды

$$Z_Y = Z_{\Delta}/3 \quad (12-35a)$$

или сопротивление луча эквивалентной звезды в 3 раза меньше сопротивления стороны треугольника.

После замены треугольника звездой получается цепь (рис. 12-24, б), расчет которой дан в § 12-4. Рассмотрим на примере расчет такой цепи.

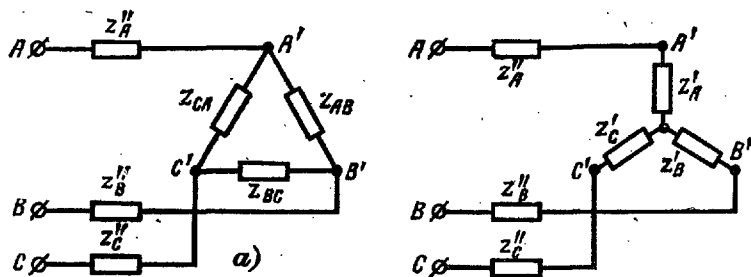


Рис. 12-24. Трехпроводная линия с приемниками, соединенными треугольником (а) и звездой (б).

Пример 12-8. Три резистора с сопротивлениями $Z_{AB} = 1 \text{ Ом}$, $Z_{CA} = Z_{BC} = 2 \text{ Ом}$ соединены треугольником (рис. 12-24, а), сопротивление каждого из подводящих проводов активное и равно $0,1 \text{ Ом}$. Фазные напряжения симметричного генератора $U_\phi = 120 \text{ В}$. Определить фазные и линейные токи.

Решение. Заменяем треугольник сопротивлений эквивалентной звездой (рис. 12-24, б) и вычислим сопротивления лучей звезды по (12-35):

$$Z'_A = Z'_B = \frac{Z_{AB}Z_{CA}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}} = \frac{1 \cdot 2}{1 + 2 + 2} = 0,4 \text{ Ом};$$

$$Z'_C = \frac{Z_{CA}Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}} = \frac{2 \cdot 2}{1 + 2 + 2} = 0,8 \text{ Ом}.$$

Учитывая, что соединительные провода включены последовательно с лучами звезды, находим сопротивления и проводимости каждой из фаз:

$$Z_A = Z'_A + Z''_A = 0,4 + 0,1 = 0,5 \text{ Ом}; \quad Y_A = 1/Z_A = 2 \text{ См};$$

$$Z_B = Z'_B + Z''_B = 0,4 + 0,1 = 0,5 \text{ Ом}; \quad Y_B = 1/Z_B = 2 \text{ См};$$

$$Z_C = Z'_C + Z''_C = 0,8 + 0,1 = 0,9 \text{ Ом}; \quad Y_C = 1/Z_C = 1,11 \text{ См}.$$

Приняв фазное напряжение фазы A генератора с нулевой начальной фазой, т. е. $\dot{U}_A = 120 \text{ В}$, получим: $\dot{U}_B = (-60 - j104) \text{ В}$ и $\dot{U}_C = (-60 + j104) \text{ В}$.

Смещение нейтрали найдем по (12-21):

$$\begin{aligned} \dot{U}_N &= \frac{U_A Y_A + \dot{U}_B Y_B + \dot{U}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = \\ &= \frac{120 \cdot 2 + (-60 - j104) 2 + (-60 + j104) 1,11}{2 + 2 + 1,11} = (10,4 - j18) \text{ В}. \end{aligned}$$

Линейные токи (в амперах):

$$I_A = (\dot{U}_A - \dot{U}_N) Y_A = (120 - 10,4 + j18) \cdot 2 = 219 + j36;$$

$$I_B = (\dot{U}_B - \dot{U}_N) Y_B = (-60 - j104 - 10,4 + j18) \cdot 2 = -141 - j172;$$

$$I_C = (\dot{U}_C - \dot{U}_N) Y_C = (-60 + j104 - 10,4 + j18) \cdot 1,11 = -78 + j136.$$

Фазные напряжения на лучах звезды (в вольтах):

$$\dot{U}'_A = I_A Z'_A = (219 + j36) \cdot 0,4 = 87,6 + j14,4;$$

$$\dot{U}'_B = I_B Z'_B = (-141 - j172) \cdot 0,4 = -56,4 - j68,8;$$

$$\dot{U}'_C = I_C Z'_C = (-78 + j136) \cdot 0,8 = -62,4 + j108,8.$$

Линейные напряжения $\dot{U}'_{AB}$, $\dot{U}'_{BC}$ и $\dot{U}'_{CA}$ между точками $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$ (в вольтах):

$$\dot{U}'_{AB} = \dot{U}'_A - \dot{U}'_B = 87,6 + j14,4 + 56,4 + j68,8 = 144 + j83,2;$$

$$\dot{U}'_{BC} = \dot{U}'_B - \dot{U}'_C = -56,4 - j68,8 + 62,4 - j108,8 = 6 - j177,6;$$

$$\dot{U}'_{CA} = \dot{U}'_C - \dot{U}'_A = -62,4 + j108,8 - 87,6 - j14,4 = -150 + j94,4.$$

Фазные токи в треугольнике сопротивлений (в амперах):

$$I_{AB} = \dot{U}'_{AB} / Z_{AB} = \dot{U}'_{AB} Y_{AB} = (144 + j83,2) \cdot 1 = 144 + j83,2;$$

$$I_{BC} = \dot{U}'_{BC} / Z_{BC} = \dot{U}'_{BC} Y_{BC} = (6 - j177,6) \cdot 0,5 = 3 - j88,8;$$

$$I_{CA} = \dot{U}'_{CA} / Z_{CA} = \dot{U}'_{CA} Y_{CA} = (-150 + j94,4) \cdot 0,5 = -75 + j47,2.$$

Из § 2-8 известно, что сопротивление сторон эквивалентного треугольника можно определить через сопротивления лучей звезды по формулам

$$\left. \begin{aligned} Z_{AB} &= Z_A + Z_B + Z_A Z_B / Z_C; \\ Z_{BC} &= Z_B + Z_C + Z_B Z_C / Z_A; \\ Z_{CA} &= Z_C + Z_A + Z_C Z_A / Z_B. \end{aligned} \right\} \quad (12-36)$$

При симметричной нагрузке, т. е. при $Z_A = Z_B = Z_C = Z_Y$, сопротивление сторон эквивалентного треугольника в 3 раза больше сопротивления луча звезды, т. е.

$$Z_{\Delta} = 3Z_Y. \quad (12-36a)$$

Приведенные формулы (12-36) можно преобразовать так, чтобы они выражали проводимости сторон эквивалентного треугольника через известные проводимости лучей звезды:

$$\left. \begin{aligned} Y_{AB} &= \frac{Y_A Y_B}{Y_A + Y_B + Y_C}; \\ Y_{BC} &= \frac{Y_B Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}; \\ Y_{CA} &= \frac{Y_C Y_A}{Y_A + Y_B + Y_C}. \end{aligned} \right\} \quad (12-37)$$

При симметричной нагрузке или $Y_A = Y_B = Y_C = Y_Y$ проводимости сторон треугольника

$$Y_{\Delta} = Y_Y/3. \quad (12-37a)$$

Преобразование схем с несколькими приемниками. Если два или несколько несимметричных приемников соединены

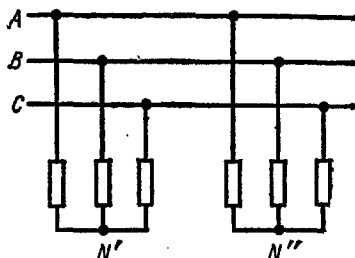


Рис. 12-25. Схема двух приемников, соединенных звездой.

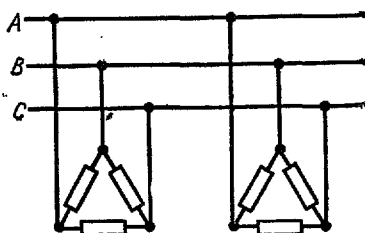


Рис. 12-26. Схема двух приемников, соединенных треугольником.

звездой (рис. 12-25), то при симметричной системе линейных напряжений фазные напряжения будут несимметричны и напряжение между нейтральными точками приемников N' и N'' не равно нулю. Следовательно, одноименные фазы

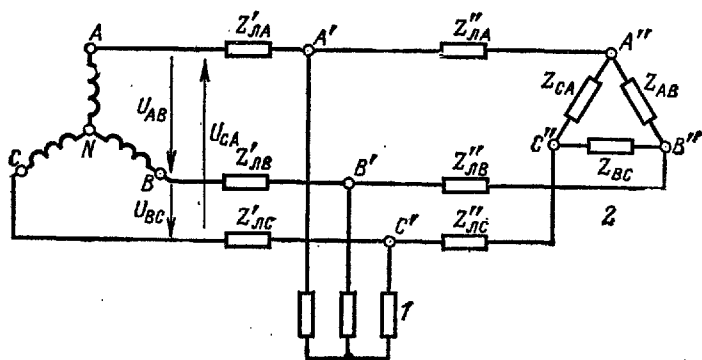


Рис. 12-27. Схема трехфазной цепи с приемниками, соединенными звездой и треугольником.

приемников нельзя считать соединенными параллельно и проводимости одноименных фаз складывать нельзя.

Для нахождения эквивалентной звезды необходимо каждую звезду преобразовать в эквивалентный треугольник (рис. 12-26). Так как одноименные фазы приемников, сое-

диненных в треугольник, находятся под одинаковыми напряжениями, то их можно считать соединенными параллельно и, сложив их проводимости, получить эквивалентный треугольник. Наконец, треугольник преобразуют в эквивалентную звезду.

Расчет цепи (рис. 12-27), т. е. определение токов и напряжений на всех ее участках, при заданных фазных или линейных напряжениях генератора и известных сопротивлениях фаз приемников 1 и 2 и участков проводов линии ($Z'_л$, $Z''_л$) выполняется различно для симметричного и несимметричного режимов цепи.

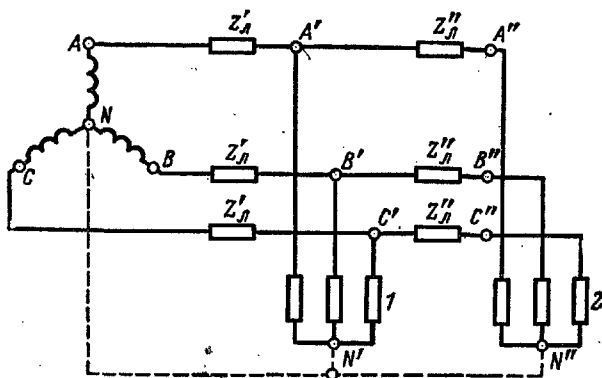


Рис. 12-28. Схема трехфазной цепи, изображенной на рис. 12-27, после замены треугольника эквивалентной звездой.

При симметричном режиме треугольник сопротивлений $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} = Z_{\Delta}$ заменяют эквивалентной звездой (рис. 12-28), сопротивление луча которой $Z_{Y_2} = Z_{\Delta}/3$. При рассматриваемом режиме потенциалы всех нейтральных точек одинаковы, поэтому соединение их нейтральным проводом не вызовет изменения в режиме работы цепи. Выделив одну из фаз, например A, получим схему (рис. 12-29) со смешанным соединением сопротивлений (§ 11-8).

Полное сопротивление фазы

$$Z = Z'_л + \frac{Z_1(Z''_л + Z_2)}{Z_1 + Z''_л + Z_2}.$$

Линейный ток в неразветвленной части цепи (участок AA') определяется по закону Ома

$$I = U_A/Z.$$

Линейные токи в приемниках 1 и 2 (рис. 12-29) определяются по (2-12), (2-13):

$$I_1 = I \frac{Z''_л + Z_2}{Z_1 + Z''_л + Z_2}; \quad I_2 = I \frac{Z_1}{Z_1 + Z''_л + Z_2}.$$

Линейные токи в двух других фазах *B* и *C* (рис. 12-28) по величине равны найденным токам в фазе *A*, а по фазе сдвинуты соответственно на углы $\mp 120^\circ$.

Фазные токи в первом приемнике равны линейным токам I_1 , а фазные токи во втором приемнике (рис. 12-27) в $\sqrt{3}$ раз меньше линейных I_2 и, как известно (рис. 12-22), по фазе опережают соответствующие линейные токи на углы 30° .

Напряжения на отдельных участках цепи находятся по закону Ома.

При несимметричном режиме цепи (рис. 12-27) расчет ее выполняется следующим образом: 1) заменяют треугольник сопротивлений (Z_{AB} , Z_{BC} , Z_{CA}) эквивалентной звездой

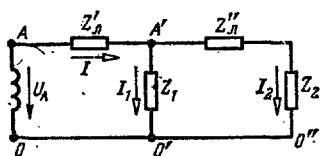


Рис. 12-29. Схема фазы *A* трехфазной цепи, изображенной на рис. 12-28.

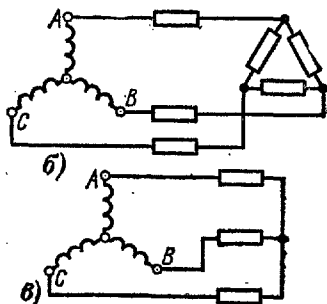
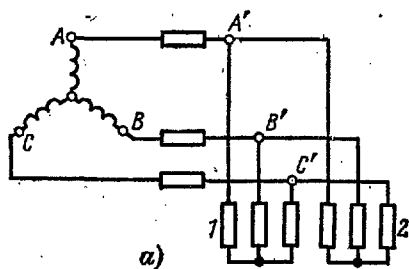


Рис. 12-30. Последовательные этапы преобразования схемы (рис. 12-27) трехфазной цепи.

(Z_A , Z_B , Z_C); 2) складывая сопротивления лучей эквивалентной звезды с сопротивлениями проводов $Z'_{лA}$, $Z'_{лB}$, $Z'_{лC}$, получают две звезды, присоединенные к точкам цепи A' , B' , C' (рис. 12-30, а); 3) преобразуют каждую из звезд в эквивалентный треугольник, складывают проводимости сторон треугольников, присоединенных к одним и тем же точкам цепи $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$, получая эквивалентный

треугольник (рис. 12-30, б); 4) преобразуя этот треугольник в эквивалентную звезду и складывая сопротивления лучей звезды с сопротивлениями участков проводов $Z'_{\text{лА}}, Z'_{\text{лВ}}, Z'_{\text{лС}}$, получают схему (рис. 12-30, в), расчет которой рассмотрен в § 12-4; 5) определив фазные токи генератора, равные токам в сопротивлениях участков проводов линии $Z'_{\text{лА}}, Z'_{\text{лВ}}, Z'_{\text{лС}}$, найдем падения напряжения на этих участках и напряжения между точками $A'B'C'$ (рис. 12-27). Определение остальных параметров цепи рассмотрено выше (§ 12-4—12-6).

12-7

Мощность трехфазной цепи

Мгновенная мощность трехфазной цепи равна сумме мгновенных мощностей трех фаз:

$$p = p_A + p_B + p_C = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C. \quad (12-38)$$

При симметричном режиме каждый фазный ток отстает от соответствующего фазного напряжения на один и тот же угол и мгновенная мощность

$$\begin{aligned} p_A &= U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin (\omega t - \varphi) = \\ &= U_\phi I_\phi \cos \varphi - U_\phi I_\phi \cos (2\omega t - \varphi); \\ p_B &= U_m \sin (\omega t - 120^\circ) \cdot I_m \sin (\omega t - 120^\circ - \varphi) = \\ &= U_\phi I_\phi \cos \varphi - U_\phi I_\phi \cos (2\omega t - 240^\circ - \varphi); \\ p_C &= U_m \sin (\omega t + 120^\circ) \cdot I_m \sin (\omega t + 120^\circ - \varphi) = \\ &= U_\phi I_\phi \cos \varphi - U_\phi I_\phi \cos (2\omega t + 240^\circ - \varphi), \end{aligned}$$

где принято во внимание, что

$$U_\phi I_\phi = U_m I_m / 2.$$

Учитывая, что $U_\phi I_\phi \cos (2\omega t - \varphi) + U_\phi I_\phi \times$
 $\times \cos (2\omega t - 240^\circ - \varphi) + U_\phi I_\phi \cos (2\omega t + 240^\circ - \varphi) =$
 $= 0$, получаем:

$$p = p_A + p_B + p_C = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi.$$

Таким образом, при симметричном режиме мгновенная мощность трехфазной цепи в течение периода остается постоянной, т. е. не зависит от времени и равна активной мощности цепи:

$$p = P = 3P_\phi. \quad (12-38a)$$

Трехфазная цепь, мгновенная мощность которой постоянна, называется уравновешенной. Таким образом, трех-

фазный электродвигатель развивает на валу постоянную мощность, чем он выгодно отличается от однофазного, мощность которого в течение периода изменяется.

Активная мощность трехфазной цепи равна сумме активных мощностей всех трех фаз:

$$P = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C. \quad (12-39)$$

При симметричном режиме работы $U_A = U_B = U_C = U_\phi$; $I_A = I_B = I_C = I_\phi$ и $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi$. Таким образом,

$$P = 3P_\phi = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = \sqrt{3} UI \cos \varphi, \quad (12-40)$$

так как при соединении приемников звездой

$$I_\phi = I_\lambda = I \text{ и } U_\phi = U_\lambda / \sqrt{3} = U / \sqrt{3},$$

а при соединении треугольником

$$I_\phi = I_\lambda / \sqrt{3} = I / \sqrt{3} \text{ и } U_\phi = U_\lambda = U.$$

Следует помнить, что у линейных токов и напряжений индексы «л» часто не пишут, также не пишут индексы у углов сдвига фаз φ между фазными напряжением и током.

Реактивная мощность трехфазной цепи равна алгебраической сумме реактивных мощностей трех фаз

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = I_A U_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C. \quad (12-41)$$

При симметричном режиме работы реактивная мощность цепи

$$Q = 3Q_\phi = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi = \sqrt{3} UI \sin \varphi. \quad (12-42)$$

При симметричном режиме работы полная мощность трехфазной цепи

$$S = 3S_\phi = 3U_\phi I_\phi = \sqrt{3} UI. \quad (12-43)$$

Из написанных соотношений (12-40), (12-42) и (12-43) следует, что при симметричном режиме

$$\cos \varphi = P/S; \sin \varphi = Q/S \text{ и } \operatorname{tg} \varphi = Q/P.$$

Пример 12-9. В сеть с напряжением $U = 220$ В включен симметричный приемник, соединенный звездой. Полное сопротивление фазы приемника $z_\phi = 10$ Ом, а ее активное сопротивление $r_\phi = 8$ Ом.

Определить активную мощность приемника.

Решение. Коэффициент мощности

$$\cos \varphi = r_\phi / z_\phi = 8/10 = 0,8.$$

Фазные напряжения и токи

$$U_{\phi} = U / \sqrt{3} = 220 / \sqrt{3} = 127 \text{ В};$$

$$I_{\phi} = I_{\phi} = U_{\phi} / z_{\phi} = 127 / 10 = 12,7 \text{ А}.$$

Активная мощность

$$P = 3U_{\phi}I_{\phi} \cos \varphi = 3 \cdot 127 \cdot 12,7 \cdot 0,8 = 3870 \text{ Вт} = 3,87 \text{ кВт}.$$

Пример 12-10. Активная мощность трехфазной цепи 40 кВт, а реактивная мощность 30 квар. Определить $\cos \varphi$.

Решение.

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ кВ} \cdot \text{А};$$

$$\cos \varphi = P/S = 40/50 = 0,8.$$

12-8

Измерение мощности

При симметричном режиме работы трехфазной цепи, измерив мощность одной фазы и умножив ее на 3, получим мощность всей цепи.

На рис. 12-31, а и б даны схемы включения однофазного ваттметра для измерения активной мощности одной фазы при соединении приемников энергии звездой и треугольником. В обеих схемах токовая обмотка ваттметра включена последовательно с той фазой приемника, параллельно которой включена цепь напряжения ваттметра.

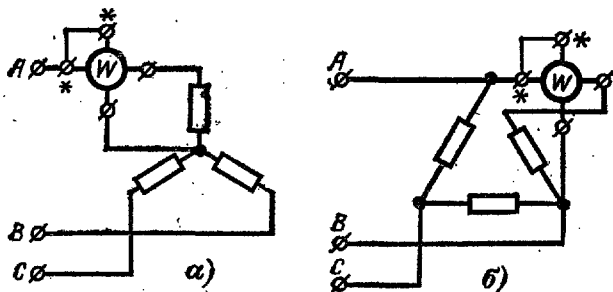


Рис. 12-31. Схема включения ваттметра для измерения мощности в трехфазной цепи при равномерной нагрузке и доступной нулевой точке (а); при соединении приемников энергии треугольником и равномерной нагрузке фаз (б).

При возможном асимметричном режиме работы трехфазной трехпроводной цепи измерение мощности производится двумя ваттметрами (рис. 12-32). Покажем, что достаточно двух ваттметров для измерения активной мощности.

Мгновенная мощность трехфазной цепи (12-38)

$$p = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C.$$

Если приемники энергии соединены звездой, то $i_A + i_B + i_C = 0$, откуда

$$i_C = -i_A - i_B.$$

Подставив это выражение тока в формулу мощности, получим:

$$p = u_A i_A + u_B i_B - u_C i_A - u_C i_B$$

или

$$p = (u_A - u_C) i_A + (u_B - u_C) i_B$$

Так как при соединении звездой разность двух фазных напряжений равна линейному напряжению

$$u_A - u_C = u_{AC} \quad \text{и} \quad u_B - u_C = u_{BC},$$

то

$$p = u_{AC} i_A + u_{BC} i_B = p_1 + p_2,$$

т. е. мгновенная мощность трехфазной цепи может быть представлена суммой двух слагающих p_1 и p_2 .

Следовательно, если включить один ваттметр так, чтобы по его последовательной обмотке проходил ток i_A и на параллельной цепи было напряжение u_{AC} (рис. 12-32), то этот ваттметр измеряет величину

$$P_1 = U_{AC} I_A \cos \psi_1,$$

где ψ_1 — угол сдвига фаз между U_{AC} и I_A .

Второй ваттметр (рис. 12-32) при токе i_B в его последовательной обмотке и напряжении u_{BC} на его параллельной цепи измерит величину

$$P_2 = U_{BC} I_B \cos \psi_2,$$

где ψ_2 — угол сдвига фаз между U_{BC} и I_B .

Но если сумма слагающих p_1 и p_2 равна мгновенной мощности трехфазной цепи, то сумма величин P_1 и P_2 равна средней за период мощности трехфазной цепи, т. е.

$$P = P_1 + P_2 = U_{AC} I_A \cos \psi_1 + U_{BC} I_B \cos \psi_2.$$

Таким образом, складывая показания двух ваттметров, включенных по схеме рис. 12-32, получаем мощность трехфазной цепи. При этом каждая из величин P_1 и P_2 отдельно никакой реальной мощности не выражает.

В частном случае равномерной нагрузки фаз (см. векторную диаграмму, рис. 12-33)

$$\psi_1 = 30^\circ - \varphi \quad \text{и} \quad \psi_2 = 30^\circ + \varphi;$$

следовательно, показания ваттметров будут:

$$P_1 = U_L I_L \cos (30^\circ - \varphi) \quad \text{и} \quad P_2 = U_L I_L \cos (30^\circ + \varphi). \quad (12-44)$$

При активной равномерной нагрузке ($\varphi = 0$) показания ваттметров одинаковы. При смешанной равномерной нагрузке и $\cos \varphi = 0,5$ ($\varphi = 60^\circ$) показание второго ваттметра равно нулю, так как $P_2 = U_L I_L \cos (30^\circ + 60^\circ) = 0$. В этом случае мощность всей цепи определяется показаниями одного первого ваттметра.

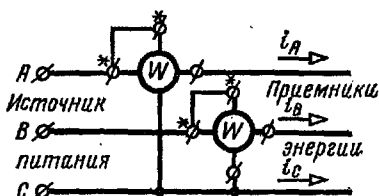


Рис. 12-32. Схема включения двух ваттметров для измерения мощности трехфазной цепи методом двух ваттметров.

направление тока в одной из обмоток ваттметра (обычно в параллельной).

Действительно.

$$P_1 - P_2 = U_n I_n [\cos(30^\circ - \varphi) - \cos(30^\circ + \varphi)] = U_n I_n \sin \varphi,$$

а реактивная мощность трех-
фазной цепи

$$Q = \sqrt{3} U_n I_n \sin \varphi = \sqrt{3} (P_1 - P_2). \quad (12-45)$$

Таким образом, для определения реактивной мощности не-

обходимо из показаний первого ваттметра вычесть показания второго ваттметра и разность умножить на $\sqrt{3}$. Разность $P_1 - P_2$, как и их сумма, алгебраическая величина.

Мы рассмотрели измерение мощности трехфазной цепи методом двух ваттметров для случая соединения приемников энергии звездой. Можно показать, что полученные выводы остаются справедливыми и для случая соединения приемников энергии треугольником, так как соединение треугольником всегда можно заменить эквивалентной звездой.

Вместо двух ваттметров чаще применяют двухэлементный ваттметр, по показанию которого непосредственно определяется мощность трехфазной цепи.

Активная мощность четырехпроводной трехфазной цепи определяется суммой показаний трех ваттметров, каждый из которых измеряет мощность одной фазы (рис. 12-34). Вместо трех ваттметров часто применяется один трехэлементный ваттметр, схема включения которого ничем не отличается от схемы включения трех ваттметров (рис. 12-34).

Пример 12-11. Два ваттметра измеряют мощность в трехпроводной симметричной трехфазной цепи (рис. 12-32). Показания ваттметров $P_1 = 1\ 600$ Вт; $P_2 = 800$ Вт. Линейное напряжение цепи $U_L = 220$ В. Определить линейные токи.

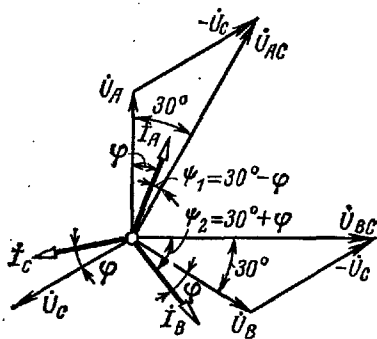


Рис. 12-33. Векторная диаграмма цепи, изображенной на рис. 12-32.

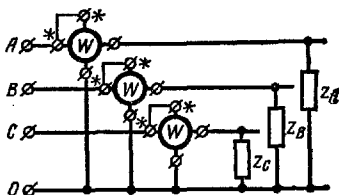


Рис. 12-34. Схема измерения мощности в четырехпроводной трехфазной цепи.

Решение. Угол сдвига фаз

$$\varphi = \arctg \frac{Q}{P} = \arctg \sqrt{3} \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} = \arctg \sqrt{3}/3 = 79^\circ.$$

Линейные токи

$$I_L = \frac{P_1}{U_A \cos(30^\circ - \varphi)} = \frac{1600}{220 \cdot 0,656} = 11 \text{ А.}$$

12-9

Вращающееся магнитное поле трехфазной системы

Получение вращающегося поля. Большим достоинством трехфазной системы является возможность получения вращающегося магнитного поля, которое находит широкое применение в электрических машинах. Рассмотрим принцип получения вращающегося магнитного поля.

На внутренней поверхности стального цилиндра — статоре трехфазного электродвигателя (рис. 12-35) укреплены три одинаковые катушки $AХ$, $ВУ$ и $СΖ$, соединенные звездой. Оси катушек сдвинуты в пространстве на углы 120°

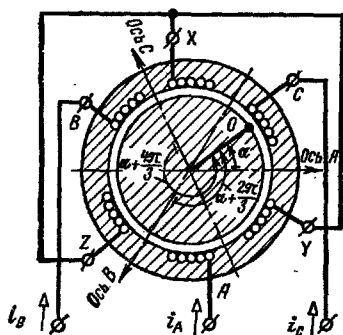


Рис. 12-35. Расположение обмоток на статоре трехфазного двигателя.

три одинаковые катушки $AХ$, $ВУ$ и $СΖ$, соединенные звездой. Оси катушек сдвинуты в пространстве на углы 120°

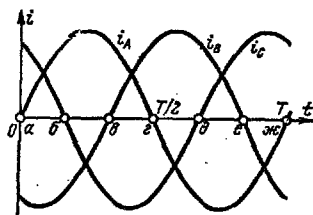


Рис. 12-36. Токи трехфазной системы.

относительно друг друга. По катушкам проходят токи трехфазной системы

$$i_A = I_m \sin \omega t; \quad i_B = I_m \sin(\omega t - 2\pi/3); \quad i_C = I_m \sin(\omega t + 2\pi/3),$$

изображенные на рис. 12-36.

Направление тока от начала каждой катушки к ее концу (рис. 12-35) примем за положительное. На рис. 12-37 катушки изображены упрощенно, каждая в виде одного витка, и для моментов времени $a, б, в, г, д, е, ж$ (рис. 12-36) показаны направления токов. Например, в момент a ток

в первой катушке равен нулю; ток в третьей катушке имеет положительное направление и поэтому в начале катушки (С) изображен крестиком (т. е. направлен за плоскость рисунка); ток во второй катушке имеет отрицательное направление и в начале катушки (В) изображен точкой.

Построив линии магнитной индукции, охватывающие одинаково направленные токи, для всех выбранных моментов времени, увидим, что направление суммарного магнитного потока в роторе (показано стрелкой) изменяется.

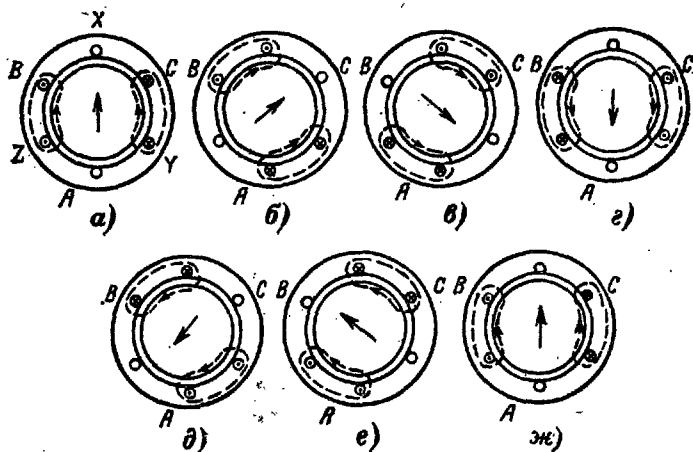


Рис. 12-37. Вращающийся магнитный поток трехфазной системы токов.

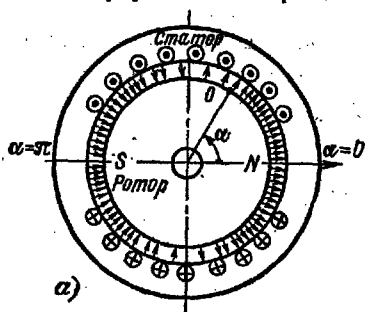
Суммарный магнитный поток вращается по направлению движения часовой стрелки и совершает в течение периода один оборот.

Направление вращения потока можно определить и следующим образом: когда ток в катушке достигает положительного максимального значения, направление вращающегося потока совпадает с положительным направлением осей А, В и С указаны на рис. 12-35 стрелками, они определяются по правилу буравчика; поэтому, определив порядок чередования амплитуд тока в катушках, можно легко установить направление вращения потока.

Для изменения направления вращения магнитного потока достаточно изменить последовательность фаз, т. е.

поменять токи в двух катушках, например, вторую катушку присоединить к фазе С, третью к фазе В. В этом нетрудно убедиться, выполнив построения, аналогичные рассмотренным.

Уравнение вращающегося магнитного поля. Допустим, что на внутренней поверхности статора (рис. 12-38) уложен



ряд витков, по которым проходит постоянный ток. Линии магнитной индукции охватывают токи, проходящие по виткам (на рис. 12-38, а линии индукции показаны только в воздушном зазоре).

Соответствующим неравномерным размещением

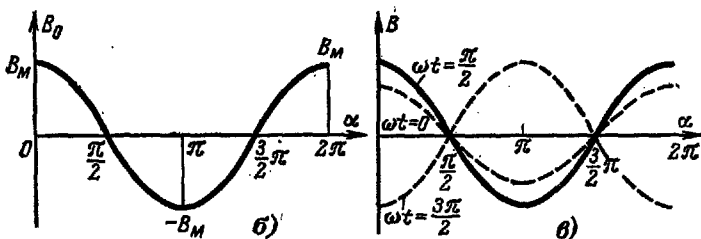


Рис. 12-38. Магнитный поток с косинусоидальным распределением индукции в воздушном зазоре (а), (б) и изменение магнитной индукции в зависимости от времени — пульсирующий поток (в).

витков на поверхности статора можно получить магнитную индукцию в воздушном зазоре, изменяющуюся по закону

$$B_0 = B_m \cos \alpha. \quad (12-46)$$

Здесь B_0 — индукция в произвольной точке зазора 0; α — угол, образованный осью катушки и радиусом, соединяющим точку 0 с центром катушки; B_m — наибольшее значение индукции в зазоре на оси катушки, т. е. в точках, где угол α равен нулю и π ; там, где этот угол равен $\pi/2$ и $3\pi/2$, магнитная индукция равна нулю (рис. 12-38, б). Условимся считать в соответствии с законом $B_0 = B_m \cos \alpha$ магнитную индукцию положительной там, где магнитные линии входят в статор, и отрицательной там, где они из него выходят.

При постоянном токе индукция в зазоре с течением времени не изменяется, но в точках, смещенных относительно оси катушки на разные углы α , имеет различные значения.

При переменном токе $i = I_m \sin \omega t$ форма магнитных линий остается прежней, но магнитная индукция в каждой точке зазора изменяется во времени пропорционально току (рис. 12-38, в). Изменение направления тока означает изменение направления магнитных линий на противоположное. Такой магнитный поток называется пульсирующим. Закон изменения его индукции в произвольной точке зазора

$$B = B_0 \sin \omega t = B_m \sin \omega t \cos \alpha, \quad (12-47)$$

или после тригонометрического преобразования по формуле

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} \sin(x - y) + \frac{1}{2} \sin(x + y), \quad (12-48)$$

магнитная индукция

$$B = \frac{1}{2} B_m \sin(\omega t - \alpha) + \frac{1}{2} B_m \sin(\omega t + \alpha).$$

Выразим теперь магнитную индукцию поля B в произвольной точке зазора трехфазной машины. Магнитный поток в этом случае возбуждается тремя токами, которые проходят по трем катушкам (обмоткам), расположенным на статоре и сдвинутым в пространстве (рис. 12-35) на углы $2\pi/3$; между токами обмоток сдвиг по фазе также равен $2\pi/3$.

Ток в обмотке $AХ$ создает составляющую магнитной индукции, определяемую по (12-47):

$$B_A = B_m \sin \omega t \cos \alpha.$$

Составляющие магнитной индукции, создаваемые токами в двух других обмотках, сдвинуты по фазе на углы $\pm 2\pi/3$, так как токи сдвинуты по фазе, и смещены в пространстве на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$ из-за смещения осей обмоток. Следовательно,

$$B_B = B_m \sin(\omega t - 2\pi/3) \cos(\alpha + 2\pi/3);$$

$$B_C = B_m \sin(\omega t + 2\pi/3) \cos(\alpha + 4\pi/3),$$

причем каждая составляющая B_A , B_B , B_C — это индукция пульсирующего поля.

Результирующая магнитная индукция в произвольной точке

$$B = B_A + B_B + B_C.$$

После разложения каждой из составляющих индукции на два слагаемых по формуле (12-48) получим:

$$B_A = \frac{1}{2} B_m \sin(\omega t - \alpha) + \frac{1}{2} B_m \sin(\omega t + \alpha); \quad (12-48a)$$

$$B_B = \frac{1}{2} B_m \sin(\omega t - \alpha - 4\pi/3) + \frac{1}{2} B_m \sin(\omega t + \alpha); \quad (12-48б)$$

$$B_C = \frac{1}{2} B_m \sin(\omega t - \alpha - 2\pi/3) + \frac{1}{2} B_m \sin(\omega t + \alpha). \quad (12-48в)$$

Сумма первых слагаемых трех составляющих равна нулю. Поэтому результирующая магнитная индукция B равна сумме вторых слагаемых, т. е.

$$B = \frac{3}{2} B_m \sin(\omega t + \alpha). \quad (12-49)$$

Выясним физический смысл выражения (12-49).

Аргумент синуса составляет сумма $\omega t + \alpha$. Если бы эта сумма не зависела от времени, то индукция в любой точке зазора была бы постоянной. Но при $\alpha = \text{const}$, т. е. в любой выбранной точке O , аргумент $\omega t + \alpha$ не остается постоянным, поэтому индукция в любой выбранной точке изменяется в зависимости от времени пропорционально $\sin(\omega t + \alpha)$.

Предположим, что выбранная точка O (рис. 12-35) перемещается так, что $\omega t + \alpha$ остается постоянным; для этого точка O должна перемещаться по направлению движения часовой стрелки, т. е. в сторону уменьшающегося угла α , так как ωt увеличивается. Известное соотношение $\omega T = 2\pi$ позволяет заключить, что одному периоду переменного тока соответствует изменение угла α на величину 2π , т. е. один оборот точки O , и что угловая скорость точки, в которой индукция неизменна, равна ω . Таким образом, мы приходим к важному выводу: формула (12-49) выражает индукцию магнитного потока, неизменного по величине и вращающегося по направлению движения часовой стрелки, — вращающегося магнитного потока. Амплитуда результирующей магнитной индукции в 1,5 раз больше амплитуды магнитной индукции поля одной катушки.

Составляющие пульсирующего потока. Рассматривая выражения для пульсирующего магнитного потока, например (12-48a), можно сделать вывод, что пульсирующий магнитный поток является суммой двух вращающихся потоков; слагаемое $\frac{1}{2} B_m \sin(\omega t - \alpha)$ определяет индукцию

потока, вращающегося против направления движения часовой стрелки, а слагаемое $\frac{1}{2} B_m \sin(\omega t + \alpha)$ — индукцию потока, вращающегося по направлению движения часовой стрелки.

12-10

Принцип действия асинхронных электродвигателей

Принцип действия трехфазных электродвигателей основан на применении вращающегося магнитного потока.

В асинхронных трехфазных двигателях обмотка состоит из трех катушек, расположенных на неподвижной станине — статоре, внутри которого помещен стальной барабан — ротор; в пазах ротора уложены провода, соединенные между собой на обоих торцах кольцами.

Вращающийся магнитный поток, пересекая провода обмотки ротора, наводит в них э. д. с., и в проводах возникает ток. Ток, взаимодействуя с вращающимся магнитным потоком, вызывает силу, увлекающую ротор вслед за вращающимся потоком. С ростом частоты вращения ротора уменьшается скорость, с которой магнитные линии пересекают проводники ротора; если бы ротор достиг той же частоты вращения, что и магнитный поток статора, то пересечения проводников не происходило бы и ток в роторе стал бы равен нулю; следовательно, при наличии тормозного момента магнитный поток и ротор не могут вращаться с одинаковой частотой (синхронно); частота вращения ротора всегда несколько меньше. Поэтому двигатели такого типа называются асинхронными (т. е. несинхронными).

12-11

Вращающееся магнитное поле двухфазной системы

В некоторых измерительных приборах получают вращающийся магнитный поток, создаваемый двухфазной системой переменных токов в двух перпендикулярно расположенных катушках (рис. 12-39).

Двухфазную систему образуют два переменных тока, один из которых опережает другой по фазе на 90° :

$$i_1 = I_m \sin \omega t; \quad i_2 = I_m \sin(\omega t - \pi/2).$$

В воздушном зазоре прибора (рис. 12-39) магнитные индукции B_1 и B_2 пропорциональны соответствующим токам, совпадают с ними по фазе и определяются выражениями

$$B_1 = B_m \sin \omega t \cdot \cos \alpha;$$

$$B_2 = B_m \sin(\omega t - \pi/2) \cdot \cos(\alpha + \pi/2) = B_m \cos \omega t \cdot \sin \alpha.$$

Суммарная индукция

$$\begin{aligned} B &= B_1 + B_2 = B_m (\sin \omega t \times \\ &\times \cos \alpha + \cos \omega t \cdot \sin \alpha) = \\ &= B_m \sin(\omega t + \alpha), \quad (12-50) \end{aligned}$$

т. е. амплитуда результирующей индукции постоянна и равна амплитуде индукции одной катушки. При этом магнитный поток вращается по направлению движения часовой стрелки с угловой скоростью, равной угловой частоте тока ω , и за период совершает один оборот.

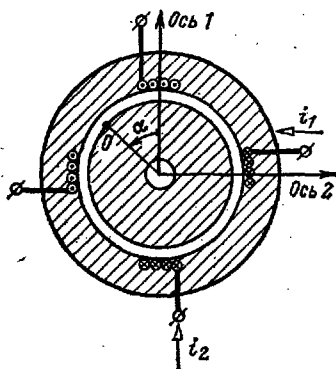


Рис. 12-39. Две катушки статора для получения вращающегося магнитного потока.

12-12

Определение последовательности фаз

Различают прямую последовательность фаз, когда положительный максимум тока, напряжения или э. д. с. наступает сначала в фазе A , затем в фазе B , в фазе C , снова в фазе A и т. д., и обратную последовательность фаз, когда положительный максимум тока, напряжения или э. д. с. наступает сначала в фазе A , затем в фазе C , в фазе B , снова в фазе A и т. д.

Часто необходимо знать последовательность фаз в трехфазной цепи, например чтобы определить направление вращения асинхронного двигателя, который будет включен в сеть. Для определения последовательности фаз можно пользоваться фазоуказателем, работа которого основана на применении вращающегося магнитного потока.

Фазоуказатель состоит из трех катушек, выведенные зажимы которых помечены буквами A , B и C (или цифрами 1, 2 и 3). Эти зажимы присоединяются к проводам трехфазной цепи, причем катушка A присоединяется к любому из трех проводов. Этот провод в дальнейшем считается проводом фазы A . Катушки B и C присоединяются к двум другим проводам (рис. 12-40).

Над катушками на острие насажен легкий алюминиевый диск, который вращается в направлении вращения магнитного потока. Причина вращения та же, что и ротора асинхронного двигателя. На диске нарисована стрелка (рис. 12-40). Если диск вращается в направлении стрелки, последовательность фаз — прямая, т. е. катушка B при-

соединена к фазе *B*, а катушка *C* к фазе *C*, если в обратную сторону — обратная, т. е. катушка *B* присоединена к фазе *C*, а катушка *C* к фазе *B*.

Применяются фазоуказатели и другого типа. Присоединим к проводам трехфазной цепи две лампы и конденсатор, соединенные звездой (рис. 12-41), приняв за фазу *A* ту, в которую включен конденсатор.

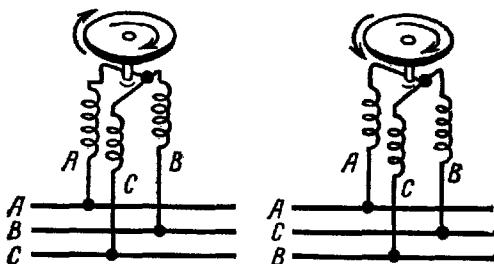


Рис. 12-40. Схема фазоуказателя с вращающимся диском.

Предположим, что проводимости ламп и конденсатора одинаковы ($y_A = y_B = y_C = y$) и представим проводимости фаз комплексными числами $Y_A = jy$; $Y_B = Y_C = y$.

Считая систему линейных напряжений симметричной и $\dot{U}_A = U_A = U_\phi$, выражаем фазные напряжения комплексными числами и определяем смещение нейтрали:

$$\begin{aligned}\dot{U}_N &= \frac{\dot{U}_A Y_A + \dot{U}_B Y_B + \dot{U}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = \frac{U_\phi jy + U_\phi e^{-j120^\circ} y + U_\phi e^{j120^\circ} y}{2y + jy} = \\ &= \frac{jU_\phi - \frac{1}{2}U_\phi - j\frac{\sqrt{3}}{2}U_\phi - \frac{1}{2}U_\phi + j\frac{\sqrt{3}}{2}U_\phi}{2 + j} = -0,2U_\phi + j0,6U_\phi.\end{aligned}$$

Напряжение на лампе, включенной в фазу *B*,

$$\begin{aligned}\dot{U}'_B &= \dot{U}_B - \dot{U}_N = -\frac{1}{2}U_\phi - j\frac{\sqrt{3}}{2}U_\phi - (-0,2U_\phi + j0,6U_\phi) = \\ &= -0,3U_\phi - j1,47U_\phi;\end{aligned}$$

$$U'_B = \sqrt{(0,3U_\phi)^2 + (1,47U_\phi)^2} = 1,49U_\phi.$$

Напряжение на лампе, включенной в фазу *C*,

$$\begin{aligned}\dot{U}'_C &= \dot{U}_C - \dot{U}_N = -\frac{1}{2}U_\phi + j\frac{\sqrt{3}}{2}U_\phi - (-0,2U_\phi + j0,6U_\phi) = \\ &= -0,3U_\phi + j0,27U_\phi;\end{aligned}$$

$$U'_C = \sqrt{(0,3U_\phi)^2 + (0,27U_\phi)^2} = 0,4U_\phi.$$

По яркому накалу лампы ($U'_B > U'_C$) легко определить фазу B .

Для определения последовательности фаз можно вместо конденсатора пользоваться катушкой с большим индуктивным сопротивле-

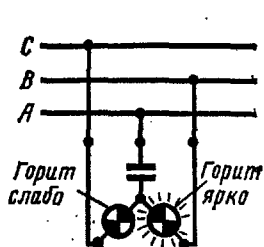


Рис. 12-41. Схема фазоуказателя с конденсатором.

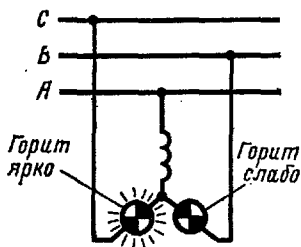


Рис. 12-42. Схема фазоуказателя с реактивной катушкой.

нием по сравнению с активным (рис. 12-42). Считая фазу, соединенную с катушкой, за A , фазу B определим по лампе со слабым накалом нити и фазу C — по яркому накалу лампы.

12-13

Симметричные составляющие несимметричной трехфазной системы

Метод симметричных составляющих упрощает расчет несимметричных режимов в трехфазных цепях и, в частности, аварийных режимов, например, возникающих при обрыве фазы, при коротких замыканиях фаз, замыкании фазы на землю и др. При расчете по методу симметричных составляющих применяется принцип наложения: несимметричный режим работы цепи рассматривается как результат наложения трех симметричных режимов.

Если нагрузка трехфазной цепи неравномерна, т. е. токи в линейных проводах неодинаковы, то различны и падения напряжения в них. Векторы фазных и линейных напряжений приемника также не равны по величине и сдвинуты между собой по фазе на различные углы. Причиной асимметрии напряжений и токов может быть не только неравномерность нагрузки фаз, но и несимметрия э. д. с. генератора, питающего трехфазную цепь, что, однако, на практике встречается редко.

Всякую несимметричную систему трех векторов можно разложить на три системы: 1) симметричную систему трех равных по величине векторов, в которой вектор фазы B (или BC) отстает на 120° от вектора фазы A (или AB), а вектор фазы C (или CA) опережает на 120° вектор фазы A

(или AB); 2) симметричную систему трех равных по величине векторов, в которой векторы фаз B (или BC) и C (или CA) сдвинуты по отношению к вектору фазы A (или AB) на 120° в обратную первому случаю сторону; 3) систему трех равных и совпадающих по направлению векторов (рис. 12-43). Первая из этих систем называется системой прямой последовательности фаз, вторая — системой обратной последовательности фаз, а третья — системой нулевой последовательности фаз. У векторов прямой последова-

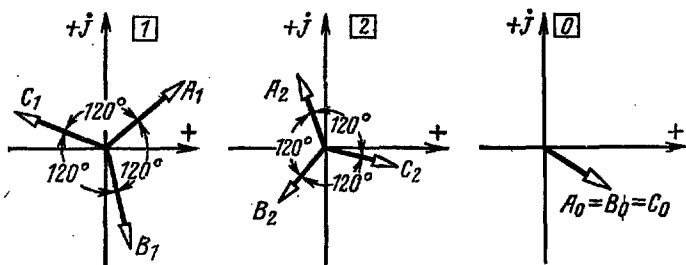


Рис. 12-43. Векторы прямой (1), обратной (2) и нулевой (0) последовательностей.

тельности ставится индекс 1, обратной — индекс 2 и нулевой — индекс 0.

Введем для краткости обозначение

$$e^{+j2\pi/3} = e^{j120^\circ} = a. \quad (12-51)$$

Умножение какого-либо вектора на этот «оператор» соответствует повороту вектора на 120° вперед (по направлению вращения векторов, т. е. против направления вращения часовой стрелки). Так как поворот назад на 120° равносителен двукратному повороту вперед на те же 120° , то

$$e^{-j2\pi/3} = e^{j4\pi/3} = e^{j240^\circ} = a^2. \quad (12-52)$$

Заметим еще, что умножение векторов на a^3 соответствует трехкратному повороту на 120° , в результате чего вектор возвращается в первоначальное положение. Поэтому

$$a^3 = 1; \quad (12-53)$$

$$a^4 = a^3 a = a. \quad (12-54)$$

Наконец, так как сумма трех равных векторов, образующих симметричную звезду с углами по 120° , равна нулю (рис. 12-44), то

$$1 + a + a^2 = 0. \quad (12-55)$$

Чтобы доказать возможность разложения любой несимметричной системы на симметричные составляющие и одновременно получить необходимые для этого разложения формулы, предположим, что разложение уже выполнено и три несимметричных вектора (комплекса) $\dot{A}$, $\dot{B}$ и $\dot{C}$ следующим образом выражены через свои симметричные составляющие:

$$\dot{A} = \dot{A}_0 + \dot{A}_1 + \dot{A}_2; \quad (12-56)$$

$$\dot{B} = \dot{B}_0 + \dot{B}_1 + \dot{B}_2; \quad (12-57)$$

$$\dot{C} = \dot{C}_0 + \dot{C}_1 + \dot{C}_2, \quad (12-58)$$

где $\dot{A}_1$; $\dot{B}_1 = a^2 \dot{A}_1$ и $\dot{C}_1 = a \dot{A}_1$ обозначают симметричные векторы прямой последовательности, $\dot{A}_2$; $\dot{B}_2 = a \dot{A}_2$ и $\dot{C}_2 = a^2 \dot{A}_2$ — симметричные векторы обратной последовательности и $\dot{A}_0 = \dot{B}_0 = \dot{C}_0$ — одинаковые векторы нулевой последовательности фаз.

Пользуясь этими соотношениями, придаем последней системе уравнений следующий вид:

$$\dot{A} = \dot{A}_0 + \dot{A}_1 + \dot{A}_2; \quad (12-59)$$

$$\dot{B} = \dot{A}_0 + a^2 \dot{A}_1 + a \dot{A}_2; \quad (12-60)$$

$$\dot{C} = \dot{A}_0 + a \dot{A}_1 + a^2 \dot{A}_2. \quad (12-61)$$

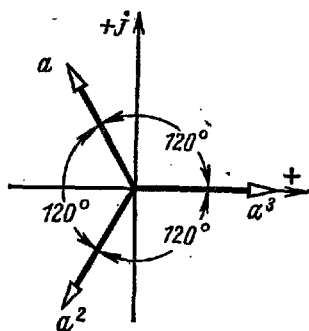


Рис. 12-44. Векторы-операторы симметричной трехфазной системы.

После решения этой системы трех уравнений относительно неизвестных векторов $\dot{A}_0$, $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ и получаются искомые формулы, при помощи которых можно произвести разложение; тем самым и доказывается возможность разложения трех векторов $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$ на симметричные составляющие.

Сложив почленно уравнения (12-59)—(12-61), получим:

$$\begin{aligned} \dot{A} + \dot{B} + \dot{C} &= \dot{A}_0 + \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_0 + a^2 \dot{A}_1 + a \dot{A}_2 + \dot{A}_0 + \\ &+ a \dot{A}_1 + a^2 \dot{A}_2 = 3\dot{A}_0 + \dot{A}_1(1 + a^2 + a) + \\ &+ \dot{A}_2(1 + a + a^2) = 3\dot{A}_0, \end{aligned}$$

откуда составляющая нулевой последовательности

$$\dot{A}_0 = (\dot{A} + \dot{B} + \dot{C})/3. \quad (12-62)$$

Для того чтобы определить составляющую прямой последовательности $\dot{A}_1$, умножим уравнение (12-60) на a ,

а уравнение (12-61) — на a^2 . В результате система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \dot{A}_0 + \dot{A}_1 + \dot{A}_2; \\ a\dot{B} &= a\dot{A}_0 + \dot{A}_1 + a^2\dot{A}_2; \\ a^2\dot{C} &= a^2\dot{A}_0 + \dot{A}_1 + a\dot{A}_2.\end{aligned}$$

Складывая почленно, находим:

$$\dot{A} + a\dot{B} + a^2\dot{C} = \dot{A}_0(1 + a + a^2) + 3\dot{A}_1 + \dot{A}_2(1 + a^2 + a) = 3\dot{A}_1,$$

откуда составляющая прямой последовательности фаз

$$\dot{A}_1 = (\dot{A} + a\dot{B} + a^2\dot{C})/3. \quad (12-63)$$

Для определения составляющей обратной последовательности фаз умножим (12-60) на a^2 , а (12-61) — на a ; в этом случае получим систему уравнений

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \dot{A}_0 + \dot{A}_1 + \dot{A}_2; \\ a^2\dot{B} &= a^2\dot{A}_0 + a\dot{A}_1 + \dot{A}_2; \\ a\dot{C} &= a\dot{A}_0 + a^2\dot{A}_1 + \dot{A}_2.\end{aligned}$$

Складывая почленно, найдем:

$$\dot{A} + a^2\dot{B} + a\dot{C} = \dot{A}_0(1 + a^2 + a) + \dot{A}_1(1 + a + a^2) + 3\dot{A}_2 = 3\dot{A}_2,$$

откуда

$$\dot{A}_2 = (\dot{A} + a^2\dot{B} + a\dot{C})/3. \quad (12-64)$$

Пример 12-12. Определить симметричные составляющие линейных напряжений:

$$\dot{U}_{AB} = (-120 + j90) \text{ В}; \quad \dot{U}_{BC} = 120 \text{ В} \quad \text{и} \quad \dot{U}_{CA} = -j90 \text{ В}.$$

Решение. Составляющая нулевой последовательности по (12-62)

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA}}{3} = \frac{-120 + j90 + 120 - j90}{3} = 0.$$

Составляющая прямой последовательности по (12-63)

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{U}_{AB} + a\dot{U}_{BC} + a^2\dot{U}_{CA}}{3};$$

имея в виду, что

$$a = e^{j120^\circ} = -0,5 + j0,866; \quad a^2 = e^{-j120^\circ} = -0,5 - j0,866,$$

получаем:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \frac{-120 + j90 + (-0,5 + j0,866)120 + (-0,5 - j0,866)(-j90)}{3} = \\ &= (-86 + j79,6) \text{ В}.\end{aligned}$$

Составляющие обратной последовательности по (12-64)

$$\begin{aligned}\dot{U}_2 &= \frac{\dot{U}_{AB} + a^2 \dot{U}_{BC} + a \dot{U}_{CA}}{3} = \\ &= \frac{-120 + j90 + (-0,5 - j0,866) 120 + (-0,5 + j0,866) (-j90)}{3} = \\ &= (-34 + j10,4) \text{ В.}\end{aligned}$$

Так как сумма трех линейных напряжений трехфазной цепи во всех случаях равна нулю, то всегда

$$\dot{U}_{0л} = \frac{\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA}}{3} = 0, \quad (12-65)$$

т. е. линейные напряжения ни при каких условиях не имеют составляющих нулевой последовательности. Чем более несимметрична система линейных напряжений, тем большие слагающие обратной последовательности она имеет. Поэтому процентное отношение слагающих обратной и прямой последовательностей в системе линейных напряжений

$$\frac{U_{2л}}{U_{1л}} 100 \% \quad (12-66)$$

является мерой несимметрии этой системы и называется ее степенью асимметрии. Согласно электротехническим правилам и нормам степень асимметрии не должна превышать 5%.

Пример 12-13. Линейное напряжение имеет симметричные составляющие $U_1 = 200$ В и $U_2 = 8$ В. Определить ее степень асимметрии.

Решение. Степень асимметрии

$$\frac{U_2}{U_1} 100\% = \frac{8 \cdot 100}{200} = 4,0\%.$$

Разложим несимметричную систему трехфазных токов на симметричные составляющие прямой, обратной и нулевой последовательностей. Сумма трех симметричных токов прямой последовательности равна нулю, также равна нулю сумма токов обратной последовательности. Поэтому ток в нейтральном проводе, равный сумме трех линейных токов, определяется как сумма токов нулевой последовательности, деленная на три (12-62).

Несинусоидальные токи

13-1

Основные понятия

В предыдущих главах рассматривались цепи с синусоидальными э. д. с., напряжениями и токами.

Токи и напряжения в значительной части электрических устройств и прежде всего в энергетических установках действительно можно считать синусоидальными. Однако в ряде случаев токи и напряжения отличаются от синусоидальных. Причиной появления несинусоидальных напряжений и токов могут быть как генераторы, так и приемники энергии.

В машинных генераторах одной из причин искажения формы кривой э. д. с. является несинусоидальное распределение магнитной индукции в воздушном зазоре из-за наличия у якоря зубцов и впадин, реакции якоря и т. д. Несинусоидальные напряжения получаются во многих ламповых генераторах и других устройствах и приборах в радиотехнике, электронике, связи и т. д.

В приемниках энергии и в трансформаторах со стальными сердечниками несинусоидальность тока или напряжения может быть вызвана нелинейной зависимостью между магнитным потоком и намагничивающим током. Несинусоидальные токи появляются в цепи во всех случаях работы приемников энергии с нелинейными вольт-амперными характеристиками (например вентилях, бареттеров, транзисторов и т. д.).

При изучении процессов в электрических цепях с несинусоидальными токами и напряжениями можно пользоваться теоремой Фурье, согласно которой всякая периодически изменяющаяся величина (э. д. с., напряжение, ток) рассматривается как сумма постоянной (независимой от времени) величины и ряда синусоидальных (гармонических) величин с кратными частотами.

Гармоническая составляющая, частота которой равна частоте несинусоидальной периодической величины, называется основной гармоникой; остальные гармоники, у которых частота в 2, 3, 4 (и т. д.) раз больше, называются высшими гармониками, т. е. второй гармоникой, третьей гармоникой и т. д.

В качестве примера на рис. 13-1—13-3 даны кривые несинусоидальных э. д. с., состоящих из двух синусоидальных составляющих (показаны пунктиром): основной

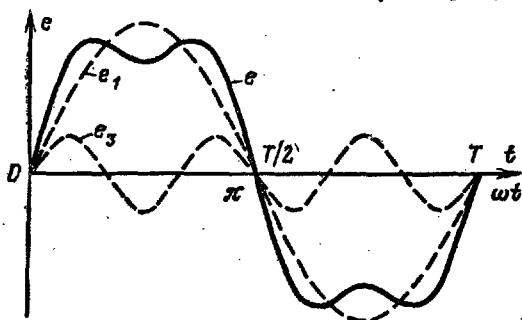


Рис. 13-1. Несинусоидальная кривая э. д. с., состоящая из основной и третьей гармоник с начальными фазами равными нулю.

синусоиды с той же частотой, что и данная несинусоидальная кривая, и третьей гармоникой, имеющей тройную частоту.

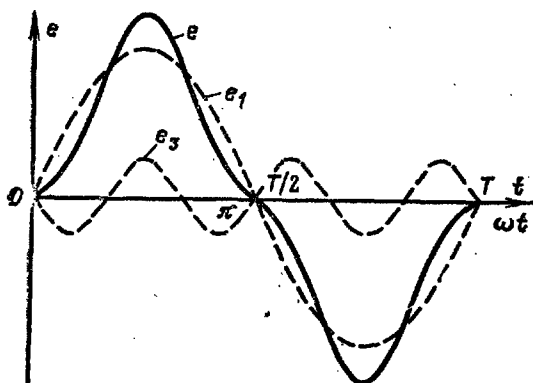


Рис. 13-2. Несинусоидальная кривая э. д. с., состоящая из основной гармоники с начальной фазой, равной нулю и третьей гармоники с начальной фазой, равной 180°.

Эти кривые отличаются друг от друга начальными фазами третьих гармоник; их уравнения

$$\begin{aligned} e &= e_1 + e_3 = E_{1m} \sin \omega t + E_{3m} \sin 3\omega t; \\ e &= e_1 + e_3 = E_{1m} \sin \omega t + E_{3m} \sin (3\omega t - \pi); \\ e &= e_1 + e_3 = E_{1m} \sin \omega t + E_{3m} \sin (3\omega t - \psi_3). \end{aligned}$$

Следует обратить внимание на то, что отрезок оси абсцисс, соответствующий одному периоду $T = 2\pi/\omega$ основной гармоник, соответствует k периодам k -й гармоник, т. е. масштаб по оси абсцисс, например, для третьей гармоник ($k = 3$) в 3 раза больше масштаба основной гармоник.

Как указывалось выше, всякая периодически изменяющаяся величина $f(\omega t)$ или $y(x)$ с периодом 2π может быть

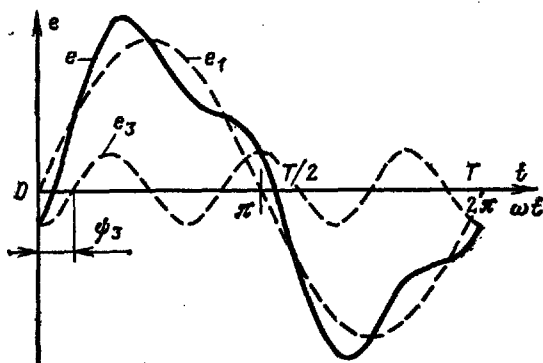


Рис. 13-3. Несинусоидальная кривая э. д. с., состоящая из основной и третьей гармоник с разными начальными фазами.

разложена на постоянную составляющую A_0 и ряд синусоид, т. е.

$$f(\omega t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots \quad (13-1)$$

или

$$y(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) + A_3 \sin(3x + \psi_3) + \dots, \quad (13-2)$$

где A_0 — постоянная составляющая; $A_1, A_2, A_3 \dots$ — амплитуды первой, второй, третьей и т. д. гармоник; $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \dots$ — начальные фазы.

Пользуясь известным из тригонометрии выражением синуса суммы двух углов, выражение любой k -й гармоник преобразуем так:

$$A_k \sin(kx + \psi_k) = A_k \sin kx \cos \psi_k + A_k \cos kx \sin \psi_k. \quad (13-3)$$

Обозначив

$$A_k \cos \psi_k = B_k; \quad A_k \sin \psi_k = C_k, \quad (13-4)$$

получим:

$$A_k \sin(kx + \psi_k) = B_k \sin kx + C_k \cos kx.$$

Таким образом, ряд (13-2) или ряд (13-1) можно представить в виде суммы ряда синусов и ряда косинусов с нулевыми начальными фазами. Для ряда (13-2)

$$y(x) = A_0 + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \dots \\ \dots + C_1 \cos x + C_2 \cos 2x + C_3 \cos 3x + \dots \quad (13-5)$$

Отметим, что в отличие от A_k величины B_k и C_k могут быть как положительными, так и отрицательными.

Если ряды синусоид и косинусоид с нулевыми начальными фазами (13-5) необходимо заменить одним рядом синусоид с начальными фазами, отличными от нуля (13-2), то амплитуды синусоид последнего ряда определяются по формуле

$$A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}, \quad (13-6)$$

а начальные фазы по (13-4) через их тангенсы

$$\operatorname{tg} \psi_k = \sin \psi_k / \cos \psi_k = C_k / B_k. \quad (13-7)$$

При определении ψ_k следует иметь в виду, что каждому значению $\operatorname{tg} \psi_k$ соответствуют два значения угла ψ_k , отличающиеся друг от друга на 180° ; поэтому при определении ψ_k через тангенс следует по знакам B_k и C_k , т. е. $\sin \psi_k$ и $\cos \psi_k$, выяснить, в какой четверти координат лежит угол, и в соответствии с этим выбрать одно из двух значений (см. пример 13-1).

13-2

Виды периодических кривых

Так как средняя за период (2π) ордината синусоиды равна нулю:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \frac{1}{2\pi} (\cos 0 - \cos 2\pi) = 0,$$

то средняя за период ордината периодической кривой, состоящей из ряда синусоид и не содержащей постоянной составляющей, также равна нулю:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [A_1 \sin(x + \psi_1) + \\ + A_2 \sin(2x + \psi_2) + \dots] \, dx = 0.$$

И, наоборот, если у периодической кривой средняя за период ордината равна нулю, то постоянная составляющая

такой кривой также равна нулю. Средняя ордината периодической кривой, состоящей из постоянной составляющей и ряда синусоид, равна постоянной составляющей

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [A_0 + A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) + A_3 \sin(3x + \psi_3) + \dots] dx = A_0. \quad (13-8)$$

Периодическая кривая называется симметричной относительно оси абсцисс, если любым двум абсциссам, отличающимся на половину периода, соответствуют ординаты,

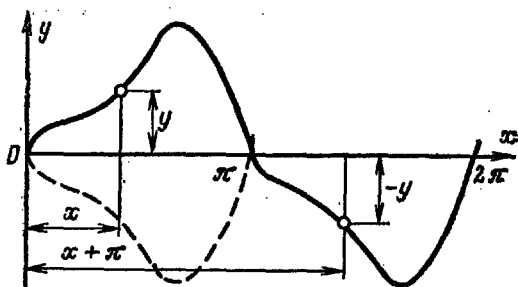


Рис. 13-4. Несинусоидальная кривая, симметричная относительно оси абсцисс.

равные по величине и обратные по знаку (рис. 13-4), т. е., если кривая удовлетворяет уравнению

$$y(x) = -y(x + \pi). \quad (13-9)$$

Такие кривые обладают тем свойством, что отрицательная полуволна, будучи сдвинутой на половину периода по оси абсцисс (пунктир на рис. 13-4), представляет собой зеркальное изображение положительной полуволны относительно оси абсцисс.

Кривые, симметричные относительно оси абсцисс, не содержат постоянной составляющей и высших гармоник четного порядка.

В самом деле, если

$$y(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) + A_3 \sin(3x + \psi_3) + \dots,$$

то

$$y(x + \pi) = A_0 + A_1 \sin(x + \pi + \psi_1) + A_2 \sin[2(x + \pi) + \psi_2] + A_3 \sin[3(x + \pi) + \psi_3] + \dots = A_0 - A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) - A_3 \sin(3x + \psi_3) + \dots$$

Так как симметричные относительно оси абсцисс кривые должны удовлетворять уравнению

$$y(x) = -y(x + \pi) \text{ или } y(x) + y(x + \pi) = 0,$$

т. е.

$$A_0 + A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) + A_3 \sin(3x + \psi_3) + \dots \\ \dots + A_0 - A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) - \\ - A_3 \sin(3x + \psi_3) + \dots = 0,$$

то

$$2A_0 + 2A_2 \sin(2x + \psi_2) + \dots = 0.$$

Последнее уравнение должно быть справедливо при любых значениях x , а это возможно лишь в том случае, если $A_0 = 0$; $A_2 = 0$; $A_4 = 0$ и т. д. Следовательно, кривая, симметричная относительно оси абсцисс, содержит только нечетные гармоники

$$y(x) = A_1 \sin(x + \psi_1) + A_3 \sin(3x + \psi_3) + \dots \quad (13-10)$$

или

$$y(x) = B_1 \sin x + B_3 \sin 3x + \dots \\ \dots + C_1 \cos x + C_3 \cos 3x + \dots \quad (13-11)$$

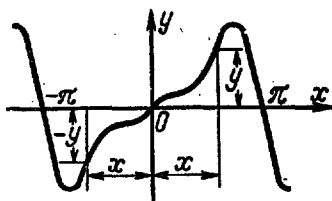


Рис. 13-5. Несинусоидальная кривая, симметричная относительно начала координат.

В электротехнике кривые, симметричные относительно оси абсцисс, встречаются часто, например кривые тока в катушке со стальным сердечником, подключенной к сети с синусоидальным напряжением (§ 14-3).

Периодическая кривая называется симметричной относительно начала координат, если любым двум абсциссам, имеющим одинаковое значение, но разные знаки, соответствуют ординаты, равные по величине и обратные по знаку (рис. 13-5), т. е. если кривая удовлетворяет уравнению

$$y(x) = -y(-x). \quad (13-12)$$

Так как

$$y(x) = A_0 + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \dots \\ \dots + C_1 \cos x + C_2 \cos 2x + C_3 \cos 3x + \dots,$$

$$\text{то } y(-x) = A_0 + B_1 \sin(-x) + B_2 \sin(-2x) + B_3 \sin(-3x) + \dots + C_1 \cos(-x) + C_2 \cos(-2x) + C_3 \cos(-3x) + \dots = A_0 - B_1 \sin x - B_2 \sin 2x - B_3 \sin 3x - \dots + C_1 \cos x + C_2 \cos 2x + C_3 \cos 3x + \dots$$

(при изменении знака аргумента у синуса изменяется знак, а у косинуса нет).

Имея в виду, что рассматриваемые кривые должны удовлетворять уравнению $y(x) = -y(-x)$ или $y(x) + y(-x) = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} & A_0 + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \dots \\ & \dots + C_1 \cos x + C_2 \cos 2x + C_3 \cos 3x + \dots \\ & \dots + A_0 - B_1 \sin x - B_2 \sin 2x - B_3 \sin 3x - \dots \\ & \dots + C_1 \cos x + C_2 \cos 2x + C_3 \cos 3x + \dots = 0, \end{aligned}$$

или

$$2A_0 + 2C_1 \cos x + 2C_2 \cos 2x + 2C_3 \cos 3x + \dots = 0.$$

Но это уравнение справедливо только при условии, если $A_0 = 0$; $C_1 = 0$; $C_2 = 0$ и т. д. Следовательно, кривые, симметричные относительно начала координат, не содержат постоянной составляющей и косинусоид и могут быть представлены рядом

$$y(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \dots \quad (13-13)$$

Весьма часто встречаются кривые, симметричные как относительно оси абсцисс, так и относительно начала координат. Эти кривые не содержат постоянной составляющей, четных гармоник и косинусоидальных составляющих. Уравнение такой кривой

$$y(x) = B_1 \sin x + B_3 \sin 3x + \dots \quad (13-14)$$

Кривые, представленные на рис. 13-1 и 13-2, принадлежат к этой категории.

Следует отметить, что симметрия или несимметрия относительно оси абсцисс обусловлена формой кривой и устранена быть не может. Симметрия же относительно начала координат в ряде случаев достигается целесообразным выбором начала отсчета времени.

13-3

Разложение периодических кривых на гармоники

Переменные токи и напряжения могут быть записаны осциллографом на фотопленку — осциллограмму. Полученные кривые могут быть разложены в ряд на составляющие гармоники различными методами. Ниже приведены примеры

разложения в ряд некоторых встречающихся в электротехнике кривых.

1. На рис. 13-6 дана периодическая кривая, имеющая форму трапеции. Она имеет наклонную часть от $x = \omega t = 0$ до $x = \omega t = \alpha$ и участок, параллельный оси абсцисс, с постоянной ординатой $y' = A$. Эта кривая может быть разложена в ряд

$$y = \frac{4A}{\pi\alpha} \left(\sin \alpha \cdot \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \cdot \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \cdot \sin 5\omega t + \dots \right). \quad (13-15)$$

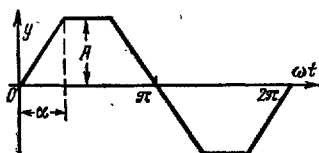


Рис. 13-6. Периодическая кривая, имеющая форму трапеции.

В частном случае, когда $\alpha = \pi/3$, из ряда (13-15) выпадают все гармоники, кратные трем

$$y = \frac{6\sqrt{3}A}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{25} \sin 5\omega t + \frac{1}{49} \sin 7\omega t - \dots \right)$$

и такая трапеция мало отличается от синусоиды, так как амплитуда пятой гармоники в 25 раз меньше основной; седьмой гармоники — в 49 раз меньше основной и т. д.

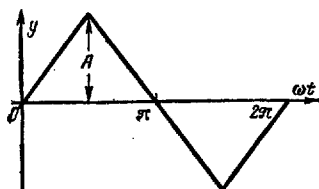


Рис. 13-7. Периодическая кривая, имеющая форму треугольника.

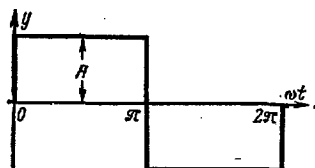


Рис. 13-8. Периодическая кривая, имеющая форму прямоугольника.

2. Кривая, имеющая форму треугольника (рис. 13-7), может быть разложена в ряд

$$y = \frac{8A}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \dots \right). \quad (13-16)$$

3. Периодическая кривая, имеющая форму прямоугольника (рис. 13-8), раскладывается в ряд

$$y = \frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right). \quad (13-17)$$

4. Кривая однополупериодного выпрямленного синусоидального тока (рис. 13-9) раскладывается в ряд

$$i = \frac{2A}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{1}{1.3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3.5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5.7} \cos 6\omega t - \dots \right). \quad (13-18)$$

5. Кривая двухполупериодного выпрямленного синусоидального тока (рис. 13-10) раскладывается в ряд

$$i = \frac{4A}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3.5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5.7} \cos 6\omega t - \dots \right). \quad (13-19)$$

6. Кривая выпрямленного трехфазного тока (рис. 13-11) раскладывается в ряд

$$i = \frac{3\sqrt{3}A}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} \cos 3\omega t - \frac{1}{5.7} \cos 6\omega t + \frac{1}{8.10} \cos 9\omega t - \dots \right). \quad (13-20)$$

Кроме рассмотренных периодических кривых в электротехнике встречаются кривые произвольной формы, для

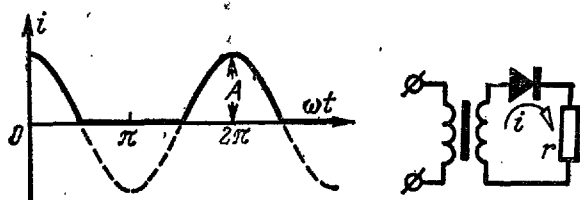


Рис. 13-9. Кривая тока при однополупериодном выпрямлении и схема выпрямителя.

разложения которых в ряд Фурье применяются графические и графоаналитические методы. Познакомимся с одним из таких методов.

Период заданной кривой — функции $y(x)$ разбивают на n равных частей так, что $2\pi/n = \Delta x$, и в точках деления проводят ординаты y заданной кривой.

Постоянная составляющая (13-8) заданной кривой

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(x) dx$$

или, заменяя определённый интеграл алгебраической суммой n слагаемых ординат y этой кривой,

$$A_0 \approx \frac{1}{2\pi} \sum_1^n y \Delta x = \frac{\Delta x}{n \Delta x} \sum_1^n y = \frac{1}{n} \sum_1^n y, \quad (13-21)$$

где $\sum_1^n y$ — алгебраическая сумма ординат кривой в n точках за период.

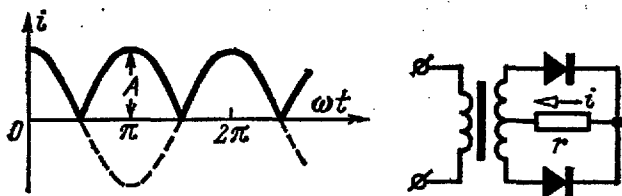


Рис. 13-10. Кривая тока при двухполупериодном выпрямлении и схема выпрямителя.

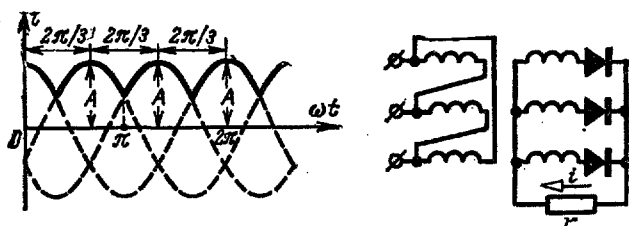


Рис. 13-11. Кривая выпрямленного синусоидального трехфазного тока и схема выпрямителя.

Коэффициенты B_k и C_k , т. е. амплитуды двойного ряда синусов и косинусов (13-5), определяются по формулам

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(x) \sin kx dx \quad (13-22)$$

и

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(x) \cos kx dx \quad (13-23)$$

или после замены, аналогичной рассмотренной,

$$B_k \approx \frac{2}{n} \sum_1^n y \sin k(n\Delta x) \quad (13-24)$$

и

$$C_k \approx \frac{2}{n} \sum_1^n y \cos k(n\Delta x). \quad (13-25)$$

Амплитуда k -й гармоники A_k и начальная фаза ψ_k определяются по (13-6) и (13-7).

Пример 13-1. Определить первую и третью гармоники несинусоидальной периодической симметричной относительно оси абсцисс кривой $y(x) = y(\omega t)$ (рис. 13-12), если ее ординаты за первый полупериод имеют следующие значения: $y_1 = 12$; $y_2 = 17$; $y_3 = 22$; $y_4 = 28$; $y_5 = 38$; $y_6 = 60$; $y_7 = 92$; $y_8 = 100$; $y_9 = 72$; $y_{10} = 49$; $y_{11} = 24$; $y_{12} = 0$.

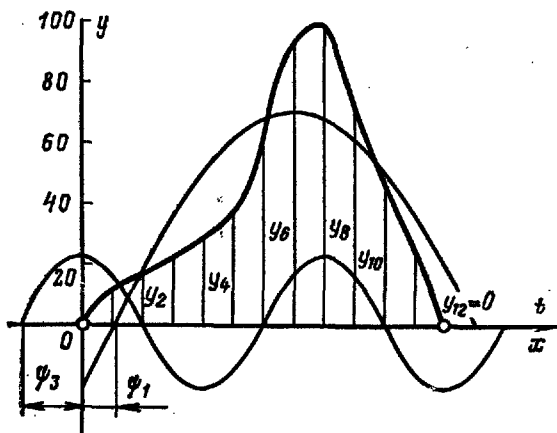


Рис. 13-12. Несинусоидальная кривая и ее первая и третья гармоники.

Решение. Так как заданная кривая симметрична относительно оси абсцисс, то постоянная составляющая и четные гармоники отсутствуют.

Для заданной кривой $n = 24$ и $\Delta x = 2\pi/n = 360^\circ/n = 15^\circ$.

Согласно (13-24) амплитуда синусоидальной составляющей первой гармоники ($k = 1$)

$$B_1 = 2 \frac{2}{24} (12 \sin 15^\circ + 17 \sin 30^\circ + 22 \sin 45^\circ + 28 \sin 60^\circ + 38 \sin 75^\circ + 60 \sin 90^\circ + 92 \sin 105^\circ + 100 \sin 120^\circ + 72 \sin 135^\circ + 49 \sin 150^\circ + 24 \sin 165^\circ) = 67,5.$$

Амплитуда косинусоидальной составляющей первой гармоники

$$C_1 = 2 \frac{2}{24} (12 \cos 15^\circ + 17 \cos 30^\circ + 22 \cos 45^\circ + 28 \cos 60^\circ + \\ + 38 \cos 75^\circ + 60 \cos 90^\circ + 92 \cos 105^\circ + 100 \cos 120^\circ + \\ + 72 \cos 135^\circ + 49 \cos 150^\circ + 24 \cos 165^\circ) = -20,7.$$

Амплитуда первой гармоники по (13-6)

$$A_1 = \sqrt{B_1^2 + C_1^2} = \sqrt{67,5^2 + 20,7^2} = 70,6.$$

Начальную фазу первой гармоники определяем по (13-7) через ее тангенс:

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{C_1}{B_1} = \frac{\sin \psi_1}{\cos \psi_1} = \frac{-20,7}{67,5} = -0,306;$$

синус угла ψ_1 отрицательный, а косинус положительный в четвертой четверти; поэтому $\psi_1 = -17^\circ$.

Амплитуда синусоидальной составляющей третьей гармоники ($k = 3$)

$$B_3 = 2 \frac{2}{24} (12 \sin 45^\circ + 17 \sin 90^\circ + 22 \sin 135^\circ + 28 \sin 180^\circ + \\ + 38 \sin 225^\circ + 60 \sin 270^\circ + 92 \sin 315^\circ + 100 \sin 360^\circ + \\ + 72 \sin 45^\circ + 49 \sin 90^\circ + 24 \sin 135^\circ) = 1,05.$$

Амплитуда косинусоидальной составляющей третьей гармоники

$$C_3 = 2 \frac{2}{24} (12 \cos 45^\circ + 17 \cos 90^\circ + 22 \cos 135^\circ + 28 \cos 180^\circ + \\ + 38 \cos 225^\circ + 60 \cos 270^\circ + 92 \cos 315^\circ + 100 \cos 360^\circ + \\ + 72 \cos 45^\circ + 49 \cos 90^\circ + 24 \cos 135^\circ) = 22,8.$$

Амплитуда третьей гармоники

$$A_3 = \sqrt{B_3^2 + C_3^2} = \sqrt{1,05^2 + 22,8^2} = 22,9.$$

Начальную фазу третьей гармоники определяем через ее тангенс

$$\operatorname{tg} \psi_3 = \frac{C_3}{B_3} = \frac{22,8}{1,05} = 21,7; \quad \psi_3 = 87^\circ 20'.$$

Таким образом, заданная кривая может быть выражена уравнением $y(x) = 70,6 \sin(\omega t - 17^\circ) + 22,9 \sin(3\omega t + 87^\circ 20')$.

13-4

Действующие значения несинусоидальных тока и напряжения

Действующее (среднеквадратичное) значение периодического напряжения или тока (а также э. д. с., магнитного потока и т. д.) любой формы определяются таким же выражением, как и для цепи синусоидального тока

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}; \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (13-26)$$

Разложив периодическое напряжение несинусоидальной формы в ряд

$$u = U_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots = U_0 + U_{1м} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{2м} \sin(2\omega t + \psi_2) + U_{3м} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots$$

и подставив этот ряд в формулу действующего значения (13-26), получим:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (U_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots)^2 dt} = \\ = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [U_0 + U_{1м} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{2м} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots]^2 dt.} \quad (13-27)$$

Возведя в квадрат многочлен, заключенный в квадратные скобки, получаем новый многочлен, содержащий следующие слагающие:

а) квадраты постоянной составляющей и всех гармоник, т. е. слагаемые вида

$$U_0^2, U_{kм}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k);$$

б) удвоенные произведения каждого из членов (постоянной составляющей и k -й гармоники) на каждую другую (n -ю) гармонику, т. е. выражения двух типов

$$2U_0 U_{nм} \sin(n\omega t + \psi_n)$$

и

$$2U_{kм} \sin(k\omega t + \psi_k) U_{nм} \sin(n\omega t + \psi_n).$$

Интегрирование этих слагающих дает:

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 dt = U_0^2; \quad \frac{1}{T} \int_0^T U_{kм}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k) dt = \\ = \frac{U_{kм}^2}{2} = U_k^2;$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2U_0 U_{nм} \sin(n\omega t + \psi_n) dt = 0;$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2U_{kм} \sin(k\omega t + \psi_k) U_{nм} \sin(n\omega t + \psi_n) dt = 0.$$

Таким образом, действующее значение несинусоидального напряжения

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots}, \quad (13-28)$$

где U_0 — постоянная составляющая, а $U_1^2 = U_{1м}^2/2$; $U_2^2 = U_{2м}^2/2$ и т. д. — квадраты действующих значений синусоидальных составляющих.

Аналогично действующее значение несинусоидального тока

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots} \quad (13-29)$$

Действующие значения напряжений и токов не зависят от начальных фаз отдельных гармоник.

Степень несинусоидальности кривых напряжения и тока, в большей или меньшей степени отличающихся от синусоидальной из-за наличия высших гармоник, оценивается известными уже коэффициентами амплитуды и формы (§ 8-6), а также коэффициентом искажения. Коэффициентом искажения называется отношение действующего значения основной гармоники напряжения или тока к действующему значению напряжения или тока.

Таким образом, для напряжения коэффициент искажения

$$k_u = \frac{U_1}{\sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots}},$$

для тока

$$k_i = \frac{I_1}{\sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}}.$$

Чем меньше коэффициент искажения отличается от единицы, тем ближе к синусоиде данная кривая.

Для оценки степени несинусоидальности кривой напряжения (тока) электрической машины вычисляют так называемый коэффициент искажения синусоидальной кривой напряжения (тока). Этот коэффициент обычно выражают в процентах. Он равен отношению корня квадратного из суммы квадратов амплитуд трех наибольших высших гармоник кривой напряжения (тока) к амплитуде основной гармоники

$$k = \frac{\sqrt{U_k^2 + U_m^2 + U_n^2}}{U_1}.$$

В электронике и радиотехнике несинусоидальность кривой напряжения или тока характеризуют коэффициентом

гармоник (коэффициентом нелинейных искажений). Для напряжения и тока

$$k_r = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots}}{U_1}; \quad k_r = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots}}{I_1}.$$

Пример 13-2. Определить действующее значение тока:

$$i = 282 \sin \omega t + 141 \sin 3\omega t + 71 \sin (5\omega t + \pi/6) \text{ А.}$$

Решение.

$$I_1 = I_{1м}/\sqrt{2} = 282/\sqrt{2} = 200 \text{ А};$$

$$I_3 = I_{3м}/\sqrt{2} = 141/\sqrt{2} = 100 \text{ А};$$

$$I_5 = I_{5м}/\sqrt{2} = 71/\sqrt{2} = 50 \text{ А};$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2} = \sqrt{200^2 + 100^2 + 50^2} = 229 \text{ А.}$$

13-5

Несинусоидальные токи и напряжения в линейных электрических цепях

Если в цепи действует несинусоидальная э. д. с. (или напряжение), которую можно представить состоящей из ряда гармоник, то ток в линейной цепи (с приемниками, имеющими линейные вольт-амперные характеристики), состоит из такого же числа синусоидальных токов. Каждая гармоника тока вызывается действием соответствующей гармоники э. д. с., и ток в любой ветви можно определить по принципу наложения, суммируя гармоники тока.

Рассмотрим сначала неразветвленную цепь.

Пренебрегая поверхностным эффектом, будем считать, что активное сопротивление цепи для всех гармоник одинаково. Индуктивное сопротивление цепи для разных гармоник различно. Оно увеличивается пропорционально порядковому номеру k -й гармоники, так как

$$x_{Lk} = k\omega L. \quad (13-30)$$

Например, при $L = 0,0318 \text{ Г}$ и $\omega = 314 \text{ рад/с}$ для первой гармоники ($k = 1$): $x_{L1} = 1 \cdot 314 \cdot 0,0318 = 10 \text{ Ом}$; для третьей гармоники ($k = 3$): $x_{L3} = 3 \cdot 314 \cdot 0,0318 = 30 \text{ Ом}$; для пятой гармоники ($k = 5$): $x_{L5} = 5 \cdot 314 \cdot 0,0318 = 50 \text{ Ом}$ и т. д.

Емкостное сопротивление для разных гармоник также различно; оно изменяется обратно пропорционально порядковому номеру гармоники, так как

$$x_{Ck} = 1/k\omega C. \quad (13-31)$$

Например, при $C = 31,8 \text{ мкФ}$ и $\omega = 314 \text{ рад/с}$ для первой гармоники $x_{C1} = 1/\omega C = 10^6/1 \cdot 314 \cdot 31,8 = 100 \text{ Ом}$; для третьей гармоники $x_{C3} = 1/3 \omega C = 10^6/3 \cdot 314 \cdot 31,8 = 33,3 \text{ Ом}$; для пятой гармоники $x_{C5} = 1/5 \omega C = 10^6/5 \cdot 314 \cdot 31,8 = 20 \text{ Ом}$ и т. д.

Пусть цепь обладает активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью. Для k -й гармоники полное сопротивление цепи

$$z_k = \sqrt{r^2 + (k\omega L - 1/k\omega C)^2} \quad (13-32)$$

и амплитуда соответствующей гармоники тока

$$I_{km} = \frac{E_{km}}{z_k} = \frac{E_{km}}{\sqrt{r^2 + (k\omega L - 1/k\omega C)^2}}, \quad (13-33)$$

где E_{km} — амплитуда k -й гармоники э. д. с.

Угол сдвига фаз между э. д. с. (напряжением) и током для каждой гармоники получается различным, так как с изменением порядкового номера активное сопротивление r не изменяется, а реактивное сопротивление $x_k = k\omega L - 1/k\omega C$ изменяется. Тангенс угла сдвига фаз данной гармоники тока относительно соответствующей гармоники э. д. с. (напряжения) можно определить из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{x_k}{r} = \frac{k\omega L - 1/k\omega C}{r}. \quad (13-34)$$

Если напряжение, разложенное на гармоники, задано, например, уравнением (рис. 13-13, а)

$$u = u_1 + u_2 = U_{1m} \sin \omega t + U_{2m} \sin 2\omega t,$$

то ток цепи

$$i = i_1 + i_2 = I_{1m} \sin (\omega t - \varphi_1) + I_{2m} \sin (2\omega t - \varphi_2),$$

причем

$$I_{1m} = U_{1m}/z_1; \quad I_{2m} = U_{2m}/z_2$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = x_1/r_1; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = x_2/r_2.$$

В цепи с активным сопротивлением, одинаковым для всех гармоник, отношение амплитуд тока и напряжения неизменно для всех гармоник. Следовательно, в цепи с активным сопротивлением кривая тока i подобна кривой напряжения u (рис. 13-13, а и б).

В цепи с активным сопротивлением и индуктивностью при увеличении порядкового номера гармоники полное

сопротивление увеличивается, т. е. уменьшается отношение амплитуды гармоники тока к амплитуде гармоники напряжения. Иначе говоря, чем выше порядковый номер гармоники, тем менее резко выражена данная гармоника в кривой тока по сравнению с кривой напряжения. Следовательно, в цепи с активным сопротивлением и индуктивностью кривые тока и напряжения не подобны; кривая тока меньше отличается по форме от синусоиды, чем кривая напряжения (рис. 13-13, а и б).

В цепи с активным сопротивлением и емкостью при увеличении порядкового номера гармоники полное сопротивление уменьшается, т. е. увеличивается отношение амплитуды гармоники тока к амплитуде гармоники напряжения. Иначе говоря, чем выше порядковый номер гармоники, тем более резко выражена данная гармоника в кривой тока по сравнению с кривой напряжения. В цепи с активным сопротивлением и индуктивностью кривые тока и напряжения не подобны; кривая тока больше отличается по форме от синусоиды, чем кривая напряжения (рис. 13-13, а и г).

Цепь, обладающая активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью, может оказаться настроенной в резонанс при одной из высших гармоник; полное сопротивление для этой гармоники будет наименьшим, и в кривой тока она будет выражена более резко, чем в кривой напряжения (рис. 13-13, а и д).

Цепь, обладающая активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью, может оказаться настроенной в резонанс при одной из высших гармоник; полное сопротивление для этой гармоники будет наименьшим, и в кривой тока она будет выражена более резко, чем в кривой напряжения (рис. 13-13, а и д).

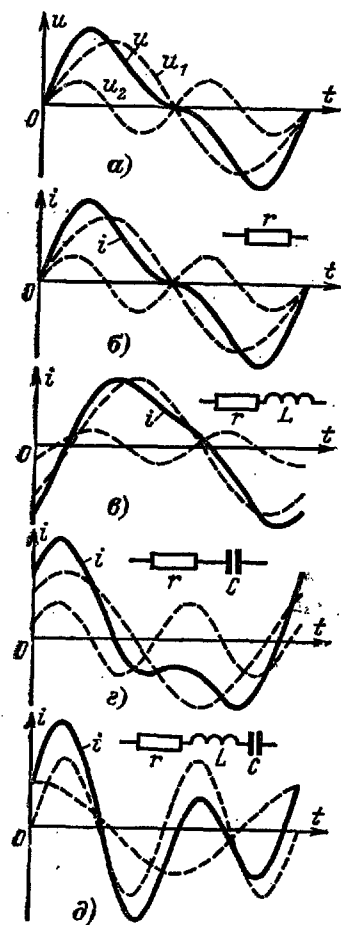


Рис. 13-13. Кривые напряжения и тока в цепях с различными параметрами.

нанас при одной из высших гармоник; полное сопротивление для этой гармоники будет наименьшим, и в кривой тока она будет выражена более резко, чем в кривой напряжения (рис. 13-13, а и д).

Пример 13-3. Определить ток в неразветвленной цепи с параметрами $r = 10$ Ом; $L = 0,05$ Г и $C = 22,5$ мкФ. Напряжение цепи (рис. 13-14)

$$u = 180 \sin \omega t + 60 \sin 3\omega t + 40 \sin (5\omega t + 18^\circ) \text{ В.}$$

Частота основной гармоники $f = 50$ Гц.

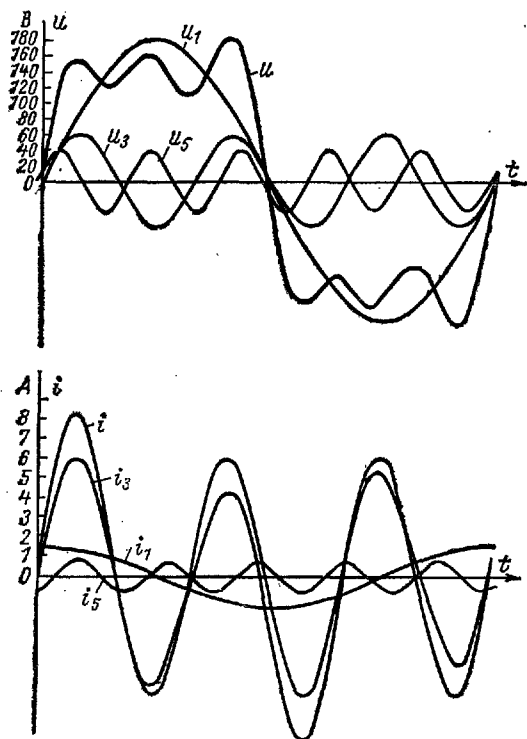


Рис. 13-14. Несинусоидальные кривые напряжения и тока и составляющие их гармоники.

Решение.

$$z_1 = \sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = \sqrt{10^2 + (314 \cdot 0,05 - 10^6/314 \cdot 22,5)^2} = \\ = \sqrt{10^2 + (15,7 - 141)^2} = 126 \text{ Ом;}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = x_1/r = (15,7 - 141)/10 = -125,3/10 = -12,53;$$

$$\varphi_1 = -85^\circ 20'; \quad I_{1м} = U_{1м}/z_1 = 180/126 = 1,43 \text{ А;}$$

$$z_3 = \sqrt{r^2 + (3\omega L - 1/3\omega C)^2} = \sqrt{10^2 + (3 \cdot 15,7 - 141/3)^2} = \\ = \sqrt{10^2 + (47 - 47)^2} = 10 \text{ Ом;}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = x_3/r = 0/r = 0; \quad \varphi_3 = 0; \quad I_{3м} = U_{3м}/z_3 = 60/10 = 6 \text{ А;}$$

$$z_5 = \sqrt{r^2 + (5\omega L - 1/5\omega C)^2} = \sqrt{10^2 + (5 \cdot 15,7 - 141/5)^2} = \\ = \sqrt{10^2 + (78,5 - 28,3)^2} = 51,2 \text{ Ом};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_5 = x_5/r = (78,5 - 28,3)/10 = 50,2/10 = 5,02; \quad \varphi_5 = 78^\circ;$$

$$I_{5м} = U_{5м}/z_5 = 40/51,2 = 0,78 \text{ А};$$

$$i = i_1 + i_3 + i_5 = 1,43 \sin(\omega t + 85^\circ 20') + 6 \sin 3\omega t + 0,78 \sin(5\omega t - 78^\circ) \text{ А}.$$

На рис. 13-14 построены гармоники тока и произведено их сложение.

В этом примере для третьей гармоники получился резонанс напряжений, полное сопротивление цепи для этой гармоники равно активному сопротивлению, третья гармоника более резко выражена в кривой тока, чем в кривой напряжения, что видно из графиков и из соотношения

$$U_{3м}/U_{1м} = 60/180 = 0,33; \quad I_{3м}/I_{1м} = 6/1,43 = 4,2.$$

Если несинусоидальное напряжение подведено к цепи, состоящей из нескольких параллельных ветвей, каждая из которых обладает активным и реактивным сопротивлениями, то формы кривых токов в каждой из параллельных ветвей в общем случае будут различны. Следовательно, они отличаются и от формы кривой тока в неразветвленной части цепи. Ток в неразветвленной части цепи и токи в параллельных ветвях находятся по принципу наложения.

13-6

Мощность при несинусоидальном токе

Средняя или активная мощность при несинусоидальном токе измеряется, как и в случае синусоидального тока, отношением израсходованной в цепи за период энергии к продолжительности периода, т. е.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt. \quad (13-35)$$

Подставив в (13-35) мгновенные значения несинусоидальных напряжения и тока, получим:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T [U_0 + U_{1м} \sin(\omega t + \psi_1) + \\ + U_{2м} \sin(2\omega t + \psi_2) + U_{3м} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots] [I_0 + \\ + I_{1м} \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) + I_{2м} \sin(2\omega t + \psi_2 - \varphi_2) + \\ + I_{3м} \sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_3) + \dots] \, dt.$$

Перемножив многочлены, заключенные в квадратные скобки, получим интегралы четырех типов:

а) интеграл от произведения постоянных величин

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 dt = U_0 I_0;$$

б) интегралы от произведений двух синусоид одной и той же частоты.

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) I_{km} \sin(k\omega t + \\ + \psi_k - \varphi_k) dt = U_k I_k \cos \varphi_k; \end{aligned}$$

в) интегралы от произведения постоянной величины и синусоиды

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) dt = 0; \\ \frac{1}{T} \int_0^T I_0 U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) dt = 0; \end{aligned}$$

г) интегралы от произведения двух синусоид с частотами различных гармоник

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) I_{nm} \sin(n\omega t + \psi_n - \varphi_n) dt = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \\ + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + \dots = P_0 + P_1 + \\ + P_2 + P_3 + \dots = \Sigma P_k, \end{aligned} \quad (13-36)$$

т. е. средняя или активная мощность несинусоидального тока равна сумме средних (активных) мощностей отдельных гармоник.

По аналогии с синусоидальными токами среднюю мощность несинусоидальных токов можно выразить через действующие значения напряжения и тока (U и I). Так как в общем случае произведение UI больше P , то для того чтобы выразить через него мощность, нужно произведение UI умножить на некоторый коэффициент, меньший единицы, который так же называют коэффициентом мощности и обозначают χ .

Следовательно,

$$P = \sum P_k = UI\chi. \quad (13-37)$$

Следует иметь в виду, что в последнем выражении коэффициент мощности χ не представляет собой тригонометрического косинуса угла сдвига фаз между напряжением и током. Действительно, несинусоидальный ток или напряжение не могут быть выражены при помощи вращающихся векторов, кривые тока и напряжения в общем случае даже не подобные, так что невозможно применить понятие об угле сдвига фаз, введенное для синусоидальных токов.

На практике при расчете энергетических установок напряжения и тока несинусоидальной формы иногда заменяют равнозначными синусоидальными, имеющими такие же действующие значения U и I , что дает возможность пользоваться векторными диаграммами. При замене несинусоидальных кривых напряжения и тока равнозначными синусоидальными последние необходимо сдвинуть друг относительно друга на такой угол φ , чтобы средняя мощность, вычисленная по формуле $P = UI \cos \varphi$, была равна активной мощности цепи несинусоидального тока; иначе говоря, необходимо, чтобы косинус угла сдвига фаз между равнозначными синусоидами $\cos \varphi$ был равен коэффициенту мощности χ .

Пример 13-4. Определить действующие значения напряжения и тока, активную мощность и коэффициент мощности для цепи примера 13-3.

Решение.

$$U_1 = U_{1м}/\sqrt{2} = 180/\sqrt{2} = 127 \text{ В}; \quad U_3 = 60/\sqrt{2} = 42,5 \text{ В};$$

$$U_5 = 40/\sqrt{2} = 28,4 \text{ В};$$

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2} = \sqrt{127^2 + 42,5^2 + 28,4^2} = 137 \text{ В};$$

$$I_1 = I_{1м}/\sqrt{2} = 1,43/\sqrt{2} = 1,0 \text{ А}; \quad I_3 = 6/\sqrt{2} = 4,25 \text{ А};$$

$$I_5 = 0,78/\sqrt{2} = 0,55 \text{ А};$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2} = \sqrt{1,0^2 + 4,25^2 + 0,55^2} = 4,4 \text{ А};$$

$$\cos \varphi_1 = 0,081; \quad \cos \varphi_3 = 1;$$

$$\cos \varphi_5 = 0,194;$$

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 127 \cdot 1,0 \cdot 0,081 = 10,5 \text{ Вт};$$

$$P_3 = U_3 I_3 \cos \varphi_3 = 42,5 \cdot 4,25 = 180 \text{ Вт};$$

$$P_5 = U_5 I_5 \cos \varphi_5 = 28,4 \cdot 0,55 \cdot 0,194 = 3,0 \text{ Вт};$$

$$P = P_1 + P_3 + P_5 = 10,5 + 180 + 3,0 = 193,5 \text{ Вт};$$

$$\chi = P/UI = 193,5/(137 \cdot 4,4) = 193,5/603 = 0,32.$$

13-7 Фильтры

Цепи, содержащие катушки индуктивности и конденсаторы, обладают не одинаковым сопротивлением для различных гармоник тока. Это дает возможность при заданной форме кривой напряжения генератора или сети изменять форму кривой тока в приемнике энергии, включив между приемником и генератором специальное устройство — электрический фильтр.

Пусть в кривой напряжения, питающего приемник, есть k -я гармоника, а в кривой тока приемника эту составляющую нужно свести к минимуму.

Включим между приемником и генератором контур (рис. 13-15, а), состоящий из параллельно соединенных

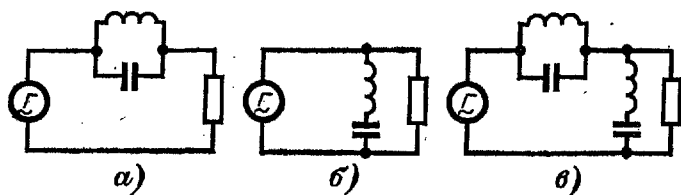


Рис. 13-15. Схемы заграждающих электрических фильтров.

конденсатора и катушки индуктивности (с ничтожным по возможности активным сопротивлением) и настроенный в резонанс (токов) для этой гармоники: $k\omega L = 1/k\omega C$. Такой контур-фильтр называют заграждающим. Он имеет для k -й гармоники весьма большое сопротивление (при $r = 0$ бесконечно большое) по сравнению с сопротивлением для остальных гармоник; следовательно, k -я гармоника тока в приемнике будет незначительна.

Для той же цели можно применить контур по рис. 13-15, б), состоящий из последовательно соединенных конденсатора и катушки индуктивности (с ничтожным, по возможности, активным сопротивлением), также настроенный в резонанс (напряжений), но включенный параллельно приемнику энергии. При малом сопротивлении контура-фильтра для k -й гармоники по сравнению с сопротивлением приемника ток этой гармоники проходит по ветви с контуром и отсутствует в приемнике.

Одновременное применение обоих контуров (рис. 13-15, в) дает еще лучшую фильтрацию.

Фильтры, выполненные по схемам рис. 13-16 и называемые полосовыми, включают, чтобы пропустить к приемнику k -ю гармонику тока и не пропустить другие.

У фильтра, представленного на рис. 13-17, *а*, индуктивное сопротивление последовательно включенной катушки растет с увеличением номера гармоники, а сопротивление

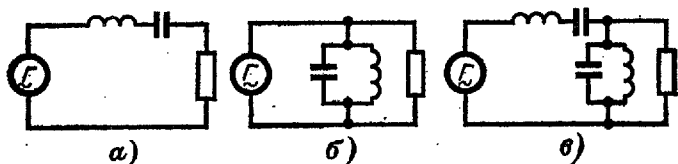


Рис. 13-16. Схемы полосовых электрических фильтров.

параллельно включенных конденсаторов, наоборот, падает. Поэтому фильтр имеет ничтожное сопротивление для постоянной составляющей тока, малое сопротивление для гармоник тока с небольшим порядковым номером (низкие частоты) и большое сопротивление для гармоник тока с высоким порядковым номером (высокие частоты). Такое устройство называют фильтром низких частот. Эти фильтры применяют

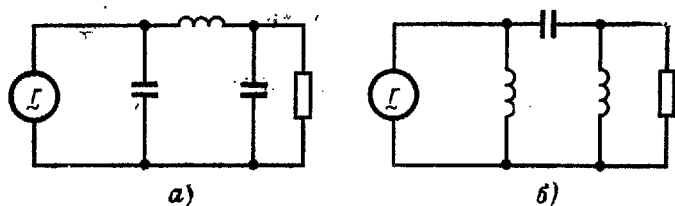


Рис. 13-17. Схемы электрических фильтров низкой (*а*) и высокой (*б*) частот.

в схемах выпрямления для уменьшения переменных составляющих выпрямленного тока, вследствие чего они иногда называются сглаживающими фильтрами.

Фильтр, представленный на рис. 13-17, *б*, наоборот, оказывает бесконечно большое сопротивление постоянной составляющей тока, большое сопротивление гармоникам тока низкой частоты и малое сопротивление гармоникам тока высокой частоты, и поэтому называется фильтром высоких частот.

Высшие гармоники в трехфазной цепи

В обмотках трехфазного генератора могут наводиться э. д. с. не строго синусоидальной формы, содержащие нечетные гармоники, например первую, третью и пятую:

$$e_A = e_{A1} + e_{A3} + e_{A5} = E_{1M} \sin \omega t + E_{3M} \sin 3\omega t + E_{5M} \sin 5\omega t; \quad (13-38)$$

$$\begin{aligned} e_B &= e_{B1} + e_{B3} + e_{B5} = E_{1M} \sin \omega (t - T/3) + \\ &+ E_{3M} \sin 3\omega (t - T/3) + E_{5M} \sin 5\omega (t - T/3) = \\ &= E_{1M} \sin (\omega t - 2\pi/3) + E_{3M} \sin 3\omega t + \\ &+ E_{5M} \sin (5\omega t + 2\pi/3); \end{aligned} \quad (13-39)$$

$$\begin{aligned} e_C &= e_{C1} + e_{C3} + e_{C5} = E_{1M} \sin \omega (t - 2T/3) + \\ &+ E_{3M} \sin 3\omega (t - 2T/3) + E_{5M} \sin 5\omega (t - 2T/3) = \\ &= E_{1M} \sin (\omega t + 2\pi/3) + E_{3M} \sin \omega t + \\ &+ E_{5M} \sin (5\omega t - 2\pi/3). \end{aligned} \quad (13-40)$$

Гармоники этих трех э. д. с. показаны на рис. 13-18. Действующие значения э. д. с. одинаковы

$$\begin{aligned} E_A &= E_B = E_C = \\ &= \sqrt{E_{1M}^2/2 + E_{3M}^2/2 + E_{5M}^2/2} = \\ &= \sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2} = E_\Phi. \end{aligned} \quad (13-41)$$

На рис. 13-18, а также из (13-38) — (13-40) видно, что все гармоники э. д. с. второй фазы (B) сдвинуты относительно гармоник э. д. с. первой фазы (A) на одну треть периода ($T/3$) основной синусоиды (первой гармоники), а все гармоники э. д. с. третьей фазы (C) на две трети периода. Так как период третьей гармоники в 3 раза меньше периода основной синусоиды, т. е. $T_3 = T/3$, то третья гармоника второй фазы сдвинута на целый период (T_3) относительно третьей гармоники первой фазы, а третья гармоника третьей фазы — на два периода ($2T_3$) относительно

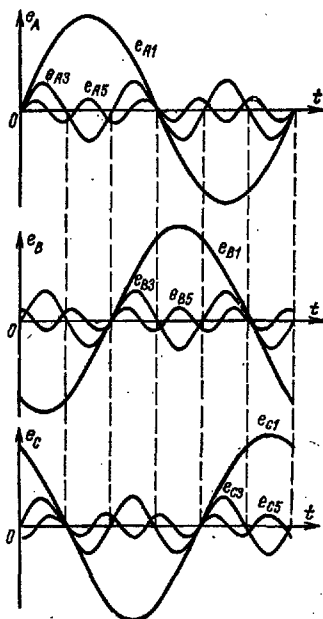


Рис. 13-18. Первые, третьи и пятые гармоники трехфазной системы э. д. с.

третьей гармоники первой фазы. Но сдвиг на целый период или целое число периодов равносильно отсутствию сдвига и, следовательно, третьей гармоники во всех трех обмотках совпадают по фазе.

Если кривые э. д. с., кроме третьей гармоники, содержат еще гармоники, кратные трем, т. е. 9, 15 и 21-ю и т. д., то и для них справедлив аналогичный вывод.

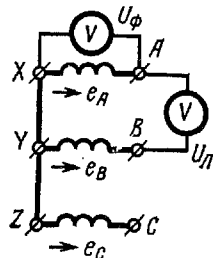


Рис. 13-19. Соединение обмоток генератора звездой.

Пятая гармоника имеет обратную последовательность фаз (в фазе *B* э. д. с. пятой гармоники опережает э. д. с. той же гармоники в фазе *A* на угол $2\pi/3$, а в фазе *C* отстает на угол $2\pi/3$). Обратную последовательность имеют еще 11, 17, 23-я и т. д. гармоники, в то время как 7, 13, 19-я и т. д. гармоники имеют прямую последовательность.

При соединении обмоток генератора звездой (рис. 13-19) линейные напряжения равны разностям соответствующих фазных э. д. с. или напряжений. Так как во всех обмотках генератора третьи и кратные им гармоники э. д. с. совпадают по фазе, то разность их равна нулю. Следовательно, в линейных напряжениях отсутствуют третьи и кратные им гармоники (9-я, 15-я и т. д.).

Таким образом, действующее значение линейного напряжения

$$U_L = \sqrt{3} \sqrt{E_1^2 + E_5^2 + E_7^2 + E_{11}^2 + \dots} \quad (13-42)$$

Очевидно, отношение линейного напряжения к фазному меньше $\sqrt{3}$, т. е.

$$\frac{U_L}{U_\phi} = \frac{U_L}{E_\phi} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{E_1^2 + E_5^2 + \dots}}{\sqrt{E_1^2 + E_5^2 + E_7^2 + \dots}} < \sqrt{3}.$$

Пример 13-5. Определить показания вольтметров, включенных между точками *A*, *B* и *A*, *X* (рис. 13-19), и найти отношение линейного напряжения к фазному, если фазная э. д. с. задана уравнением

$$e_\phi = 100 \sin \omega t + 40 \sin 3\omega t + 10 \sin 5\omega t, \text{ В.}$$

Решение. Действующее значение фазного напряжения

$$U_{AX} = U_\phi = \sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2} = \sqrt{100^2/2 + 40^2/2 + 10^2/2} = 77 \text{ В;}$$

составляющие линейного напряжения

$$U_{L1} = \sqrt{3} U_{\phi 1} = \sqrt{3} 100 / \sqrt{2} = 122 \text{ В;}$$

$$U_{L5} = \sqrt{3} U_{\phi 5} = \sqrt{3} 10 / \sqrt{2} = 12,2 \text{ В;}$$

действующее значение линейного напряжения

$$U_{AB} = U_{\Delta} = \sqrt{U_{\Delta 1}^2 + U_{\Delta 5}^2} = \sqrt{122^2 + 12,2^2} = 123 \text{ В};$$

отношение линейного напряжения к фазному

$$U_{\Delta}/U_{\phi} = 123/77 = 1,6 < \sqrt{3}.$$

Если соединить обмотки генератора треугольником (рис. 13-20), то суммарная э. д. с. в контуре обмоток равна утроенной сумме третьих и кратных трем гармоник э. д. с., т. е.

$$e = 3e_3 + 3e_9 + 3e_{15} + \dots = 3(e_3 + e_9 + e_{15} + \dots).$$

Сумма остальных гармоник э. д. с. равна нулю, так как они образуют симметричные системы.

Действующее значение суммарной э. д. с.

$$E = 3\sqrt{E_3^2 + E_9^2 + E_{15}^2 + \dots}.$$

Даже при отсутствии нагрузки (при отключенных приемниках энергии) в замкнутом контуре обмоток возникает ток

$$i = i_3 + i_9 + i_{15} + \dots$$

Действующие значения гармоник тока

$$I_3 = 3E_3/3z_3; I_9 = 3E_9/3z_9 \text{ и т. д.,}$$

где $z_3, z_9 \dots$ — полные сопротивления каждой обмотки генератора для соответствующих гармоник.

Действующее значение тока

$$I = \sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + \dots}.$$

Падение напряжения от каждой гармоники тока в каждой обмотке равно э. д. с. этой гармоники $I_3 z_3 = E_3$; $I_9 z_9 = E_9$; $I_{15} z_{15} = E_{15} \dots$ Следовательно, э. д. с. третьей и кратных ей гармоник уравниваются падениями напряжений на обмотках генератора и линейные напряжения, как и при соединении звездой, не содержат этих гармоник.

Действующее значение линейного напряжения

$$U_{\Delta} = \sqrt{E_1^2 + E_5^2 + E_7^2 + E_{11}^2 + \dots} \quad (13-43)$$

Подключим к генератору, соединенному треугольником, приемники, также соединенные треугольником (рис. 13-21).

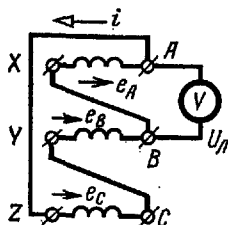


Рис. 13-20. Соединение обмоток генератора треугольником.

Так как фазные напряжения приемников, равные линейному напряжению U_{Δ} , не содержат третьих и кратных им гармоник (13-43), то и в фазных токах приемника i_{AB} , i_{BC} , i_{CA} эти гармоники отсутствуют. Нет их и в линейных токах $i_A = i_{AB} - i_{CA}$, $i_B = i_{BC} - i_{AB}$, $i_C = i_{CA} - i_{BC}$.

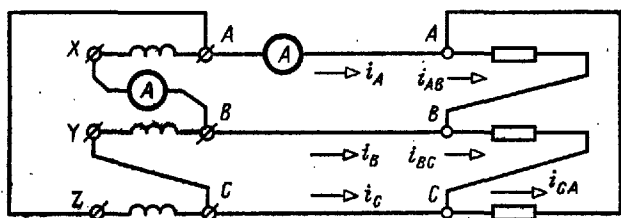


Рис. 13-21. Соединение генератора и приемников энергии треугольником.

Действующее значение линейного тока при равномерной нагрузке фаз

$$I_{\Delta} = \sqrt{3} \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots} \quad (13-44)$$

Действующее значение фазного тока в обмотках генератора, где протекают и токи гармоник, кратных трем,

$$I_{\Phi} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_9^2 + I_{11}^2 + \dots} \quad (13-45)$$

Отношение линейного тока к фазному току генератора при равномерной нагрузке

$$I_{\Delta}/I_{\Phi} < \sqrt{3}.$$

Пример 13-6. Трехфазный генератор, обмотки которого соединены треугольником, питает приемник энергии с одинаковыми сопротивлениями фаз (рис. 13-21). Фазные токи генератора содержат первую, третью и пятую гармоники $I_1 = 40$ А; $I_3 = 20$ А; $I_5 = 20$ А. Определить действующие значения фазных токов генератора и линейных токов и отношение линейного тока к фазному.

Решение. Действующее значение фазного тока генератора

$$I_{\Phi} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2} = \sqrt{40^2 + 20^2 + 20^2} = 49 \text{ А.}$$

Действующее значение линейного тока

$$I_{\Delta} = \sqrt{3} \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{3} \sqrt{40^2 + 20^2} = 77,5 \text{ А.}$$

Отношение линейного тока к фазному току генератора

$$I_{\Delta}/I_{\Phi} = 77,5/49 = 1,58.$$

При соединении обмоток генератора звездой, как уже было показано, линейное напряжение не содержит гармоник, кратных трем. Нет их и в токах приемников, соединенных треугольником (рис. 13-22), а значит, и в линейных токах.

При соединении обмоток генератора звездой и одинаковых приемников энергии звездой линейные и равные им фазные токи в отсутствии нейтрального провода не могут содержать гармоник, кратных трем, так как должно быть $i_A + i_B + i_C = 0$. Но между нейтральными точками гене-

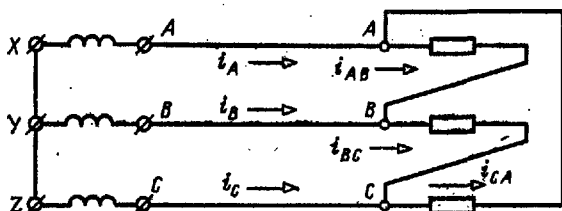


Рис. 13-22. Генератор, соединенный звездой, питающий приемник энергии, соединенный треугольником.

ратора и приемников напряжения смещения нейтрали равно не нулю, а $U_N = \sqrt{E_3^2 + E_9^2 + \dots}$.

В четырехпроводной трехфазной системе (рис. 13-23) при симметричных синусоидальных фазных э. д. с. и равномерной нагрузке ток в нейтральном проводе I_N , как известно, равен нулю. При несинусоидальных фазных э. д. с. гармоники, не кратные трем, не дают при равномерной нагрузке

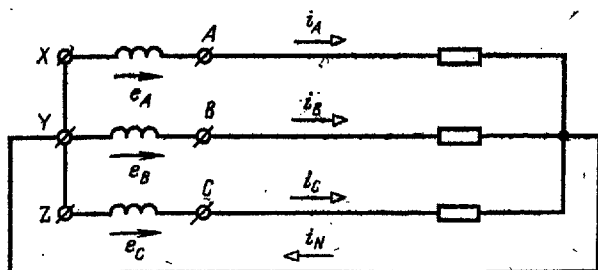


Рис. 13-23. Соединение генератора и приемников энергии звездой с нейтральным проводом.

тока в нейтральном проводе, так как сдвинуты по фазе относительно друг друга на равные углы 120° . Третьи гармоники э. д. с. совпадают по фазе, значит, и токи в фазах A, B и C совпадают между собой по фазе; поэтому ток в нейтральном проводе равен сумме трех третьих гармоник фазных токов: $I_N = 3I_3$, причем

$$I_3 = E_3/z_3,$$

где z_3 — суммарное сопротивление приемника и обмотки генератора для тока третьей гармоники.

Если фазные э. д. с., кроме третьей гармоники, содержат гармоники, кратные трем, т. е. 9, 15, 21-ю и т. д., то для них можно сделать аналогичный вывод. В этом случае действующее значение тока в нейтральном проводе

$$I_N = 3 \sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + \dots} \quad (13-46)$$

Глава четырнадцатая

Нелинейные цепи переменного тока

14-1

Общие замечания

Значительное число нелинейных элементов было рассмотрено в гл. 3, 6, 7. К ним относятся нелинейные элементы с активным сопротивлением, нелинейные элементы с индуктивным сопротивлением (например, катушки со стальными сердечниками) и нелинейные элементы с емкостным сопротивлением (например конденсаторы с сегнетоэлектриками). Одни из них относятся к неуправляемым, например, лампы накаливания, термисторы, двухэлектродные электронные лампы, полупроводниковые диоды, другие, наоборот, к управляемым: трехэлектродные электронные лампы, тиратроны, полупроводниковые триоды, магнитные усилители и удвоители частоты. Управляемые нелинейные элементы обычно имеют управляющие электроды или обмотки, предназначенные для включения в цепь управления.

Широкое внедрение нелинейных элементов объясняется тем, что их применение связано с получением и использованием таких явлений, которые нельзя получить в линейных цепях, например выпрямление переменного тока в постоянный или обратное преобразование, стабилизация напряжения, умножение и деление частоты, усиление, преобразование и получение сигналов различной формы и т. д. Быстро развивающаяся нелинейная электротехника весьма обширна и становится самостоятельной областью электротехники.

В этой главе рассмотрены некоторые важные примеры исследования нелинейных цепей переменного тока.

Выпрямление переменного тока, т. е. преобразование его в постоянный (пульсирующий) ток, производится при помощи нелинейных элементов, которые обладают весьма малым активным сопротивлением в прямом направлении и весьма малой активной проводимостью в обратном направлении. Устройство таких нелинейных элементов с резко несимметричной вольт-амперной характеристикой, называемых вентилями, было рассмотрено в гл. 3. К ним относятся электронные лампы, газотроны, тиратроны, германиевые, кремниевые и другие полупроводниковые вентили.

На рис. 14-1, а показана примерная вольт-амперная характеристика полупроводникового вентиля, а на рис. 14-1, б — характеристика идеального вентиля, сопротивление которого в прямом направлении (r_v) равно нулю, а в обратном ($r_{обр}$) — бесконечно велико. Вольт-амперная характеристика идеального вентиля представляет собой отрезок

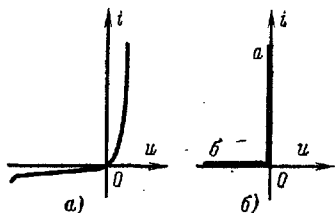


Рис. 14-1. Вольт-амперные характеристики полупроводникового (а) и идеального (б) вентиля.

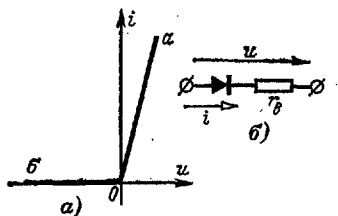


Рис. 14-2. Вольт-амперная характеристика вентиля (а) и его схема замещения (б).

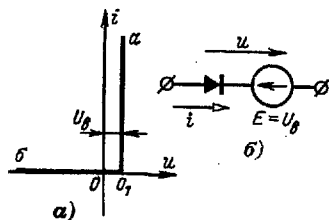


Рис. 14-3. Вольт-амперная характеристика вентиля (а) и его схема замещения (б).

(0а) положительной полуоси тока и отрезок (0б) — отрицательной полуоси напряжения. Заменой реальной характеристики вентиля приближенной в виде отрезков прямых (кусочно-линейная аппроксимация), в частности характеристикой идеального вентиля, широко пользуются, чтобы упростить приближенный расчет режима цепи с вентилями. На рис. 14-2, а и 14-3, а даны еще две кусочно-линей-

ные аппроксимации (отрезками 60 ; $0a$ и $60I_1$; 0_1a). Первой из них соответствует схема замещения, состоящая из идеального вентиля и последовательно присоединенного резистора с сопротивлением r_b (рис. 14-2, б), а второй — идеального вентиля и источника постоянной э. д. с. $E = U_b$ (рис. 14-3, б).

При подключении идеального вентиля ($r_b = 0$), соединенного последовательно с приемником, активное сопротивление которого r (рис. 14-4, а), к источнику синусоидаль-

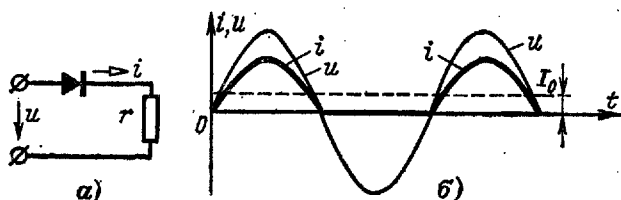


Рис. 14-4. Идеальный вентиль, соединенный последовательно с приемником, сопротивление которого r (а); график напряжения и тока цепи (б).

ного напряжения $u = U_m \sin \omega t$ в течение положительного полупериода ($u > 0$) ток в цепи

$$i = \frac{u}{r_b + r} = \frac{u}{r} = \frac{U_m \sin \omega t}{r} = I_m \sin \omega t.$$

В течение отрицательного полупериода напряжения ($u < 0$) ток в цепи не проходит, так как $r_{обp} = \infty$:

$$i = u / (r_{обp} + r) = 0.$$

Таким образом, в цепи проходит одна полуволна синусоидального тока. График этого тока показан на рис. 14-4, б.

В течение положительного полупериода напряжение на приемнике равно напряжению, приложенному к цепи ($ir = u$), а напряжение на вентиле равно нулю, так как $r_b = 0$. В течение отрицательного полупериода напряжение на приемнике равно нулю, так как $i = 0$, и напряжение на вентиле равно напряжению u на зажимах цепи. Таким образом, кривая напряжения на приемнике повторяет по форме кривую тока.

Полученная кривая однополупериодного выпрямленного тока (рис. 14-4, б) может быть разложена в ряд по формуле (13-18); при этом постоянная составляющая тока, равная его среднему значению,

$$I_0 = I_{cp} = I_m / \pi. \quad (14-1)$$

Существенным недостатком однополупериодного выпрямления является значительная пульсация тока, т. е. большая переменная составляющая выпрямленного тока. Для уменьшения пульсаций применяется сглаживающий низкочастотный фильтр (рис. 13-17, а).

Применяя мостовую схему из четырех вентилях (рис. 14-5, а), получаем двухполупериодное выпрямление тока i (рис. 14-5, б). При синусоидальном напряжении источника $u = U_m \sin \omega t$ ток в течение первого полупериода

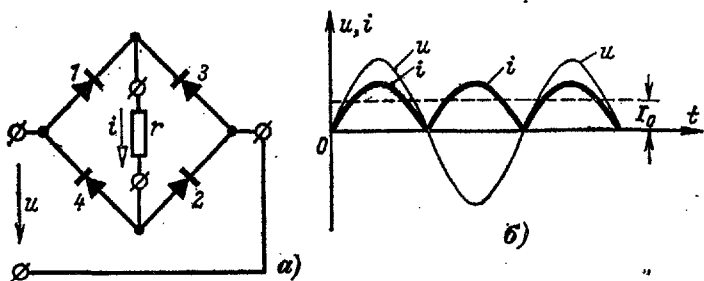


Рис. 14-5. Мостовая схема выпрямителя (а) и график напряжения питания u и тока в приемнике i (б).

$u > 0$ проходит через первый вентиль, сопротивление приемника r и второй вентиль, а в течение второго полупериода ($u < 0$, т. е. полярность напряжения обратна) через третий вентиль, сопротивление r и четвертый вентиль. При идеальных вентилях ток i в течение первого полупериода

$$i = \frac{u}{2r_{\text{в}} + r} = \frac{u}{r} = \frac{U_m \sin \omega t}{r} = I_m \sin \omega t.$$

В течение второго полупериода ток в сопротивлении r имеет такое же направление и такую же форму, как и в первом полупериоде (рис. 14-5, б).

Кривая напряжения на приемнике ir подобна кривой тока.

Ток может быть разложен в ряд по формуле (13-19); при этом его постоянная составляющая

$$I_0 = I_{\text{ср}} = 2I_m/\pi, \quad (14-2)$$

т. е. в 2 раза больше, чем при однополупериодном выпрямлении.

На рис. 14-6, а дана схема трехфазного выпрямителя. Через каждый из вентилях проходит ток только в течение

одной третьей части периода, когда напряжение на фазе генератора, в которую включен вентиль, выше напряжения на других фазах (рис. 14-6, б).

Напряжение u_n на сопротивлении приемника r равно наибольшему фазному напряжению (рис. 14-6, б), а ток

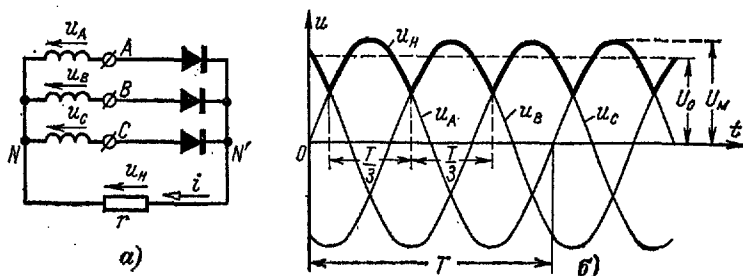


Рис. 14-6. Схема трехфазного выпрямителя (а) и график напряжений (б).

$i = u_n/r$, т. е. кривая тока подобна кривой напряжения на приемнике.

Кривые тока и напряжения могут быть разложены в ряд по формуле (13-20), причем их постоянные составляющие

$$U_0 = U_{cp} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} U_m \text{ и } I_0 = I_{cp} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} I_m. \quad (14-3)$$

14-3

Напряжение, ток и магнитный поток в катушке со стальным сердечником

Катушка со стальным сердечником относится к наиболее распространенным нелинейным элементам электрических машин, трансформаторов, аппаратов, приборов.

При прохождении переменного тока по катушке (рис. 14-7, а) с сердечником из магнитно-мягкого материала намагничивание и размагничивание происходит по одной и той же кривой, так как восходящие и нисходящие ветви гистерезисного цикла практически совпадают (рис. 14-7, б).

Если при работе катушки сердечник ее не насыщается, то при синусоидальном токе магнитный поток и напряжение на катушке также будут синусоидальны, и расчет цепи не отличается от расчета цепи при отсутствии стального сердечника.

Если при работе цепи магнитная индукция в сердечнике достигает значений, лежащих за коленом кривой намагни-

чивания, то зависимость между магнитным потоком и током будет нелинейной и эквивалентная индуктивность катушки зависит от величины тока. В этом случае нельзя пользоваться формулами, выведенными для цепи с неизменной индуктивностью.

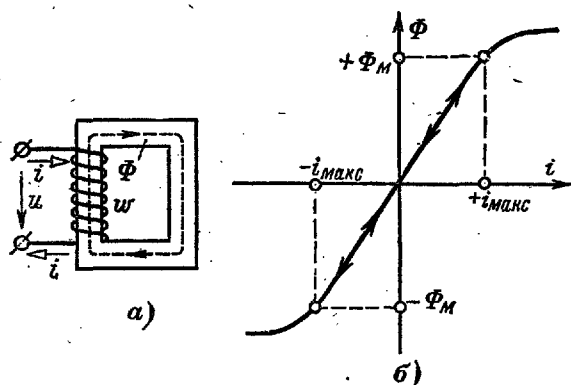


Рис. 14-7. Катушка с замкнутым стальным сердечником (а) и кривая намагничивания при отсутствии гистерезиса (б).

Для построения кривой намагничивающего тока допустим, что магнитный поток катушки со стальным сердечником изменяется синусоидально

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t.$$

Тогда (при отсутствии потока рассеяния) э. д. с. самоиндукции, наводимая этим потоком в обмотке,

$$\begin{aligned} e_L &= -w \frac{d\Phi}{dt} = -w \omega \Phi_m \cos \omega t = \\ &= -E_m \sin(\omega t + \pi/2). \end{aligned} \quad (14-4)$$

Если пренебречь активным сопротивлением обмотки, то напряжение на ее зажимах равно по величине и противоположно по знаку э. д. с. самоиндукции

$$u = -e_L = E_m \sin(\omega t + \pi/2) = U_m \sin(\omega t + \pi/2). \quad (14-5)$$

Таким образом, в катушке, у которой можно пренебречь активным сопротивлением обмотки и потоком рассеяния, синусоидальный магнитный поток получается при синусоидальном напряжении на зажимах катушки. По фазе маг-

нитный поток отстает от напряжения на угол $\pi/2$, а его амплитуда по (14-4)

$$\Phi_m = E_m / \omega = U_m / 2\pi f \omega. \quad (14-6)$$

По кривой $\Phi(t) = \Phi_m \sin \omega t$ и графику $\Phi(i)$, подобному кривой намагничивания $B(H)$, так как $\Phi = BS$ и $i = Hl/\omega$, можно по точкам построить кривую намагничивающего тока $i(t)$ катушки (рис. 14-8). Для произвольного момента времени, отмеченного точкой 1, по кривой $\Phi(t)$ находим значение магнитного потока (точка 2); отметив то же значение магнитного потока на кривой намагничивания (точка 3), определяем соответствующее значение тока (абс-

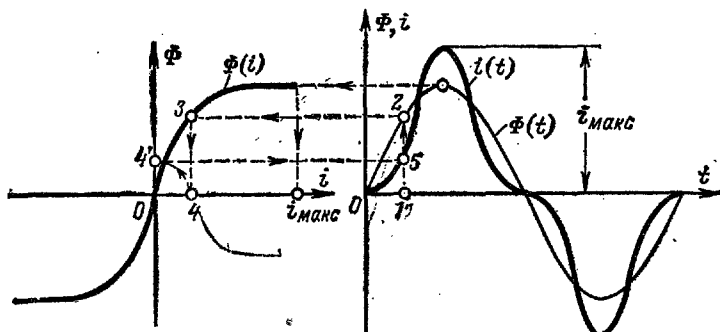


Рис. 14-8. Графики тока и магнитного потока.

цисса $0-4 = 0-4'$). Откладывая это значение тока от точки 1 вверх, получаем ординату тока или точку 5 на кривой тока $i(t)$. Аналогично, построив для различных моментов времени ряд ординат, получаем искомую кривую тока $i(t)$. Кривая тока несинусоидальна, но симметрична относительно оси абсцисс. Ток и магнитный поток одновременно достигают максимальных значений Φ_m и $i_{\max}$ и одновременно проходят через нулевые значения. Это значит, что первая гармоника тока совпадает по фазе с магнитным потоком. Из сравнения полученной кривой тока с кривой на рис. 13-2 следует, что она содержит еще явно выраженную третью гармонику (рис. 14-9). При большом насыщении сердечника кривая тока, кроме того, будет содержать пятую, седьмую и другие нечетные высшие гармоники.

При отсутствии потерь в обмотке и в стальном сердечнике энергия, затраченная при намагничивании сердечника, равна энергии, возвращаемой в цепь питания при размаг-

ничивании, и активная мощность цепи равна нулю. Это подтверждается и тем, что активная мощность несинусоидального тока, равная сумме мощностей гармоник,

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 = 0;$$

первое слагаемое равно нулю, так как напряжение $U_1 = U$ (синусоидальное) опережает по фазе поток на угол $\pi/2$, а первая гармоника тока совпадает по фазе с потоком, т. е. $\varphi_1 = \pi/2$; второе слагаемое равно нулю, так как напряжение синусоидально и $U_3 = 0$.

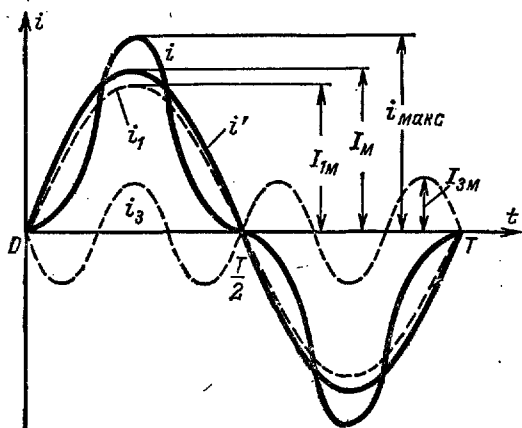


Рис. 14-9. Эквивалентная синусоида кривой тока.

При расчете цепи со стальным сердечником несинусоидальный намагничивающий ток i часто заменяют эквивалентным синусоидальным $i' = I_m \sin \omega t$ (рис. 14-9), который имеет то же действующее значение, что и несинусоидальный. В этом случае для цепи можно построить векторную диаграмму (рис. 14-10).

Необходимую для построения диаграммы амплитуду магнитного потока можно определить по (14-6) или

$$\Phi_m = \frac{U\sqrt{2}}{2\pi f\omega} = \frac{U}{4,44f\omega}. \quad (14-7)$$

Магнитная индукция в сердечнике

$$B_m = \Phi_m / S = U / (4,44f\omega S), \quad (14-8)$$

где S — сечение сердечника.

По кривой намагничивания (рис. 5-6) можно найти максимальную напряженность поля $H_{\text{макс}}$, а затем и максимальное значение намагничивающего тока

$$i_{\text{макс}} = H_{\text{макс}} l / \omega, \quad (14-9)$$

где l — длина средней магнитной линии.

Если значение Φ_m найдено (14-7), то ток $i_{\text{макс}}$ можно определить и непосредственно по кривой зависимости Φ от тока i (рис. 14-8).

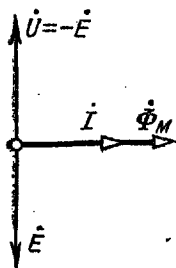


Рис. 14-10. Векторная диаграмма катушки без учета потерь.

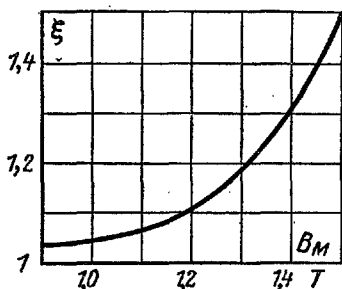


Рис. 14-11. Зависимость поправочного коэффициента от максимальной магнитной индукции.

Для вычисления действующего значения тока максимальное значение тока нужно разделить на коэффициент амплитуды [см. (8-25)]:

$$I = i_{\text{макс}} / k_a = H_{\text{макс}} l / (k_a \omega). \quad (14-10)$$

Амплитуда эквивалентной синусоиды тока $I_m = \sqrt{2} I$.

Для кривых тока, симметричных относительно оси абсцисс (рис. 14-8), коэффициент амплитуды иногда выражают в виде произведения двух множителей

$$k_a = i_{\text{макс}} / I = \sqrt{2} \xi, \quad (14-11)$$

где ξ — поправочный коэффициент, зависящий от формы кривой тока, которая в свою очередь зависит от B_m .

Значение коэффициента ξ для электротехнической стали при индукции, не превосходящей $B_m \approx 0,8 \text{ Т}$, принимается равным единице. В этом случае $I_m = i_{\text{макс}}$. При больших значениях магнитной индукции этот коэффициент можно найти по графику рис. 14-11.

Влияние гистерезиса на ток в катушке со стальным сердечником и ее вольт-амперная характеристика

Построение кривой тока при заданном напряжении. Кривая тока (см. рис. 14-8) построена без учета гистерезиса. В действительности процесс намагничивания и размагничивания сердечника происходит по несовпадающим ветвям петли гистерезиса.

При синусоидальном напряжении на зажимах катушки э. д. с. и магнитный поток также синусоидальны (если пренебречь активным сопротивлением обмотки и потоком рассеяния), причем при заданной величине U_m амплитуда потока $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$ определяется по (14-6).

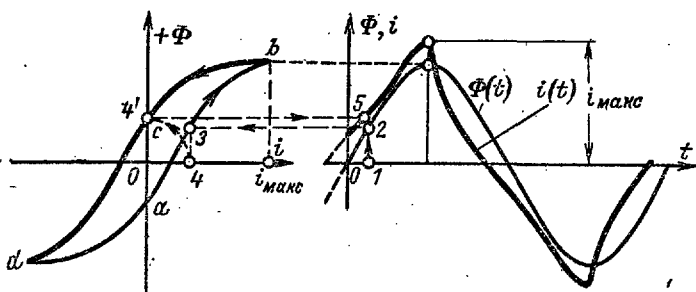


Рис. 14-12. Построение кривой тока по кривой магнитного потока и петле гистерезиса.

Кривую несинусоидального тока $i(t)$ можно построить по кривой потока $\Phi(t)$ и петле гистерезиса $\Phi(i)$ по точкам, как и на рис. 14-8. На рис. 14-12 приведено такое построение, причем ординаты кривой тока для первой четверти периода определяются по абсциссам восходящей ветви петли гистерезиса (лежащей между точками a и b), для второй четверти периода — по абсциссам нисходящей ветви петли гистерезиса (лежащей между точками b и c) и т. д. Из рис. 14-12 видно, что ток и магнитный поток одновременно достигают своих максимальных значений, а нулевых значений магнитный поток достигает позже, чем ток.

Построение кривых потока и напряжения при заданном токе. Если по катушке проходит синусоидальный ток $i = I_m \sin \omega t$, то магнитный поток, э. д. с. и напряжение несинусоидальны. Кривая магнитного потока для этого слу-

чая может быть построена по заданной кривой тока $i(t)$ и петле гистерезиса. На рис. 14-13 выполнено такое построение. Для произвольного момента времени (точка 1 на оси абсцисс) по кривой тока находим его мгновенное значение (точка 2).

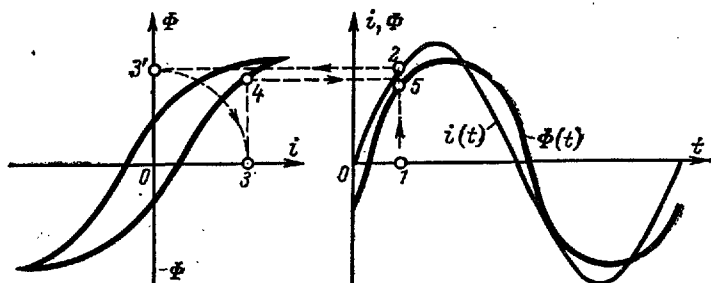


Рис. 14-13. Построение кривой магнитного потока по кривой тока и петле гистерезиса.

Найдя то же значение тока на петле гистерезиса (абсцисса $0-3$ равна $0-3'$), определяем соответствующее значение магнитного потока (точка 4). Откладывая это значение от точки 1 вверх, построим ординату 1—5 и получим точку 5 кривой магнитного потока. Построив ординаты магнитного потока для различных моментов времени, получим кривую потока $\Phi(t)$.

Кривая магнитного потока имеет тупую форму и содержит, кроме основной, прежде всего третью гармонику. Тангенс угла наклона касательной $\operatorname{tg} \beta = M d\Phi/dt$ (коэффициент M определяется масштабами) к кривой магнитного потока $\Phi(t)$ в произвольной точке пропорционален индуктированной в этот момент времени э. д. с. (14-4), а следовательно, и напряжению. Таким образом, нетрудно представить, что кривые э. д. с. и напряжения имеют острую форму.

Вольт-амперная характеристика. Каждому действующему значению напряжения U на зажимах катушки со стальным сердечником соответствует вполне определенное максимальное значение магнитной индукции (14-8), т. е. определенная максимальная ордината петли гистерезиса, по которой при данном напряжении происходит циклическое перемагничивание сердечника. Например, напряжению U_A соответствует максимальная индукция B_{mA} и петля AA' (рис. 14-14, а), напряжению U_B — петля BB' и т. д. Вершины петель или максимальные ординаты A, B, B, Γ и т. д. лежат на основной кривой намагничивания; поэтому она выражает зависимость между наибольшими значениями магнитной индукции и

напряженности магнитного поля $B_{\text{макс}} (H_{\text{макс}})$, как показано рис. 14-14, б.

Так как наибольшее значение напряженности поля пропорционально максимальному значению тока (14-9), то

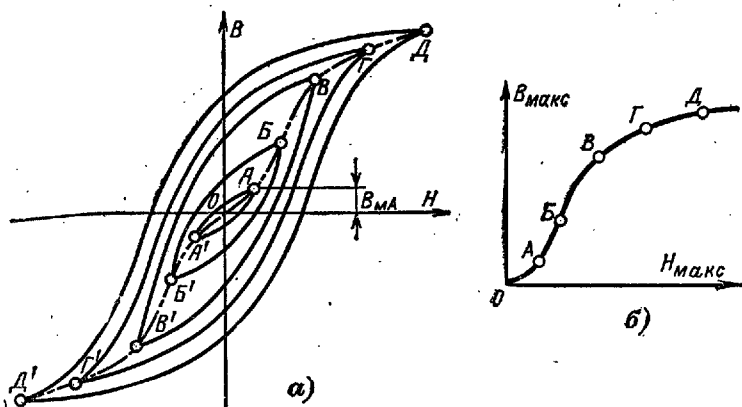


Рис. 14-14. Гистерезисные петли (а) и основная кривая намагничивания (б).

основная кривая намагничивания при других масштабах по осям абсцисс и ординат выражает примерную зависимость (без учета коэффициента ξ) действующего значения напряжения на зажимах катушки от действующего значения тока в ней. Откладывая напряжение по оси абсцисс, а ток по оси ординат (рис. 14-15), получаем вольт-амперную характеристику $I(U)$ катушки со стальным сердечником.

При небольших напряжениях сердечник не насыщен и зависимость между током I и напряжением U близка к линейной (участок кривой OA), при больших напряжениях зависимость между I и U резко отличается от линейной. Например, если катушку (или ненагруженный трансформатор) с номинальным напряжением U_n включить на удвоенное напряжение $2U_n$ (рис. 14-15), то ток в катушке может превысить номинальный I_n в десятки раз, что, конечно, недопустимо.

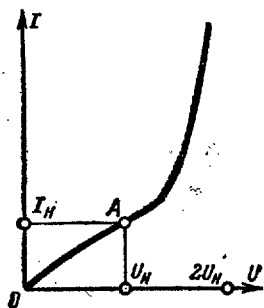


Рис. 14-15. Вольт-амперная характеристика катушки со стальным сердечником.

Потери энергии в стали

Потери от гистерезиса. На рис. 14-16 еще раз построены кривые потока Φ и тока i , а также напряжения u и мгновенной мощности $p = ui$ для катушки со стальным сердечником.

Активная или средняя мощность по определению

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt;$$

она равна средней ординате кривой мгновенной мощности.

Площадь, ограниченная положительной частью кривой

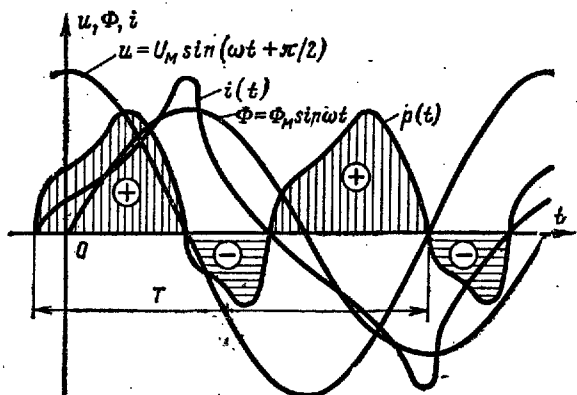


Рис. 14-16. График напряжения, магнитного потока, тока и мощности.

мгновенной мощности и осью абсцисс, изображает энергию, полученную от источника питания при намагничивании; площадь, ограниченная отрицательной частью кривой и осью абсцисс, изображает энергию, возвращаемую при размагничивании сердечника. Площадь, ограниченная кривой мгновенной мощности и осью абсцисс в течение периода T , изображает электрическую энергию, которая преобразуется в сердечнике в тепло при одном цикле перемагничивания. Можно показать, что эта площадь пропорциональна площади петли гистерезиса.

Мощность потерь от гистерезиса при перемагничивании стали обычно рассчитывается по эмпирическим формулам, например

$$P_r = \sigma_r f B_m^n G, \quad (14-12)$$

где σ_r — коэффициент гистерезиса, зависящий от сорта стали; f — частота; B_m — максимальная индукция; n — показатель степени, $n = 1,6$ при $B_m < 1$ Т и $n = 2$ при $B_m > 1$ Т; G — масса сердечника.

Потери от вихревых токов. При изменении магнитного потока, пронизывающего стальной сердечник, в нем индуцируются вихревые токи, замыкающиеся в плоскостях, перпендикулярных магнитным линиям.

Вихревые токи вызывают нагрев стали и оказывают размагничивающее действие, создавая н. с., направленную против основной н. с. катушки (по закону Ленца).

Для увеличения сопротивления сердечника вихревым токам, а следовательно, для уменьшения этих токов и потерь от них стальные сердечники набираются из изолированных друг от друга листов стали толщиной 0,35—0,5 мм при частоте тока 50 Гц, а при более высоких частотах из еще более тонких листов или лент.

Мощность потерь от вихревых токов рассчитывается по эмпирическим формулам, например

$$P_v = \sigma_v f^2 B_m^2 G, \quad (14-13)$$

где σ_v — коэффициент, зависящий от сорта стали и толщины листов.

Потери в стали. Потери в сердечнике от гистерезиса и вихревых токов называются потерями в стали:

$$P_{ст} = P_r + P_v. \quad (14-14)$$

Для оценки потерь в стали при частоте 50 Гц часто пользуются формулой

$$p_{ст} = p_{10/50} B_m^2, \quad (14-15)$$

где $p_{ст}$ — удельные потери в стали, Вт/кг; $p_{10/50}$ — потери в стали, Вт/кг, при $B_m = 1$ Т = 10 000 Гс и $f = 50$ Гц; B_m — максимальное значение индукции, Т.

Значения $p_{10/50}$, установленные ГОСТ 802-58 для различных марок электротехнической стали, указаны в табл. 14-1.

Таблица 14-1

Марка стали	Э11	Э12	Э13	Э21	Э31	Э31	Э41	Э42	Э41	Э42	Э43
Толщина листа, мм	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,35	0,5	0,5	0,35	0,35	0,5
$P_{10/50}$, Вт/кг	3,3	3,2	2,8	2,5	2,0	1,6	1,6	1,40	1,35	1,2	2,8

Эквивалентная синусоида тока. Выше было указано, что при синусоидальном напряжении на зажимах катушки со стальным сердечником несинусоидальный ток может быть заменен эквивалентным синусоидальным. Для катушки с потерями в сердечнике эквивалентный ток должен быть сдвинут по фазе относительно напряжения на угол не $\pi/2$, а на угол φ , чтобы учесть потери в стали.

Обозначив, как и прежде, мгновенное значение эквивалентного тока i' , можем написать:

$$P = P_{\text{ст}} = \frac{1}{T} \int_0^T u i' dt = UI \cos \varphi, \quad (14-16)$$

где I — действующее значение тока, равное действующему значению эквивалентной синусоиды.

Из (14-16) определяем необходимый угол сдвига фаз

$$\cos \varphi = P/UI. \quad (14-17)$$

Замена несинусоидального тока синусоидальным дает возможность построить векторную диаграмму (рис. 14-17). Эта диаграмма отличается от диаграммы катушки без потерь в сердечнике (рис. 14-10) тем, что вектор тока I повернут относительно вектора напряжения на угол φ или относительно вектора магнитного потока на угол потерь δ .

Разложим ток I на две составляющие: активную $I_a = I \cos \varphi = I \sin \delta$, совпадающую по фазе с напряжением U , и реактивную — намагничивающую $I_p = I \sin \varphi = I \cos \delta$, совпадающую по фазе с магнитным потоком. Первая из них обусловлена потерями в сердечнике, и так как

$$P = P_{\text{ст}} = UI \cos \varphi = UI \sin \delta = UI_a,$$

то

$$I_a = P_{\text{ст}}/U. \quad (14-18)$$

Вторую находим, как показано в § 14-3, по кривой $i_p = i - i_a$.

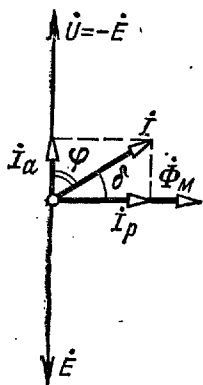


Рис. 14-17. Векторная диаграмма катушки со стальным сердечником с учетом потерь в стали.

Из векторной диаграммы (рис. 14-17) следует, что ток и его составляющие связаны соотношением

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}. \quad (14-19)$$

Угол потерь определяется из формулы

$$\operatorname{tg} \delta = I_a / I_p. \quad (14-20)$$

14-6

Векторная диаграмма катушки со стальным сердечником и схема ее замещения

Диаграмма катушки с учетом активного сопротивления обмотки. Если активным сопротивлением r обмотки нельзя пренебречь, то напряжение на зажимах катушки состоит из двух слагающих. Одна из них $u' = -e_L$, т. е. равна по величине и противоположна по знаку э. д. с., наводимой магнитным потоком Φ , а другая $u_a = ir$ — падение напряжения на активном сопротивлении. При синусоидальном напряжении источника питания $u = u' + u_a$, ток в цепи несинусоидален, напряжение u_a также несинусоидально, а значит, несинусоидальны э. д. с. индукции и магнитный поток.

Векторная диаграмма такой катушки (рис. 14-18) для эквивалентных синусоид строится следующим образом.

В произвольном направлении, например горизонтально, откладываем вектор Φ_m . Параллельно ему располагаем вектор I_p , а под углом 90° к нему — вектор I_a ; сумма этих векторов равна вектору тока I в обмотке катушки. Перпендикулярно вектору магнитного потока Φ_m откладываем вектор индуктированной в катушке э. д. с. E , а в противоположную сторону — равный ему по величине вектор слагающей напряжения U' , уравнивающей эту э. д. с. Складывая вектор активного падения напряжения $U_a = Ir$, параллельный току, со слагающей U' , получаем вектор напряжения U на зажимах катушки.

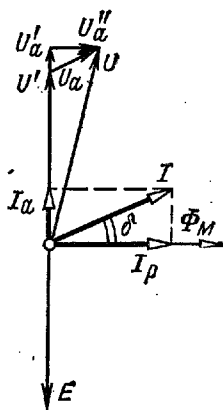


Рис. 14-18. Векторная диаграмма катушки со стальным сердечником с учетом потерь в стали и активного сопротивления обмотки.

Пример 14-1. Построить векторную диаграмму катушки (рис. 14-7, а) с числом витков $w = 200$, подключенной к источнику с напряжением $U = 120$ В и частотой $f = 50$ Гц. Сердечник катушки набран из листов электротехнической стали Э42 толщиной 0,5 мм и имеет сечение $22,5 \text{ см}^2$. Длина средней магнитной линии 50 см, активное сопротивление обмотки $0,95 \text{ Ом}$.

Решение. Так как активное падение напряжения U_a обычно мало по сравнению с напряжением на зажимах катушки, определяем магнитный поток и индукцию в сердечнике, считая $U' \approx U$,

$$\Phi_m = \frac{U'}{4,44fw} = \frac{120}{4,44 \cdot 50 \cdot 200} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ Вб};$$

$$B_m = \Phi_m / S = 2,7 \cdot 10^{-3} / 22,5 \cdot 10^{-4} = 1,2 \text{ Т}.$$

По кривой намагничивания (рис. 5-6) найдем напряженность магнитного поля $H_{\text{макс}} = 10 \text{ А/см}$; следовательно, максимальная и. с.

$$i_{\text{макс}} w = H_{\text{макс}} l = 10 \cdot 50 = 500 \text{ А}.$$

Определив по кривой (рис. 14-11) при $B_m = 1,2 \text{ Т}$ коэффициент $\xi = 1,1$, находим действующее значение намагничивающего тока

$$I_p = \frac{H_{\text{макс}} l}{w \sqrt{2} \xi} = \frac{500}{200 \sqrt{2} \cdot 1,1} = 1,61 \text{ А}.$$

Определим массу стали, приняв плотность $7,8 \text{ г/см}^3$,

$$G = 22,5 \cdot 50 \cdot 7,8 \cdot 10^{-3} = 8,77 \text{ кг}.$$

Мощность потерь в стали по (14-15)

$$P_{\text{ст}} = p_{10/50} B_m^2 G = 1,40 \cdot 1,2^2 \cdot 8,77 = 18 \text{ Вт}.$$

Слагающая тока, обусловленная потерями в стали (14-18),

$$I_a = P_{\text{ст}} / U = 18 / 120 = 0,15 \text{ А}.$$

Ток в катушке (14-19)

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{0,15^2 + 1,61^2} = 1,62 \text{ А}.$$

Угол сдвига фазы эквивалентной синусоиды тока относительно магнитного потока определим через его тангенс по (14-20):

$$\text{tg } \delta = I_a / I_p = 0,15 / 1,61 = 0,093,$$

откуда $\delta = 5^\circ 20'$ и $\sin 5^\circ 20' = 0,093$; $\cos 5^\circ 20' = 0,996$.

Активное падение напряжения

$$U_a = I r = 1,62 \cdot 0,95 = 1,54 \text{ В}.$$

Составляющая U'_a совпадает по фазе с напряжением U' (рис. 14-18)

$$U'_a = U_a \sin \delta = 1,54 \cdot 0,093 = 0,14 \text{ В}.$$

Составляющая U''_a сдвинута по фазе на угол 90° относительно U'

$$U''_a = U_a \cos \delta = 1,54 \cdot 0,996 = 1,53 \text{ В}.$$

Напряжение на зажимах катушки

$$U = \sqrt{(U' + U'_a)^2 + (U''_a)^2} = \sqrt{120,1^2 + 1,53^2} = 120,2 \text{ В}.$$

Если бы полученное напряжение U было заметно больше U' , то все величины следовало бы уменьшить в отношении U'/U , допуская, что в узких границах изменения напряжения ток пропорционален приложенному напряжению. В нашем же случае вследствие незначительной разницы между исходным напряжением (120 В) и полученным (120,2 В) пересчитывать величины в отношении 120/120,2 нет необходимости.

Активная мощность катушки

$$P = P_{ст} + I^2 r = 18 + 1,62^2 \cdot 0,95 = 20,5 \text{ Вт.}$$

Коэффициент мощности

$$\cos \varphi = P/UI = 20,5/120 \cdot 1,62 = 0,106.$$

Диаграмма катушки с учетом магнитного потока рассеяния. При всех расчетах и построениях ранее было принято, что весь магнитный поток замыкается в сердечнике. В действительности же только большая часть потока, называемая основным потоком Φ , замыкается в сердечнике, а остальная незначительная часть потока — поток рассеяния Φ_p замыкается по воздуху (рис. 14-19).

Основной поток не пропорционален току (кривая намагничивания); при определении индуктированной им э. д. с. необходимо исходить из формулы

$$e_L = -w d\Phi/dt \text{ или } E = 4,44fw\Phi_m.$$

Основной поток вызывает потери в стали и сдвинут по фазе относительно тока на угол δ . Поток рассеяния, замыкающийся через воздух, и потокосцепление рассеяния Ψ_p пропорциональны току i , а если заменить его эквивалентной синусоидой, то току i' ; при определении индуктированной э. д. с. можно пользоваться понятием индуктивности рассеяния L_p :

$$e_p = -L_p di'/dt, \quad (14-21)$$

где индуктивность рассеяния

$$L_p = \Psi_p/i'. \quad (14-22)$$

Таким образом, с учетом потока рассеяния напряжения на зажимах катушки можно представить состоящим из трех составляющих:

1) составляющей, компенсирующей э. д. с. самоиндукции, которая наводится основным потоком, и опережающей этот поток на $1/4$ периода

$$U' = E = 4,44fw\Phi_m;$$

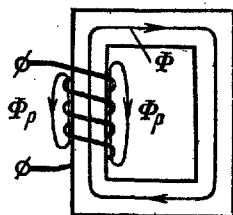


Рис. 14-19. Основной магнитный поток и поток рассеяния.

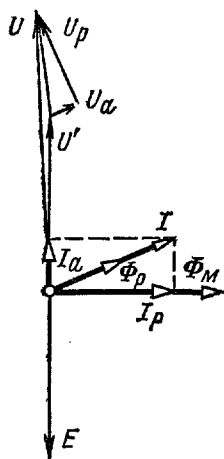


Рис. 14-20. Векторная диаграмма катушки со стальным сердечником с учетом потока рассеяния.

2) составляющей, компенсирующей э. д. с. самоиндукции, которая наводит-ся потоком рассеяния, и опережающей ток на $1/4$ периода

$$U_p = E_p = L_p \omega I; \quad (14-23)$$

3) активного падения напряжения, совпадающего по фазе с током,

$$U_a = Ir.$$

Следовательно, напряжение на зажимах катушки

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}' + \dot{U}_p + \dot{U}_a = \\ &= (-\dot{E}) + (-\dot{E}_p) + \dot{U}_a. \end{aligned}$$

Векторная диаграмма катушки дана на рис. 14-20.

Схема замещения катушки. При рассмотрении цепей, содержащих катушки со стальными сердечниками, последние часто заменяют эквивалентными схемами. Потери в стали в схемах замещения представляются потерями в активных сопротивлениях. Цепь и ее схема замещения при одинаковых напряжениях на зажимах должны иметь одинаковые токи и мощности.

В первой схеме замещения (рис. 14-21) сопротивление r равно активному сопротивлению обмотки, сопротивление

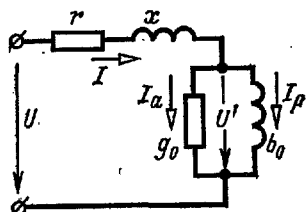


Рис. 14-21. Первая схема замещения катушки со стальным сердечником.

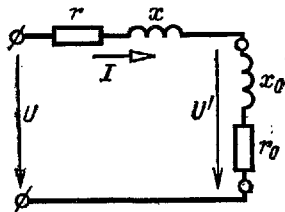


Рис. 14-22. Вторая схема замещения катушки со стальным сердечником.

$x = \omega L_p$ — реактивному сопротивлению индуктивности рассеяния. Реактивная проводимость $b_0 = I_p/U'$ определяется реактивной составляющей тока I_p , а активная проводимость $g_0 = I_a/U'$ — активной составляющей тока I_a , обусловленной потерями в стали. В последних двух форму-

лах напряжение U' на разветвлении по величине равно э. д. с. E , индуцируемой основным магнитным потоком.

Разветвленный участок цепи можно заменить неразветвленным и получить вторую схему замещения (рис. 14-22) с сопротивлениями r_0 и x_0 , причем

$$r_0 = P_{ст}/I^2, \text{ или } r_0 = g_0/(g_0^2 + b_0^2); \quad (14-24)$$

$$x_0 = \sqrt{(U'/I)^2 - r_0^2}, \text{ или } x_0 = b_0/(g_0^2 + b_0^2). \quad (14-25)$$

14-7

Феррорезонанс и феррорезонансный стабилизатор напряжения

Допустим ради упрощения, что в цепи (рис. 14-23), состоящей из катушки со стальным сердечником и конденсатора, несинусоидальные величины заменены эквивалентными синусоидами, а потерями в стали и активным сопротивлением обмотки можно пренебречь. Вольт-амперные характеристики катушки $U_L(I)$ и конденсатора $U_C(I)$ построены на рис. 14-24 в виде кривых OA и OB .

Напряжения на катушке U_L и на конденсаторе U_C изменяются в противофазе (рис. 14-25). Поэтому суммарное напряжение на зажимах цепи можно найти как разность ординат кривых OA и OB . Полученная кривая ODB изображает вольт-амперную характеристику всей цепи $U = |U_L - U_C| = U(I)$.

Точка пересечения характеристик OA и OB , т. е. точка D на кривой ODB , определяет режим, при котором $U_L = U_C$, а ток имеет значение I_a . Этот режим называют феррорезонансом напряжений. При $U_L > U_C$ ток $I < I_a$ и отстает по фазе от напряжения U на 90° (рис. 14-25, а), а при $U_L < U_C$ ток $I > I_a$ и опережает напряжение на 90° (рис. 14-25, б).

Из-за активного сопротивления обмотки катушки, потерь в стали и несинусоидальности кривой тока реальная вольт-амперная характеристика $U(I)$ расположена несколько выше кривой ODB (кривая $oavb$). Из последней характеристики видно, что при одном и том же напряжении $U = U_1$ на зажимах цепи возможны три значения тока: I_1 , I_2 и I_3 . В двух первых случаях ток отстает по фазе от напряжения ($U_L > U_C$), а в третьем — опережает его ($U_L < U_C$). Такая

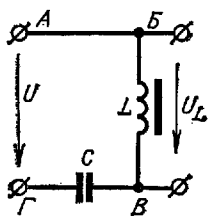


Рис. 14-23. Катушка со стальным сердечником и конденсатор.

неопределенность — несколько значений тока в цепи при одном и том же напряжении — может иметь место только в цепях с нелинейными характеристиками. Режим работы цепи при токах I_1 и I_3 устойчив, так как на восходящих

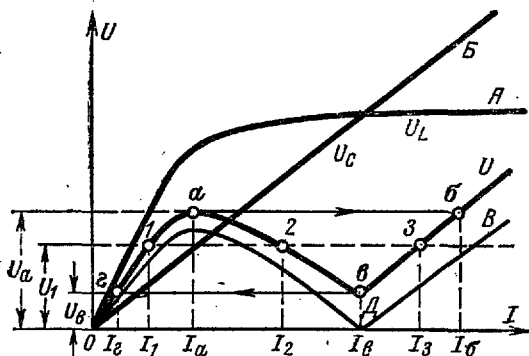


Рис. 14-24. Вольт-амперная характеристика нераз-
включенной цепи, состоящая из катушки со сталь-
ным сердечником и конденсатора.

участках характеристики с увеличением напряжения U ток возрастает, а с уменьшением напряжения уменьшается. Наоборот, режим при токе I_2 неустойчив, так как на спадающем участке вольт-амперной характеристики с уменьшением напряжения U ток растет, а с повышением напря-

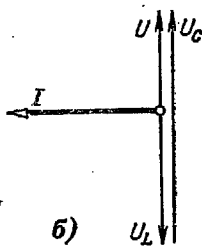
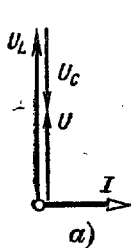


Рис. 14-25. Векторные диаграммы
цепи, изображенной на рис. 14-23,
при $U_L > U_C$ (а) и $U_L < U_C$ (б).

жения падает; малейшее изменение напряжения вызовет переход от этого режима работы цепи к первому или третьему режиму.

Если постепенно увеличивать напряжение на зажимах цепи от нуля до значения U_1 , то ток увеличивается от нуля до значения I_1 ; дальнейшее увеличение напряжения до значения, чуть большего U_a ,

приведет к скачку тока от значения I_a до величины I_6 , после чего с увеличением напряжения ток продолжает возрастать плавно.

Если теперь уменьшать напряжение, то при напряжении U_1 получим устойчивый режим работы с током I_3 . При даль-

нейшем уменьшении напряжения на зажимах цепи ток плавно уменьшается, но когда напряжение достигнет значения, чуть меньшего U_a , получится скачок тока от значения I_a до величины I_2 . Характерно, что при каждом скачке тока его фаза по отношению к приложенному напряжению U изменяется на 180° (рис. 14-25, а и б), поэтому это явление иногда называется «прокидыванием».

На рис. 14-26 построены кривые тока, напряжения на катушке и напряжения на емкости в зависимости от постепенно увеличивающегося напряжения на зажимах цепи (обратные скачки при уменьшении напряжения на этом рисунке не показаны). Естественно, что одновременно со скачком тока происходит значительный скачок напряжения на емкости, что может привести в установках высокого напряжения к перенапряжению, и скачок напряжения на индуктивности.

При скачке тока сердечник катушки насыщается, вследствие чего напряжение на зажимах катушки остается далее почти неизменным даже при значительном изменении напряжения на зажимах цепи. Рассмотренное явление используется в феррорезонансных стабилизаторах напряжения (рис. 14-23), в которых значительное изменение действующего значения входного напряжения (на зажимах $АГ$) вызывает лишь незначительное изменение действующего значения выходного напряжения на зажимах $БВ$, к которым присоединяются приемники энергии.

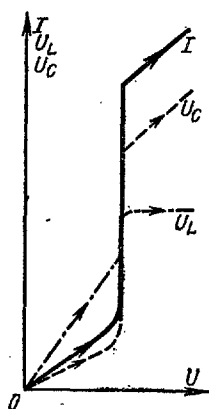


Рис. 14-26. Кривые зависимости тока, напряжения на катушке и напряжения на конденсаторе от напряжения на зажимах цепи.

14-8

Управляемый дроссель. Магнитный усилитель

Управляемый дроссель представляет собой стальной сердечник (рис. 14-27), на который наложены две обмотки: рабочая w_p и обмотка управления или обмотка подмагничивания w_y .

Рабочая обмотка подключена к источнику синусоидального напряжения $u = U_m \cos \omega t$, по ней проходит ток i . Магнитный поток в сердечнике $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$, его ампли-

туда пропорциональна напряжению источника (14-7) $\Phi_m = U/(4,44f w_p)$. На рис. 14-28, а построена кривая магнитного потока $\Phi(t)$ и кривая намагничивания сердечника $\Phi(i)$ в предположении, что тока в обмотке подмагничивания нет. По этим кривым, подобно

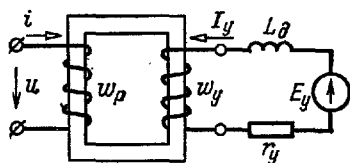


Рис. 14-27. Управляемый дроссель.

тому как и на рис. 14-8, построена кривая $i(t)$. На графиках соответствующие точки обозначены одинаковыми цифрами; при отсутствии насыщения ток практически синусоидальный.

При подключении обмотки подмагничивания, соединенной последовательно с реостатом r_y и добавочной достаточно большой индуктивностью L_d , к источнику питания с постоянной э. д. с. E_y по ней проходит постоянный ток $I_y = E_y/r_y$.

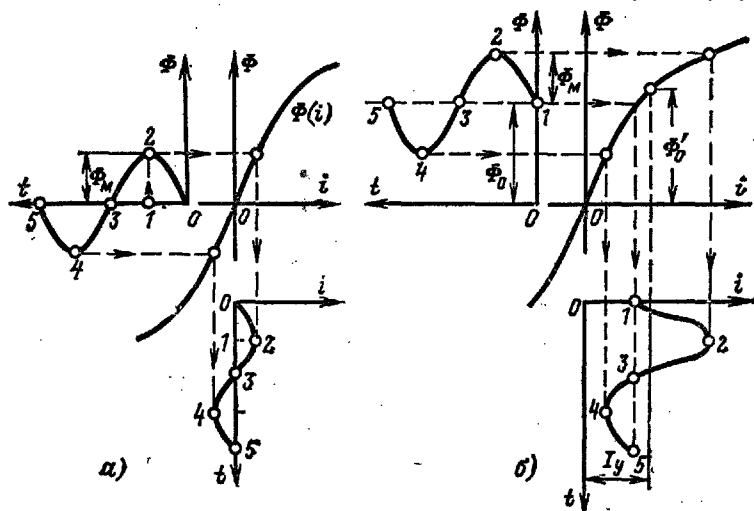


Рис. 14-28. Ток и магнитный поток в катушке со стальным сердечником при намагничивании переменным током (а), при дополнительном подмагничивании постоянным током (б).

Добавочная индуктивность L_d включается, чтобы наводимая в обмотке w_y переменным потоком э. д. с. не вызывала переменный ток в цепи управления.

При прохождении тока I_y поток в сердечнике имеет постоянную составляющую Φ_0 , так что результирующий

магнитный поток в сердечнике можно представить состоящим из двух составляющих:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_m \sin \omega t.$$

На рис. 14-28, б по результирующему магнитному потоку и кривой намагничивания сердечника $\Phi(i)$, как и на рис. 14-28, а построена кривая тока в рабочей обмотке $i(t)$.

Из сравнения кривых рис. 14-28, а и б следует, что во втором случае максимумы тока (точка 2) могут быть значительно больше, чем в первом случае, и, кроме того, кривая тока может отличаться от синусоиды, если постоянная составляющая потока приводит к насыщению сердечника. Таким образом, увеличение постоянного тока в обмотке управления вызывает резкое увеличение тока в рабочей цепи, т. е. изменением постоянного тока можно управлять режимом в рабочей цепи. Это как раз и объясняется тем, что обмотка управления, подмагничивая сердечник, смещает рабочий участок кривой намагничивания в область насыщения, вызывая увеличение тока в рабочей цепи. Иначе говоря, подмагничивание постоянным током уменьшает эквивалентную индуктивность рабочей цепи и ее индуктивное сопротивление $x_L = \omega L_\Sigma$.

Ток I_y , при котором магнитный поток имеет постоянную составляющую Φ_0 , можно найти графически как среднее значение тока $i(t)$ на рис. 14-28, б. При построении принято, что $w_y = w_p$.

Следует обратить внимание на то, что постоянная составляющая магнитного потока Φ_0 при наличии переменного тока в рабочей обмотке меньше постоянного потока Φ'_0 , созданного током I_y при отсутствии переменного тока.

Возможность управлять переменным током дросселя при помощи постоянного тока находит широкое применение в схемах контроля, управления, автоматического регулирования и, в частности, в магнитных усилителях.

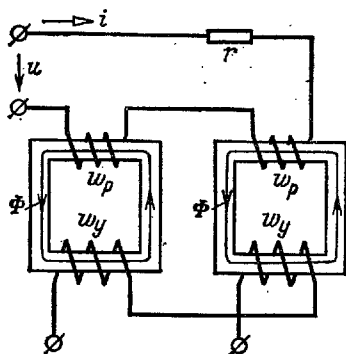


Рис. 14-29. Схема магнитного усилителя.

Усилителем называется устройство, позволяющее управлять значительной мощностью в рабочей цепи, затрачивая незначительную мощность в цепи управления.

Рассмотренный ранее дроссель как усилитель обладает существенным недостатком: в обмотке управления наводится э. д. с., а применение добавочной индуктивности L_d снижает быстродействие цепи управления. Для устранения этого недостатка применяют усилители, состоящие из двух одинаковых дросселей (рис. 14-29).

Рабочая цепь усилителя состоит из двух обмоток и сопротивления приемника r , соединенных последовательно и подключенных к источнику синусоидального напряжения. Рабочие обмотки w_p соединены так, что магнитные потоки в обоих сердечниках направлены одинаково. Обмотки управления w_u соединены встречно. В этом случае переменные э. д. с., наводимые в обмотках управления, направлены противоположно и компенсируют друг друга. Сопротивление цепи управления может быть достаточно малым и мощность рабочей цепи может значительно превышать мощность цепи управления.

14-9

Трансформатор и автотрансформатор

Трансформатор. При передаче и распределении электроэнергии необходимо иметь различные электрические напряжения.

При передаче энергии от электростанции к пункту ее потребления, расположенному на большом расстоянии, для уменьшения потерь электроэнергии и уменьшения веса проводов необходимо напряжение генератора повысить до напряжения электропередачи (примерно сотни киловольт). Напряжение питания отдельных приемников должно быть низким для упрощения их конструкции и для безопасности их обслуживания. Повышение и понижение напряжения достигаются при помощи трансформаторов, работа которых основана на использовании явления взаимной индукции.

Трансформатор, применяемый в сетях передачи электроэнергии, состоит из замкнутого сердечника, который набран из листовой электротехнической стали, и двух (или большего числа) индуктивно связанных обмоток, наложенных на этот сердечник (рис. 14-30). Обмотка w_1 , подключаемая к источнику с напряжением U_1 , называется первичной; другая обмотка w_2 , к которой присоединяются приемники энергии, называется вторичной. Таким образом, этот трансформатор отличается от ранее рассмотренного воздушного трансформатора (§ 11-11) наличием стального сердечника.

Размеры сердечника и числа витков трансформаторов, повышающих или понижающих напряжение, выбирают так, чтобы сердечник не насыщался. В этом случае напряжения, токи, э. д. с. и магнитный поток в сердечнике практически синусоидальные.

Если первичная обмотка трансформатора подключена к сети с напряжением U_1 , а вторичная разомкнута, то режим работы трансформатора называется режимом холостого хода. При холостом ходе процессы, происходящие в первичной цепи трансформатора и его сердеч-

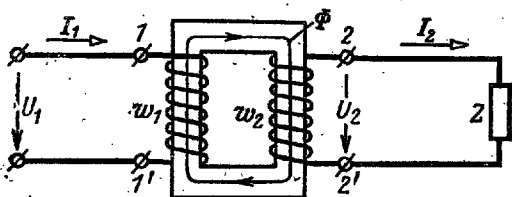


Рис. 14-30. Схема двухобмоточного трансформатора.

нике, те же, что и в катушке со стальным сердечником, от которой он отличается наличием вторичной обмотки.

Ток в первичной обмотке I_{1x} называют в этом режиме током холостого хода. Магнитный поток в сердечнике или основной магнитный поток, пронизывающий обе обмотки, индуцирует в первичной и вторичной обмотках э. д. с.:

$$E_1 = 4,44f w_1 \Phi_m \quad \text{и} \quad E_2 = 4,44f w_2 \Phi_m.$$

Эти э. д. с., отстающие по фазе от магнитного потока на $1/4$ периода, между собой совпадают по фазе (рис. 14-31).

Часть магнитного потока, которая сцеплена только с витками первичной обмотки, называется магнитным потоком рассеяния первичной обмотки Φ_1 . Этот поток наводит в первичной обмотке э. д. с. самоиндукции E_{1p} .

Векторная диаграмма трансформатора при холостом ходе (рис. 14-31) отличается от векторной диаграммы катушки со стальным сердечником (рис. 14-20) только наличием вектора э. д. с. E_2 .

Напряжение на зажимах первичной обмотки трансформатора состоит из трех составляющих:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 + \dot{U}_{1a} + \dot{U}_{1p}.$$

При холостом ходе первая из них U'_1 (равная по величине э. д. с. E_1) приблизительно равна первичному напряжению U_1 , так как две другие составляющие (активное и реактивное падения напряжения в первичной обмотке) благодаря малому значению тока холостого хода малы по сравнению с первой. Таким образом, при холостом ходе первичное напряжение U_1 приблизительно равно э. д. с. E_1 , а вторичное напряжение U_2 равно э. д. с. E_2 , так как ток $I_2 = 0$.

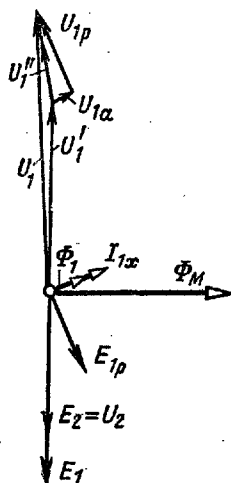


Рис. 14-31. Векторная диаграмма трансформатора при холостом ходе.

Отношение напряжений на зажимах обмоток при холостом ходе трансформатора

$$\frac{U_1}{U_2} \approx \frac{E_1}{E_2} = \frac{4,44f\omega_1\Phi_M}{4,44f\omega_2\Phi_M} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = n \quad (14-26)$$

называется коэффициентом трансформации.

Если $\omega_1/\omega_2 > 1$ ($U_1 > U_2$), трансформатор называют понижающим, при $\omega_1/\omega_2 < 1$ ($U_1 < U_2$) — повышающим.

В рабочем режиме трансформатора, т. е. при замкнутой вторичной обмотке на сопротивление приемника Z , первичное напряжение, как и при холостом ходе, состоит из трех составляющих

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 + \dot{U}_{1a} + \dot{U}_{1p}$$

(рис. 14-32) или

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1,$$

где

$$U'_1 = E_1$$

и

$$U''_1 = \sqrt{U_{1a}^2 + U_{1p}^2} = I_1 \sqrt{r_1^2 + x_1^2} = I_1 z_1$$

— падение напряжения в первичной обмотке трансформатора. Падение напряжения в первичной обмотке U''_1 даже при номинальном токе $I_{1н}$ обычно не превышает 1—2% первичного напряжения, так как активное сопротивление обмотки r_1 и индуктивное сопротивление рассеяния x_1 малы. Поэтому составляющую U''_1 опять можно считать примерно равной первичному напряжению U_1 . Для уменьшения потока рассеяния и, следовательно, падения напряжения $U_{1p} = I_1 x_1$ обмотки трансформатора ω_1 и ω_2 помещают на один стержень, так как поток рассеяния зависит от промежутка между обмотками.

Рис. 14-32. Векторная диаграмма нагруженного трансформатора.

Таким образом, независимо от режима работы трансформатора, т. е. от его нагрузки, при неизменном значении первичного напряжения U_1 почти неизменной остается и э. д. с. E_1 , а следовательно, и основной магнитный поток Φ_M .

Во вторичной обмотке и в приемнике энергии с сопротивлением $z = \sqrt{r^2 + x^2}$ под действием э. д. с. E_2 возникает ток

$$I_2 = \frac{E_2}{\sqrt{(r_2 + r)^2 + (x_2 + x)^2}}, \quad (14-27)$$

где r_2 и x_2 — активное и индуктивное сопротивления рассеяния вторичной обмотки трансформатора.

Ток I_2 отстает по фазе от э. д. с. E_2 на угол ψ_2 , определяемый по формуле

$$\operatorname{tg} \psi_2 = (x_2 + x)/(r_2 + r). \quad (14-28)$$

Независимо от величины тока I_2 и н. с. $I_2 \omega_2$ рабочий магнитный поток трансформатора, как указывалось, не изменяется. Это возможно

только в том случае, если одновременно с появлением во вторичной цепи тока I_2 в первичной цепи ток I_1 увеличится до значения, при котором сумма н. с. первичной и вторичной обмоток равна н. с. холостого хода, т. е.

$$I_1 w_1 + I_2 w_2 = I_{1x} w_1,$$

откуда ток

$$I_1 = I_{1x} + (-I_2 w_2 / w_1). \quad (14-29)$$

Рост тока первичной цепи от значения I_{1x} до величины I_1 вызывает, конечно, увеличение падения напряжения в первичной обмотке ($I_1 z_1 > I_{1x} z_1$), что при неизменном первичном напряжении U_1 возможно только при уменьшении составляющей U'_1 , а следовательно, и рабочего магнитного потока Φ_m . Но эти изменения весьма незначительны, так как падение напряжения в обмотке трансформатора, как указывалось, не превышает 1—2%.

Ток холостого хода трансформатора мал по сравнению с током первичной цепи I_1 при значительных нагрузках трансформатора. Поэтому в уравнении (14-29) им можно пренебречь и, следовательно, написать:

$$I_1 = -I_2 w_2 / w_1$$

или

$$I_1 / I_2 = w_2 / w_1 = 1/n. \quad (14-30)$$

У нагруженного трансформатора индуцированная во вторичной обмотке э. д. с. E_2 состоит из двух составляющих: падения напряжения во вторичной обмотке $I_2 z_2 = I_2 \sqrt{r_2^2 + x_2^2} = \sqrt{U_{2a}^2 + U_{2p}^2}$ и напряжения на сопротивлении приемника, равное напряжению на зажимах вторичной обмотки трансформатора, $U_2 = I_2 z$ (рис. 14-32). На рис. 14-32 дана векторная диаграмма трансформатора для случая смешанной нагрузки (активной и индуктивной) с углом сдвига фаз φ_2 , определяемым из соотношения $\operatorname{tg} \varphi_2 = x/r$.

Необходимо обратить внимание на то, что часть напряжения первичной цепи U'_1 , равная E_1 , сдвинута по фазе относительно э. д. с. E_1 и E_2 на угол 180° . При незначительных падениях напряжения в обмотках трансформатора первичное напряжение U_1 сдвинуто по фазе относительно составляющей U'_1 на весьма незначительный угол; также на незначительный угол сдвинуто напряжение U_2 относительно э. д. с. E_2 . Таким образом, угол сдвига фаз между напряжениями U_1 и U_2 близок к 180° и во многих случаях с достаточной точностью его можно считать равным 180° . Угол сдвига фаз между токами I_1 и I_2 также близок к 180° .

Автотрансформатор. Автотрансформатор отличается от трансформатора тем, что вместо двух обмоток имеет одну, разделенную на две части (рис. 14-33).

При включении в сеть с напряжением U_1 во всей обмотке автотрансформатора с числом витков w_1 индуцируется э. д. с.

$$E_1 = 4,44 f w_1 \Phi_m \approx U_1.$$

На участке обмотки с числом витков w_2 напряжение

$$U_2 \approx E_2 = 4,44 f w_2 \Phi_m.$$

Таким образом

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{w_1}{w_2} = n,$$

откуда вторичное напряжение

$$U_2 = U_1 \omega_2 / \omega_1 = U_1 / n.$$

Выбирая участок обмотки с соответствующим числом витков ω_2 , можно на его зажимах получить напряжение, составляющее часть первичного напряжения, или, наоборот, подведя напряжение к части обмотки с числом витков ω_2 , на зажимах всей обмотки с числом витков ω_1 получить увеличенное напряжение.

Аналогично трансформатору соотношение между токами в автотрансформаторе определяется уравнением

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2,$$

откуда

$$I_2 = I_1 \omega_1 / \omega_2 = I_1 n.$$

Рис. 14-33. Схема автотрансформатора.

Ток I_2 сдвинут по фазе относительно тока I_1 на угол, близкий к 180° , т. е. направлен в части обмотки с числом витков ω_2 противоположно току I_1 . Таким образом, ток на участке обмотки с числом витков ω_2 практически равен разности токов (I_1 и I_2). Это, с одной стороны, приводит к уменьшению потерь на нагревание обмоток, а с другой стороны, дает возможность участок обмотки ω_2 выполнить из провода меньшего сечения, т. е. получить экономную материала обмотки.

14-10

Угритель частоты

Включим в трехфазную сеть с симметричной системой напряжений первичные обмотки трех однофазных трансформаторов, соединенных звездой без нулевого провода (рис. 14-34, а).

Из § 13-8 известно, что в этом случае по обмотке трансформаторов проходят практически синусоидальные токи, так как токи третьих гармоник, совпадающие по фазе, проходить не могут. Если при работе трансформаторов сердечники находятся в состоянии насыщения, то магнитные потоки трансформаторов несинусоидальны (§ 14-4) и наводят во вторичных обмотках трансформаторов несинусоидальные э. д. с. e_A, e_B, e_C , содержащие, кроме основной, резко выраженную третью гармонику (e_{A3}, e_{B3}, e_{C3}).

Соединив последовательно вторичные обмотки трансформаторов (рис. 14-34, а) на входных зажимах, получим напряжение, равное сумме э. д. с. трех третьих гармоник

$$u_{\text{вых}} = e_{A3} + e_{B3} + e_{C3} = 3e_3,$$

так как сумма трех э. д. с. основных гармоник, сдвинутых по фазе относительно друг друга на 120° , равна нулю.

Рассмотренная схема применяется в утроителях частоты.

Из § 13-8 известно, что в четырехпроводной трехфазной цепи (рис. 14-34, б) при симметричных синусоидальных фазных э. д. с. и равномерной нагрузке ток в нейтральном проводе равен нулю ($i_N = 0$). Если приемник состоит из трех одинаковых нелинейных сопротивлений, например трех катушек со стальными сердечниками, работающими с насыщением, то фазные токи несинусоидальны. Они,

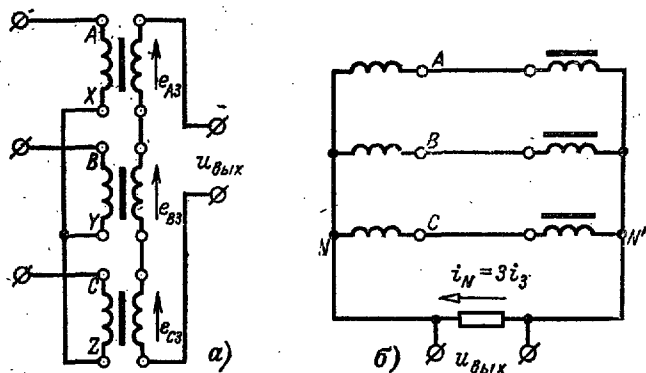


Рис. 14-34. Схема утроителя частоты.

кроме основных гармоник, содержат третьи гармоники, которые, совпадая по фазе, дают в нейтральном проводе ток, равный сумме трех третьих гармоник фазных токов: $i_N = 3i_3$. На выходе схемы будет изменяющееся с тройной частотой напряжение $u_{\text{вых}}$, которое зависит от насыщения сердечников.

При объяснении принципа действия утроителей было сделано предположение, что 5-я, 7-я и т. д. гармоники незначительны и их можно не учитывать.

Глава пятнадцатая

Переходные процессы в электрических цепях

15-1

Законы коммутации

До сих пор мы рассматривали в основном установившиеся процессы в электрических цепях, когда напряжения, токи и т. д. в течение длительного про-

межутка времени остаются постоянными или изменяются периодически. Такой режим цепи устанавливается при достаточно длительном действии источников постоянной или периодической (в частности синусоидальной) э. д. с. и поэтому называется еще **п р и н у ж д е н н ы м р е ж и м о м**. Принужденный режим устанавливается в цепи не мгновенно вслед за моментом включения или отключения источников питания или моментом изменения ее параметров (L , C и r), т. е. за моментом коммутации.

С момента коммутации в цепи наблюдается **п е р е х о д н ы й п р о ц е с с**, который только через достаточно большой интервал времени (теоретически бесконечно большой) сменяется принужденным режимом.

Рассмотрим цепь с сопротивлением r и индуктивностью L . При постоянном напряжении U_1 на ее зажимах режим характеризуется постоянными величинами: тока $I_1 = U_1/r$, магнитного потока $\Phi_1 = LI_1/\omega$, энергии магнитного поля $W_1 = LI_1^2/2$, мощности $P_1 = I_1^2 r$ и т. д. Если напряжение изменится до величины U_2 , то новое принужденное состояние цепи будет характеризоваться новыми постоянными величинами: тока $I_2 = U_2/r$, магнитного потока $\Phi_2 = LI_2/\omega$, энергии магнитного поля $W_2 = LI_2^2/2$, мощности $P_2 = I_2^2 r$.

Переход от одного принужденного состояния к другому не может произойти мгновенно, т. е. скачком, так как при мгновенном переходе ($\Delta t \rightarrow 0$) ток цепи должен был бы скачком измениться на величину $\Delta I = I_2 - I_1$, что вызвало бы появление бесконечно большой э. д. с. самоиндукции

$$e_L = -L \Delta I / \Delta t \rightarrow \infty.$$

Вместе с тем энергия магнитного поля цепи изменилась бы мгновенно на величину $\Delta W = W_2 - W_1$ и, следовательно, питающий цепь генератор должен был бы развить бесконечно большую мощность

$$p = \Delta W / \Delta t \rightarrow \infty.$$

Так как э. д. с. самоиндукции и мощность генератора в реальных цепях могут иметь только конечные значения, то переход от одного принужденного состояния цепи с индуктивностью к другому ее состоянию может происходить только в течение конечных промежутков времени.

Это положение и выражает **п е р в ы й з а к о н к о м м у т а ц и и**: ток в индуктивности не может изменяться скачком, или, иначе, ток в момент, непосредственно следующий за коммутацией, имеет то же

значение, которое он имел в момент, непосредственно предшествующий коммутации.

Рассмотрим теперь цепь с емкостью C и активным сопротивлением r . При изменении напряжения на ее зажимах или при изменении ее параметров, т. е. при коммутации, переход от одного принужденного состояния цепи к другому также не может происходить мгновенно, т. е. скачком. В противном случае напряжение на зажимах емкости должно было бы мгновенно ($\Delta t \rightarrow 0$) измениться на величину $\Delta U = U_{C2} - U_{C1}$ и вызвать бесконечно большой зарядный (или разрядный) ток.

$$i = C \Delta U / \Delta t \rightarrow \infty,$$

а питающий цепь генератор должен был бы развить бесконечно большую мощность

$$p = \Delta W / \Delta t \rightarrow \infty.$$

Ток в цепи и мощность генератора могут иметь только конечные значения, поэтому переход от одного принужденного состояния цепи с емкостью к другому может происходить только в течение конечных промежутков времени.

Это положение и выражает второй закон коммутации: напряжение на емкости не может изменяться скачком, или, иначе, напряжение на емкости в момент, непосредственно следующий за коммутацией, имеет то же значение, что и в момент, непосредственно предшествующий коммутации.

Таким образом, один принужденный режим цепи отделяется от другого некоторым промежутком времени, в течение которого происходят явления, обеспечивающие постепенный переход от прежнего состояния цепи к новому.

Изучение переходных процессов в линейных цепях упрощается, если переходный процесс рассматривать как результат наложения двух процессов. Первого — нового **п р и н у ж д е н н о** го режима, полагая, что он наступает мгновенно после коммутации, и второго — **с в о б о д н о** го процесса, обеспечивающего переход цепи от прежнего принужденного режима к новому принужденному режиму.

Свободный процесс возникает после коммутации вследствие несоответствия энергии, запасенной в магнитном или электрическом полях цепи (в индуктивностях и емкостях), новому принужденному режиму. С проявлениями свободного процесса мы уже встречались в § 6-7 и 7-11. Значения

свободных токов и напряжений зависят от величины несоответствия энергий магнитного и электрического полей новому принужденному режиму; по мере уменьшения этого несоответствия свободные токи и напряжения постепенно уменьшаются до нулевых значений.

Таким образом, действительный ток в цепи в течение переходного процесса можно представить в виде суммы нового принужденного тока и свободного тока

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}. \quad (15-1)$$

Аналогично напряжение в течение переходного процесса

$$u = u_{\text{пр}} + u_{\text{св}}. \quad (15-2)$$

15-2

Включение цепи с индуктивностью и сопротивлением на постоянное напряжение

При включении неразветвленной цепи с индуктивностью L и сопротивлением r к источнику постоянного напряжения U (рис. 15-1) ток в цепи вследствие действия э. д. с. самоиндукции нарастает постепенно от нуля до принужденного (установившегося) значения $i_{\text{пр}} = U/r = I$.

Запишем для рассматриваемой цепи по второму закону Кирхгофа уравнение (6-33) в следующем виде:

$$U = ir + L di/dt, \quad (15-3)$$

или после подстановки (15-1)

$$U = (i_{\text{пр}} + i_{\text{св}})r + L d(i_{\text{пр}} + i_{\text{св}})/dt. \quad (15-4)$$

Рис. 15-1. Включение цепи с L и r на постоянное напряжение.

Так как в принужденном режиме цепи $i_{\text{св}} = 0$, то для принужденного режима

$$U = i_{\text{пр}}r + L di_{\text{пр}}/dt. \quad (15-5)$$

Вычитая почленно это уравнение из (15-4), получаем уравнение для свободного тока:

$$0 = i_{\text{св}}r + L di_{\text{св}}/dt, \quad (15-6)$$

или

$$i_{\text{св}} = -\frac{L}{r} \frac{di_{\text{св}}}{dt} = -\tau \frac{di_{\text{св}}}{dt},$$

где $L/r = \tau$ — постоянная времени цепи (§ 6-7).

Запишем последнее уравнение, разделив переменные

$$di_{\text{св}}/i_{\text{св}} = -dt/\tau;$$

проинтегрировав его, найдем:

$$\ln i_{\text{св}} = -\frac{t}{\tau} + \text{const.}$$

Обозначим постоянную интегрирования (const) как логарифм некоторой новой постоянной K . Тогда

$$\ln i_{\text{св}} = -t/\tau + \ln K, \text{ или } \ln (i_{\text{св}}/K) = -t/\tau,$$

откуда, потенцируя, получаем:

$$i_{\text{св}}/K = e^{-t/\tau}, \text{ или } i_{\text{св}} = Ke^{-t/\tau}. \quad (15-7)$$

Постоянную K находим из начальных условий. Так как до коммутации (до включения) ток в цепи был равен нулю, то по первому закону коммутации и после коммутации в первый момент ($t = 0$) ток

$$i(0) = i_{\text{пр}}(0) + i_{\text{св}}(0) = 0, \quad (15-8)$$

где $i_{\text{пр}}(0) = i_{\text{пр}} = I$, так как при постоянном напряжении в цепи с L и r принужденный ток также постоянный.

Следовательно, по (15-7) и (15-8)

$$i_{\text{св}}(0) = Ke^{-0/\tau} = K = -i_{\text{пр}} = -I,$$

откуда

$$K = -I$$

и свободный ток (15-7)

$$i_{\text{св}} = -Ie^{-t/\tau}, \quad (15-9)$$

а ток переходного процесса

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}} = I - Ie^{-t/\tau} = I(1 - e^{-t/\tau}). \quad (15-10)$$

На рис. 15-2 дан график тока цепи с L и r при ее включении.

Из (15-10) следует, что в начальный момент времени ($t = 0$) свободный ток, равный по значению и обратный по знаку принужденному току, компенсирует принужденный ток, так что ток переходного процесса равен нулю. Затем свободный ток уменьшается (15-9) по закону показательной функции, а ток переходного процесса увеличивается (рис. 15-2). Наконец, при $t \rightarrow \infty$ ток достигает принужденного значения $I = U/r$.

Теоретически ток достигнет установившегося значения через бесконечно большое время. А практически часто установившийся режим наступает очень быстро. О продолжи-

тельности переходного процесса судят по постоянной времени. Действительно, по прошествии времени $t = \tau$ ток

$$i_{\tau} = I(1 - e^{-1}) = I(1 - 1/e) \approx 0,63I,$$

т. е. возрастает от нуля до 63% от I .

Через время $t = 3\tau$ ток

$$i_{3\tau} = I(1 - e^{-3}) = I\left(1 - \frac{1}{20}\right) = 0,95I,$$

т. е. достигает 95% тока принужденного режима. Считая, что переходный процесс оканчивается при токе, отличающемся на 1% тока принужденного режима I , получаем из (15-10) продолжительность переходного процесса $t = 4,6\tau$, так что при малой индуктивности цепи ($\tau = L/r$ мало)

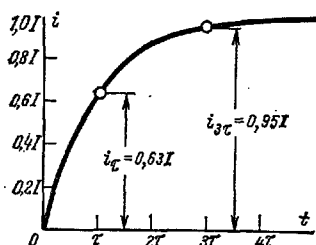


Рис. 15-2. Изменение тока при включении цепи с L и r на постоянное напряжение.

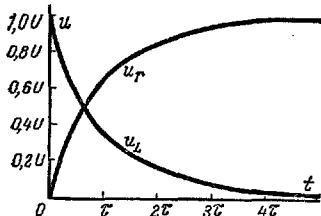


Рис. 15-3. Кривые напряжений u_L и u_r .

принужденный режим может наступить через доли секунды и даже миллисекунды.

Напряжение на активном сопротивлении при переходном процессе

$$u_r = ir = Ir(1 - e^{-t/\tau}) = U(1 - e^{-t/\tau}). \quad (15-11)$$

Напряжение на индуктивности при переходном процессе

$$u_L = U - u_r = U - U(1 - e^{-t/\tau}) = Ue^{-t/\tau}. \quad (15-12)$$

Электродвижущая сила самоиндукции при переходном процессе

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{I}{\tau} e^{-t/\tau} = -Ire^{-t/\tau} = -Ue^{-t/\tau}, \quad (15-13)$$

т. е. равна по значению и обратна по знаку напряжению на индуктивности. В начальный момент она имеет наибольшее значение, равное напряжению на зажимах цепи U , и с ростом тока спадает до нулевого значения.

На рис. 15-3 показано изменение напряжений u_r и u_L .

15-3

Короткое замыкание цепи с индуктивностью и сопротивлением

Если цепь с индуктивностью L и сопротивлением r присоединена к источнику постоянного напряжения (рис. 15-4), то при коротком замыкании ток i в ней не исчезнет мгновенно (сопротивление r_1 исключает короткое замыкание источника). Он будет поддерживаться в течение некоторого времени э. д. с. самоиндукции $e_L = -L di/dt$, имеющей то же направление, что и ток i в цепи до ее замыкания, так как $di/dt < 0$. Ток i будет проходить до тех пор, пока вся энергия, запасенная в магнитном поле, не превратится в тепло в сопротивлении r .

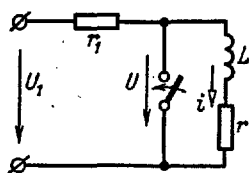


Рис. 15-4. Короткое замыкание цепи с L и r .

Так как источника питания в короткозамкнутом участке с L и r нет, то уравнение (15-3) для рассматриваемого случая запишем в виде

$$0 = ir + L di/dt. \quad (15-14)$$

Во время переходного процесса

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}},$$

т. е. уравнение (15-4) можно переписать в виде

$$0 = (i_{\text{пр}} + i_{\text{св}})r + L d(i_{\text{пр}} + i_{\text{св}})/dt. \quad (15-15)$$

В рассматриваемом случае новый принужденный ток $i_{\text{пр}} = 0$, так как в контуре нет источника питания.

Таким образом, во время переходного процесса в цепи будет только свободный ток $i = i_{\text{св}}$ и, следовательно,

$$0 = i_{\text{св}}r + L di_{\text{св}}/dt, \quad (15-16)$$

откуда

$$di_{\text{св}}/i_{\text{св}} = -r dt/L = -dt/\tau.$$

Решим полученное дифференциальное уравнение

$$\ln i_{\text{св}} = -t/\tau + \ln K,$$

откуда

$$i_{\text{св}} = Ke^{-t/\tau}. \quad (15-17)$$

Обозначив ток в цепи до короткого замыкания $i \equiv I = U_1 (r_1 + r)$, напомним по первому закону коммутации для начального момента ($t = 0$) и в соответствии с (15-17)

$$i(0) = I = i_{\text{св}}(0) = K.$$

Таким образом,

$$i = i_{\text{св}} = I e^{-t/\tau}. \quad (15-18)$$

Изменение тока показано на рис. 15-5.

Из выражения (15-18) следует, что ток в начальный момент имеет наибольшее значение, а затем уменьшается, достигая практически нулевого значения по прошествии времени $t = 5\tau$.

В течение переходного процесса вследствие изменения тока в цепи индуктируется э. д. с. самоиндукции, которую можно найти, дифференцируя (15-18),

$$\begin{aligned} e_L &= -L \frac{di}{dt} = LI \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = \\ &= I r e^{-t/\tau} = U e^{-t/\tau}. \end{aligned} \quad (15-19)$$

Рис. 15-5. Кривые тока i и э. д. с. e_L при коротком замыкании цепи с L и r .

В момент замыкания участка цепи накоротко ($t = 0$) э. д. с. самоиндукции

$$e_L(0) = U e^0 = U, \quad (15-20)$$

т. е. э. д. с. имеет наибольшее значение, равное напряжению на зажимах участка цепи с L и r , до момента его замыкания.

15-4

Отключение цепи с индуктивностью и сопротивлением

При отключении участка цепи с L и r , параллельно которому присоединен резистор r_2 (рис. 15-6) и который находился под действием постоянного напряжения U , ток i определяется так же, как при коротком замыкании, рассмотренном в предыдущем параграфе. Настоящий случай отличается от предыдущего тем, что при выключении цепи (рис. 15-6) сопротивление отключенного контура больше на величину r_2 , вследствие чего постоянная цепи $\tau' = L/(r+r_2)$ меньше $\tau = L/r$.

Теперь э. д. с. самоиндукции

$$e'_L = -L \frac{di}{dt} = LI \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = I(r + r_2) e^{-t/\tau};$$

наоборот, больше, чем в предыдущем случае.

В начальный момент э. д. с. $e'_L(0) = I(r + r_2)$, а отношение ее к э. д. с., индуктированной в короткозамкнутой цепи,

$$\frac{e'_L(0)}{e_L(0)} = \frac{I(r + r_2)}{Ir} = \frac{r + r_2}{r},$$

откуда

$$e'_L(0) = e_L(0) \frac{r + r_2}{r} = U \frac{r + r_2}{r}.$$

(15-21)

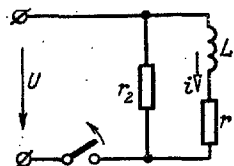


Рис. 15-6. Отключение разветвленной цепи с L и r .

Полученное выражение показывает, что увеличение сопротивления отключаемого участка приводит к росту индуктированной в ней э. д. с. Эта э. д. с. может достигнуть опасных для цепи значений, во много раз превосходящих напряжение, под которым она находилась до отключения.

Пример 15-1. Определить начальные значения напряжения и тока переходного процесса при выключении рубильника (рис. 15-6) для вольтметра с номинальным напряжением 150 В, сопротивление которого $r_v = r_2 = 1000$ Ом, если напряжение источника питания $U = 100$ В, а сопротивление $r = 100$ Ом.

Решение. При замкнутом рубильнике в ветви L, r ток $I = U/r = 100/100 = 1$ А.

Согласно первому закону коммутации ток в цепи с индуктивностью в первый момент после коммутации равен току в момент, предшествующий коммутации; следовательно, $i(0) = I = 1$ А и ток вольтметра (в сопротивлении r_2) такой же $i_v = i$.

Так как начальное значение тока в вольтметре $i_v(0) = 1$ А, то начальное значение напряжения на вольтметре

$$u_v(0) = i_v(0) r_v = 1 \cdot 1000 = 1000 \text{ В.}$$

Импульс напряжения $u_v(0) = 1000$ В при номинальном напряжении 150 В может вызвать повреждение вольтметра, поэтому вольтметр должен быть отключен перед размыканием цепи.

Переходный процесс при отключении неразветвленной цепи с L и r (рис. 15-7) протекает сложнее, чем при ее включении.

При отключении цепи контакты рубильника расходятся и в цепь последовательно включается сопротивление воздушного промежутка между удаляющимися друг от друга контактами рубильника. Если предположить, что проводи-

мость воздуха весьма мала, то ток в такой цепи должен почти мгновенно уменьшиться до нуля и в цепи возникает очень большая э. д. с. самоиндукции. Эта э. д. с. вызовет между расходящимися контактами рубильника сильное электрическое поле, так что произойдет ионизация воздуха, возможно даже вырывание с поверхности контактов рубиль-

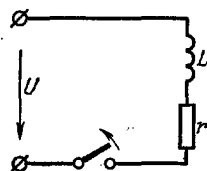


Рис. 15-7. Отключение цепи с L и r .

ника свободных электронов (явление автоэмиссии); в воздушном промежутке возникнет искровой или дуговой разряд.

Таким образом, газовый промежуток между расходящимися контактами рубильника при отключении цепи обладает проводимостью и ток в цепи уменьшается до нуля не мгновенно. Сопротивление газового промежутка между контактами выключающего устройства

нелинейно; поэтому анализ переходного процесса при отключении достаточно сложен. Следует помнить, что отключение цепей, по которым проходят значительные токи (согны, тысячи ампер и более), протекает очень тяжело для выключающей аппаратуры. Для разрыва таких цепей применяются специальные выключающие устройства, не разрушающиеся от дугowego разряда и обеспечивающие быстрое его гашение и разрыв цепи тока.

15-5

Включение цепи с емкостью и сопротивлением на постоянное напряжение

Присоединим незаряженный конденсатор (рис. 15-8) с емкостью C через резистор с сопротивлением r к источнику питания с постоянным напряжением U .

Напряжение на зажимах конденсатора пропорционально заряду на его пластинах $u_c = q/C$, и так как конденсатор не был заряжен, то по закону коммутации напряжение на конденсаторе в момент его включения ($t = 0$) равно нулю, т. е. $u_c(0) = 0$.

После окончания заряда (в установившемся режиме) напряжение на конденсаторе будет равно напряжению источника питания, т. е. $u_{c\text{ пр}} = U$.

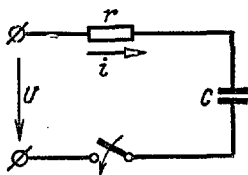


Рис. 15-8. Заряд конденсатора через резистор.

Во время переходного процесса напряжение на конденсаторе можно представить состоящим из двух слагающих: напряжения принужденного режима $u_{C\text{пр}} = U$ и напряжения свободного процесса $u_{C\text{св}}$, т. е.

$$u_C = u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}} = U + u_{C\text{св}}.$$

По второму закону Кирхгофа для цепи (рис. 15-8)

$$U = ir + u_C \quad (15-22)$$

или, заменяя ток

$$i = dq/dt = C du_C/dt,$$

получаем уравнение цепи

$$U = rC \frac{du_C}{dt} + u_C. \quad (15-23)$$

Учитывая, что $u_C = U + u_{C\text{св}}$, можем переписать (15-23) в виде

$$U = rC \frac{du_{C\text{св}}}{dt} + U + u_{C\text{св}},$$

так как производная от постоянной величины U равна нулю.

Из последнего уравнения для свободного процесса получаем:

$$du_{C\text{св}}/u_{C\text{св}} = - dt/rC.$$

Как известно (§ 7-11), произведение $rC = \tau$ называется постоянной времени цепи с r и C , так что

$$du_{C\text{св}}/u_{C\text{св}} = - dt/\tau.$$

Интегрируя уравнение почленно, находим, что

$$\ln u_{C\text{св}} = -\frac{t}{\tau} + \ln K,$$

откуда

$$u_{C\text{св}} = Ke^{-t/\tau}.$$

Постоянную интегрирования K определяем из начальных условий. При $t = 0$ по второму закону коммутации $u_C(0) = 0$, т. е.

$$u_C(0) = u_{C\text{пр}}(0) + u_{C\text{св}}(0) = U + Ke^{-0/\tau} = 0,$$

откуда

$$U + K = 0 \text{ или } K = -U.$$

Таким образом, напряжение на конденсаторе при заряде

$$u_C = U - Ue^{-t/\tau} = U(1 - e^{-t/\tau}), \quad (15-24)$$

т. е. оно равно разности постоянного напряжения U источника питания и свободного напряжения, убывающего с течением времени по закону показательной функции от значения U до нуля.

Изменение напряжения u_C показано на рис. 15-9.

Ток переходного процесса, или зарядный ток,

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{1}{\tau} U e^{-t/\tau} = I e^{-t/\tau}, \quad (15-25)$$

где

$$I = CU/\tau = U/r.$$

Ток i от начального значения I с течением времени постепенно уменьшается по закону показательной функции (рис. 15-9).

За время $t = \tau$ зарядный ток (15-25) уменьшается в $e \approx 2,72$ раза:

$$i_\tau = I e^{-1} \approx I/2,72 = 0,37I,$$

а напряжение на конденсаторе (15-24) за то же время возрастает от 0 до $0,63U$:

$$u_\tau = U \left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 0,63U.$$

Рис. 15-9. Изменение тока и напряжения на конденсаторе при его заряде.

За время $t = 3\tau$ ток уменьшается до $0,05I$, а напряжение на конденсаторе увеличивается до $0,95U$. По прошествии $t = 5\tau$ заряд конденсатора практически заканчивается.

Падение напряжения на сопротивлении r пропорционально току

$$u_r = ir = U e^{-t/\tau}. \quad (15-26)$$

15-6

Короткое замыкание цепи с емкостью и сопротивлением

В общем случае напряжение на зажимах цепи с емкостью C и сопротивлением r (рис. 15-10) состоит из двух слагающих (15-22): напряжения на емкости u_C и напряжения на сопротивлении ir , т. е.

$$U = ir + u_C.$$

При коротком замыкании цепи (рис. 15-10) источника питания в цепи с C и r нет, поэтому $u_{C\text{пр}} = 0$, $i_{\text{пр}} = 0$ и $u_C = u_{C\text{св}}$, $i = i_{\text{св}}$. Уравнение цепи по второму закону Кирхгофа

$$0 = ir + u_C \text{ или } ir = -u_C,$$

а ток в цепи

$$i = -u_C/r. \quad (15-27)$$

Знак минус показывает, что при разряде конденсатора ток в цепи направлен обратно тому направлению (положительному), которое показано на рис. 15-10, и обратно току при заряде конденсатора.

Так как ток

$$i = dq/dt = C du_C/dt,$$

то с учетом (15-27)

$$C du_C/dt = -u_C/r,$$

откуда получаем дифференциальное уравнение для напряжения на конденсаторе

$$du_C/u_C = -dt/(rC) = -dt/\tau.$$

Интегрируя правую и левую части уравнения, получаем:

$$\ln u_C = -\frac{t}{\tau} + \ln K.$$

Из полученного выражения следует, что

$$u_C = u_{C\text{св}} = Ke^{-t/\tau}. \quad (15-28)$$

Постоянную K найдем из начальных условий. По второму закону коммутации в начальный момент разряда конденсатора ($t = 0$) напряжение остается таким же, как и до переключения рубильника, т. е. $u_C(0) = U$ и по (15-28)

$$u_C(0) = Ke^{-0/\tau} = U;$$

поэтому $K = U$.

Таким образом, напряжение на конденсаторе при разряде

$$u_C = u_{C\text{св}} = Ue^{-t/\tau}, \quad (15-29)$$

а ток в цепи (разрядный)

$$i = i_{\text{св}} = -\frac{u_C}{r} = -Ie^{-t/\tau}, \quad (15-30)$$

где $I = U/r$.

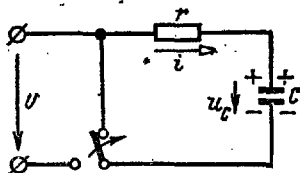


Рис. 15-10. Разряд конденсатора через резистор.

Кривые напряжения и тока даны на рис. 15-11.

Напряжение на конденсаторе в начальный момент имеет наибольшее значение, а затем изменяется по закону показательной функции, достигая по прошествии времени $t = 5\tau$ практически нулевого значения. Ток в контуре C, r

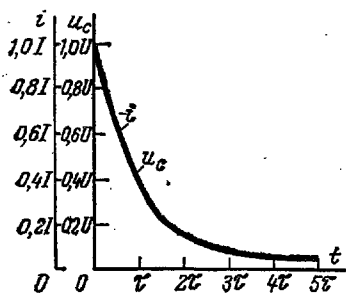


Рис. 15-11. Изменение тока и напряжения на конденсаторе при его разряде.

в начальный момент ($t = 0$) скачком изменяется от 0 до значения $-U/r$, а затем изменяется пропорционально напряжению на конденсаторе. Скорость протекания процесса, как и раньше, определяется постоянной времени τ .

Вся энергия электрического поля заряженного конденсатора за время разряда превращается в тепло в резисторе r .

15-7

Включение цепи с индуктивностью и сопротивлением на синусоидальное напряжение

При включении цепи с индуктивностью L и сопротивлением r (рис. 15-1) в момент, который принимаем за начало отсчета времени ($t = 0$), на переменное напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi) \quad (15-31)$$

начинается переходный процесс.

Переходный ток i можно опять представить состоящим из двух слагающих: принужденного тока $i_{пр}$ и свободного тока $i_{св}$:

$$i = i_{пр} + i_{св}.$$

Принужденный ток синусоидальный (§ 9-6):

$$i_{пр} = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi), \quad (15-32)$$

$$\text{где } z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \omega L / r.$$

Закон изменения свободного тока зависит только от параметров цепи (L, r), поэтому свободный ток, как и в § 15-2, определяется выражением

$$i_{св} = K e^{-t/\tau}. \quad (15-33)$$

Тока до включения цепи не было, поэтому по первому закону коммутации ток в момент замыкания рубильника ($t = 0$)

$$i(0) = i_{\text{пр}}(0) + i_{\text{св}}(0) = 0,$$

откуда

$$i_{\text{св}}(0) = -i_{\text{пр}}(0). \quad (15-34)$$

Так как свободный ток в начальный момент

$$i_{\text{св}}(0) = Ke^{-0/\tau} = K,$$

а принужденный ток в тот же момент времени

$$i_{\text{пр}}(0) = I_m \sin(\omega \cdot 0 + \psi - \varphi) = I_m \sin(\psi - \varphi),$$

то можно написать:

$$K = -I_m \sin(\psi - \varphi).$$

Следовательно, свободный ток

$$i_{\text{св}} = Ke^{-t/\tau} = -I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}. \quad (15-35)$$

В начальный момент свободный ток имеет наибольшее значение. Он равен по величине и противоположен по

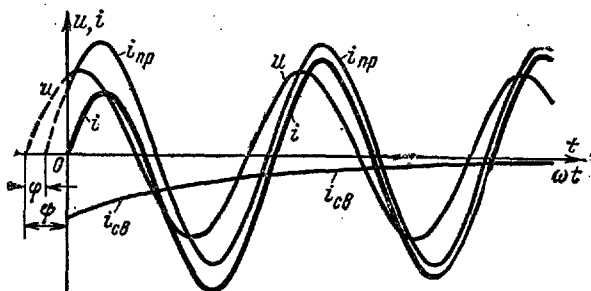


Рис. 15-12. Ток в цепи с L и r при включении ее на синусоидальное напряжение.

знаку мгновенному значению принужденного тока в момент включения (15-34). С течением времени свободный ток уменьшается и через время $t = 5\tau$ достигает практически нулевого значения.

Ток переходного процесса

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}; \quad (15-36)$$

он состоит из двух слагающих: принужденного синусоидального и свободного, направление которого не изменяется и который уменьшается по закону показательной функции (рис. 15-12).

Начальное значение свободного тока равно мгновенному значению принужденного тока в момент включения; поэтому при включении цепи в момент, когда принужденный ток проходит через нулевое значение, т. е. при $i_{пр}(0) = 0$, свободный ток не возникает и в цепи сразу наступает принужденный режим (рис. 15-13).

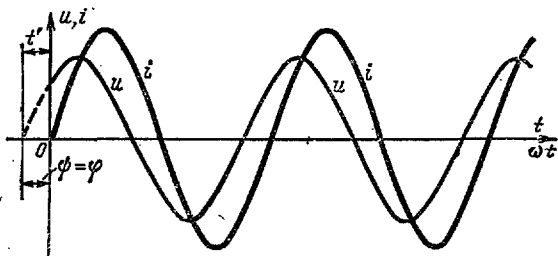


Рис. 15-13. Ток в цепи с L и r при включении ее на синусоидальное напряжение при $\psi = \varphi$.

В этом случае

$$i_{св}(0) = -I_m \sin(\psi - \varphi) = 0,$$

откуда $\sin(\psi - \varphi) = 0$ и $\psi - \varphi = 0$ или $\psi - \varphi = \pi$; следовательно,

$$\psi = \varphi \text{ (рис. 15-13) или } \psi = \varphi + \pi,$$

т. е. включение цепи должно произойти по прошествии времени

$$t' = \psi/\omega = \varphi/\omega \text{ или } t'' = t' + T/2$$

после начала положительной полуволны напряжения.

При включении цепи в момент, когда принужденная составляющая тока достигнет амплитудного значения, начальное значение свободного тока получается наибольшим. В этом случае

$$i_{св}(0) = -I_m \sin(\psi - \varphi) = \pm I_m,$$

откуда

$$\sin(\psi - \varphi) = \pm 1 \text{ или } \psi - \varphi = \pm 90^\circ;$$

следовательно,

$$\psi = \varphi + 90^\circ \text{ (рис. 15-14) или } \psi = \varphi - 90^\circ.$$

Таким образом, включение должно произойти по прошествии времени

$$t''' = \psi/\omega = (\varphi \pm 90^\circ)/\omega$$

после начала положительной полуволны напряжения.

В этом случае при медленном спаде свободного тока ($\tau > T$) наибольшая величина переходного тока может

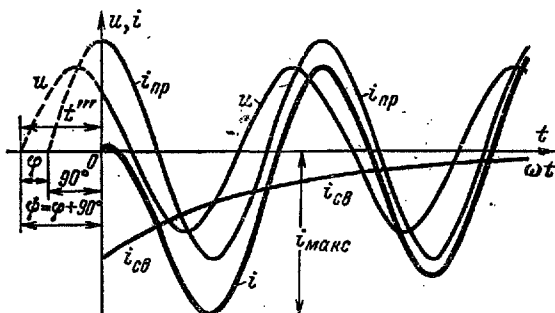


Рис. 15-14. Ток в цепи с L и r при включении ее на синусоидальное напряжение при $\psi = \varphi + 90^\circ$.

достигнуть значения $i_{\text{макс}}$, примерно равного двойной амплитуде принужденного тока I_m , по прошествии времени, примерно равного половине периода после включения цепи (когда свободный и принужденный токи имеют одинаковый знак).

Пример 15-2. Для цепи с индуктивностью $L = 0,01$ Г и сопротивлением $r = 1$ Ом при включении ее на напряжение $u = 330 \sin(314t + \psi)$ В определить свободный ток в момент включения $t = 0$, если 1) $\psi = 0$; 2) $\psi = 72^\circ 20'$; 3) $\psi = 162^\circ 20'$.

Решение. Полное сопротивление цепи

$$z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{1^2 + (314 \cdot 0,01)^2} = 3,3 \text{ Ом.}$$

Косинус угла сдвига фаз между напряжением и током и сдвиг по фазе

$$\cos \varphi = r/z = 1/3,3 = 0,303; \quad \varphi = 72^\circ 20'.$$

Амплитуда принужденного тока

$$I_m = U_m/z = 330/3,3 = 100 \text{ А.}$$

Свободный ток в момент включения (15-35):

$$1) i_{\text{св}}(0) = -I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-0/\tau} = -100 \sin(-72^\circ 20') = 100 \cdot 0,95 = 95 \text{ А;}$$

$$2) i_{\text{св}}(0) = -I_m \sin(\psi - \varphi) = -100 \sin(72^\circ 20' - 72^\circ 20') = 0;$$

$$3) i_{\text{св}}(0) = -I_m \sin(\psi - \varphi) = -100 \sin(162^\circ 20' - 72^\circ 20') = -100 \sin 90^\circ = -100 \text{ А.}$$

Включение цепи с емкостью и сопротивлением на синусоидальное напряжение

При включении в момент $t = 0$ цепи с емкостью C и сопротивлением r (рис. 15-8) на переменное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ начинается переходный процесс.

Принужденный ток цепи (§ 9-7)

$$i_{\text{пр}} = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi), \quad (15-37)$$

где

$$z = \sqrt{r^2 + x_C^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = x_C/r = -x_C/r \text{ и } \varphi < 0.$$

Ток $i_{\text{пр}}$ — синусоидальный и опережает по фазе напряжение цепи u (рис. 15-15).

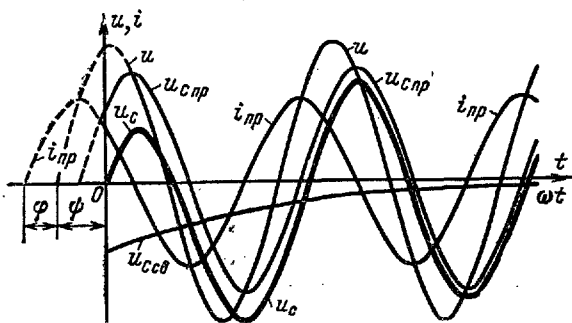


Рис. 15-15. Напряжение на конденсаторе в цепи с C и r при включении ее на синусоидальное напряжение.

Напряжение на конденсаторе во время переходного процесса состоит из двух слагающих — принужденного напряжения $u_{C\text{пр}}$ и свободного напряжения $u_{C\text{св}}$

$$u_C = u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}}.$$

Принужденное напряжение на конденсаторе

$$\begin{aligned} u_{C\text{пр}} &= I_m \frac{1}{\omega C} \sin(\omega t + \psi - \varphi - \pi/2) = \\ &= -U_{Cm} \cos(\omega t + \psi - \varphi), \end{aligned} \quad (15-38)$$

где $U_{Cm} = I_m/\omega C$.

Свободное напряжение на конденсаторе, как и в § 15-5, определяется выражением

$$u_{C\text{св}} = K e^{-t/\tau}.$$

Таким образом, напряжение на конденсаторе в течение переходного процесса

$$u_C = -U_{Cm} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + K e^{-t/\tau}.$$

По второму закону коммутации напряжение на конденсаторе в момент, непосредственно следующий за включением, имеет то же значение, что и в момент, непосредственно предшествующий включению; следовательно, если конденсатор не был заряжен, то

$$u_C(0) = u_{Cпр}(0) + u_{Cсв}(0) = 0,$$

откуда

$$u_{Cпр}(0) = -u_{Cсв}(0)$$

или

$$-U_{Cm} \cos(\omega \cdot 0 + \psi - \varphi) = -K e^{-0/\tau},$$

откуда

$$K = U_{Cm} \cos(\psi - \varphi).$$

Таким образом, свободное напряжение на конденсаторе

$$u_{Cсв} = K e^{-t/\tau} = U_{Cm} \cos(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}, \quad (15-39)$$

а переходное напряжение на конденсаторе

$$u_C = u_{Cпр} + u_{Cсв} = -U_{Cm} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + U_{Cm} \cos(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}. \quad (15-40)$$

График напряжений $u_{Cпр}$, $u_{Cсв}$ и u_C дан на рис. 15-15.

Как видно из выражения (15-40), на синусоидальное принужденное напряжение конденсатора накладывается свободное напряжение, которое в начальный момент имеет наибольшее значение, а затем уменьшается по закону показательной функции.

Начальное значение свободного напряжения зависит от момента включения. Если включение произойдет в момент, когда принужденная составляющая напряжения на конденсаторе достигнет амплитудного значения, например отрицательного (рис. 15-16), то начальное значение свободного напряжения будет наибольшим, равным амплитуде принужденного напряжения U_{Cm} . Как видно из (15-40), это будет при $\psi = \varphi$. Если свободное напряжение спадает медленно ($\tau > T$), то наибольшее значение переходного напряжения на конденсаторе $u_{Cмакс}$ может достигнуть примерно двойного амплитудного принужденного значения $2U_{Cm}$ через время, равное примерно половине периода после включения, когда

свободное и принужденное напряжения будут иметь одинаковый знак.

Если включение произойдет в момент, когда принужденная составляющая напряжения на конденсаторе проходит через нулевое значение, то свободного напряжения в цепи не возникает, и сразу наступает принужденный режим. Так как в этом случае $\cos(\psi - \varphi) = 0$ или $(\psi - \varphi) = \pm 90^\circ$, то такой режим будет при $\psi = \pm 90^\circ + \varphi$.

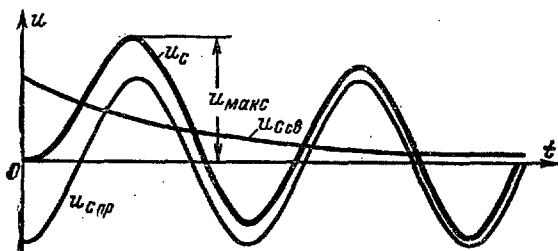


Рис. 15-16. Напряжение на конденсаторе в цепи с C и r при включении ее на синусоидальное напряжение при $\psi = \varphi$.

Принужденная составляющая тока была найдена выше (15-37). Свободную составляющую тока проще всего найти по уравнению, связывающему ток и напряжение на конденсаторе

$$i_{св} = C du_{св}/dt, \quad (15-41)$$

или с учетом (15-39)

$$\begin{aligned} i_{св} &= -C \frac{U_{св}}{\tau} \cos(\psi - \varphi) e^{-t/\tau} = -C \frac{I_m}{\omega CrC} \cos(\psi - \varphi) e^{-t/\tau} = \\ &= -\frac{I_m}{\omega Cr} \cos(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}, \end{aligned} \quad (15-42)$$

а переходный ток цепи

$$\begin{aligned} i &= i_{пр} + i_{св} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \\ &- \frac{I_m}{\omega Cr} \cos(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}. \end{aligned} \quad (15-43)$$

Из полученного выражения следует, что ток переходного процесса состоит из двух слагающих: принужденного синусоидального и свободного, который в начальный момент имеет наибольшее значение, а затем уменьшается по закону показательной функции.

В зависимости от момента включения начальное значение свободного тока будет различным.

Если включение цепи произойдет в момент, когда принужденное напряжение на конденсаторе (15-38) проходит через максимальное значение, то начальное значение свободного тока будет наибольшим, так как в этом случае $\cos(\psi - \varphi) = 1$ (или -1) и по (15-42)

$$i_{св}(0) = -\frac{I_m}{\omega Cr} \cos(\psi - \varphi) e^{-0/\tau} = -\frac{I_m}{\omega Cr} = -\frac{U_{см}}{r}.$$

Сравнивая полученное начальное значение свободного тока с амплитудой принужденного тока

$$I_m = \frac{U_{см}}{x_c} = \frac{U_{см}}{1/\omega C},$$

видим, что при небольшом сопротивлении r по сравнению с емкостным сопротивлением x_c начальное значение сво-

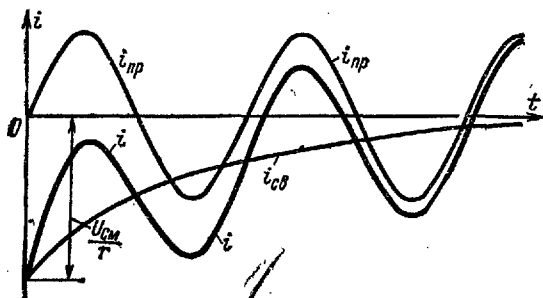


Рис. 15-17. Ток в цепи с C и r при включении ее на синусоидальное напряжение при $\psi = \varphi$.

бодного тока значительно больше (в x_c/r) амплитуды принужденного тока. В этом случае в начальной стадии переходного процесса ток в цепи значительно отличается от синусоидального. На рис. 15-17 построен ток i для случая $\psi = \varphi$, когда принужденный ток в момент включения равен нулю.

Если включение цепи произойдет в момент, когда принужденное напряжение на конденсаторе (15-38) проходит через нулевое значение, т. е. $\cos(\psi - \varphi) = 0$, то и $i_{св}(0) = 0$.

Пример 15-3. Определить амплитуду принужденного тока и начальное значение тока при включении кабеля, который можно рассматривать как цепь с емкостью $C = 1$ мкФ и сопротивлением $r = 3$ Ом, если напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi) = 9300 \sin(314 + 90^\circ)$ В.

Решение. Полное сопротивление кабеля:

$$z = \sqrt{r^2 + (1/\omega C)^2} = \sqrt{3^2 + (10^3/314 \cdot 1)^2} = 3,2 \cdot 10^3 \text{ Ом.}$$

Амплитуда принужденного тока

$$I_m = U_m/z = 9300/3,2 \cdot 10^3 = 2,9 \text{ А.}$$

Косинус угла сдвига фаз между напряжением и принужденным током и угол сдвига фаз

$$\cos \varphi = r/z = 3/(3,2 \cdot 10^3) \approx 0 \text{ и } \varphi \approx 90^\circ.$$

Начальное значение свободного тока (15-42)

$$\begin{aligned} i_{\text{св}}(0) &= -I_m \frac{1}{\omega C} \frac{1}{r} \cos(\psi - \varphi) = -U_{\text{см}} \frac{1}{r} \cos(\psi - \varphi) = \\ &= -9300 \frac{1}{3} \cos(90^\circ - 90^\circ) = -9300 \frac{1}{3} = -3100 \text{ А.} \end{aligned}$$

Так как начальное значение принужденного тока по (15-37) равно нулю [$i_{\text{пр}}(0) = 0$], то начальное значение тока при включении кабеля $i(0) = i_{\text{пр}}(0) + i_{\text{св}}(0) = i_{\text{св}}(0) = -3100 \text{ А.}$

15-9

Включение катушки со стальным сердечником на синусоидальное напряжение

При включении катушки без стального сердечника с индуктивностью L и активным сопротивлением r на переменное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ в ней возникает ток (15-36)

$$i = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{U_m}{z} \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}.$$

Если катушка обладает малым сопротивлением, которым можно пренебречь ($r \approx 0$), то

$$z \approx \omega L; U_m/z \approx U_m/\omega L = I_m; \varphi \approx \pi/2 \text{ и } \tau = L/r \rightarrow \infty.$$

При включении такой катушки ток

$$\begin{aligned} i &= i_{\text{пр}} + i_{\text{св}} \approx I_m \sin(\omega t + \psi - \pi/2) - I_m \sin(\psi - \pi/2) e^0 = \\ &= I_m \sin(\omega t + \psi - \pi/2) - I_m \sin(\psi - \pi/2). \end{aligned}$$

Этот ток состоит из синусоидальной принужденной составляющей и практически постоянной свободной составляющей, величина которой зависит от момента включения цепи (угла ψ).

Свободная составляющая тока имеет небольшое значение в том случае, когда напряжение питания в момент включе-

ния проходит через нулевое значение, т. е. $\psi = 0$. В этом случае ток

$$i = I_m \sin(\omega t - \pi/2) - I_m \sin(-\pi/2) = I_m \sin(\omega t - \pi/2) + I_m.$$

Ток изменяется периодически (рис. 15-18) от нулевого до наибольшего значения:

$$i_{\text{макс}} = 2I_m' = 2U_m/\omega L.$$

Магнитный поток в катушке в каждый момент времени пропорционален току; следовательно, пропорционально

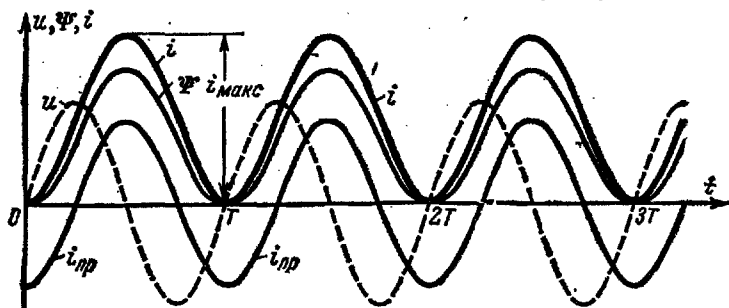


Рис. 15-18. Ток и магнитный поток катушки без сердечника и потерь при включении ее на переменное напряжение.

току и потокоцеплению:

$$\begin{aligned} \Psi = Li = Li_{\text{пр}} + Li_{\text{св}} &= \Psi_{\text{пр}} + \cancel{\Psi_{\text{св}}} = LI_m \sin(\omega t - \pi/2) + LI_m = \\ &= \Psi_m \sin(\omega t - \pi/2) + \Psi_m; \end{aligned} \quad (15-44)$$

поэтому кривая потокоцепления (рис. 15-18) подобна кривой тока.

Изменяющийся магнитный поток индуцирует э. д. с., которая уравнивается приложенным напряжением u .

При подключении катушки со стальным сердечником без потерь к источнику переменного напряжения магнитный поток изменяется по тому же закону, что и у катушки без сердечника. Но так как зависимость между потоком и током нелинейна, а определяется кривой намагничивания $\Phi(i)$ или $\Psi(i)$ (рис. 15-19), то кривая тока отличается от кривой магнитного потока. Кривую тока (рис. 15-20) можно построить по точкам по заданной кривой потока $\Phi(t)$ или потокоцепления $\Psi(t)$

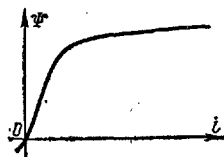


Рис. 15-19. Кривая намагничивания катушки со стальным сердечником.

и кривой намагничивания $\Phi(i)$ или $\Psi(i)$. Если при работе сердечник насыщается, то максимальное значение тока $i_{\text{макс}}$ резко возрастает (§ 14-4 и рис. 15-20).

При включении катушки со стальным сердечником, обладающей незначительным сопротивлением (включение

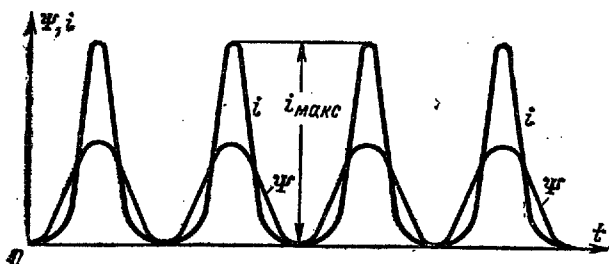


Рис. 15-20. Ток и магнитный поток катушки без потерь со стальным сердечником при включении ее на переменное напряжение.

ненагруженного трансформатора), происходящий процесс несколько отличается от рассмотренного. В этом случае свободная слагающая потокоцепления $\Psi_{\text{св}}$ не постоянна (15-44), а изменяется приблизительно (так как цепь нелинейна) по закону показательной функции $\Psi_{\text{св}} \approx \Psi_m e^{-t/\tau}$

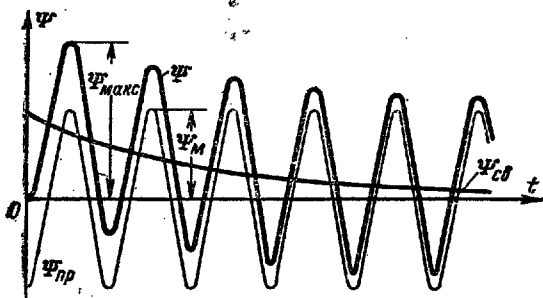


Рис. 15-21. Потокоцепление катушки, обладающей малым активным сопротивлением, при включении ее на переменное напряжение.

(рис. 15-21); следовательно, потокоцепление во время переходного процесса

$$\Psi = \Psi_{\text{пр}} + \Psi_{\text{св}} = \Psi_m \sin(\omega t - \pi/2) + \Psi_m e^{-t/\tau}. \quad (15-45)$$

Из написанного уравнения следует, что при больших значениях постоянной времени τ (r — мало) первое после

включения катушки максимальное значение потокосцепления $\Psi_{\text{макс}}$ достигает примерно удвоенного значения амплитуды принужденного потокосцепления Ψ_m (рис. 15-21). Затем максимумы потокосцепления уменьшаются вследствие уменьшения свободной слагающей $\Psi_{\text{св}}$.

По заданной кривой намагничивания (рис. 15-19) и кривой $\Psi(t)$ можно построить кривую тока (рис. 15-22).

При нормальном режиме работы трансформаторов энергетических установок магнитная индукция достигает наибольшего значения примерно 1,2 Т, а при удвоенной величине потокосцепления значение индукции вдвое больше, т. е. 2,4 Т, чему соответствует резкое возрастание тока. Экспериментально установлено, что при включении трансформаторов ток $i_{\text{макс}}$ может достигать 3—5-кратной амплитуды принужденного тока при номинальной нагрузке. Для уменьшения тока и связанных с ним электродинамических усилий при включении мощных трансформаторов последовательно с ними вводят резисторы, которые затем замыкают накоротко.

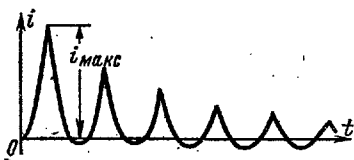


Рис. 15-22. Ток катушки со стальным сердечником при включении ее на переменное напряжение.

Приложение

Электрические и магнитные единицы Международной системы (СИ)

С 1963 г. в СССР согласно ГОСТ 9867-61 установлено применение Международной системы единиц, обозначаемой символом СИ (или SI), основными единицами которой являются метр, килограмм, секунда, ампер, градус Кельвина и кандела.

Эта система должна применяться как предпочтительная во всех областях науки, техники и народного хозяйства.

Сокращенные обозначения основных единиц даны в табл. П-1.

Таблица П-1

Величина	Единица		
	Наименование	Обозначение	
		русское	международное
Длина	метр	м	m
Масса	килограмм	кг	kg
Время	секунда	с	s
Сила электрического тока	ампер	А	A
Термодинамическая температура	Кельвин	К	K
Сила света	кандела	кд	cd

Для основных единиц установлены следующие определения.

Метр — длина, равная $1650763,73$ длины волны в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86.

Килограмм представлен массой международного прототипа килограмма.

Секунда — $9\,192\,631\,770$ периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

Ампер — сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками

Таблица П-2

Величина	Единица			Выражение единицы через основные еди- ницы СИ
	Наименование	Обозначение		
		русское	международ- ное	
<i>Дополнительные единицы</i>				
Плоский угол	радиан	рад	rad	
	стерадиан	ср	sr	
<i>Производные единицы</i>				
Площадь	квадратный метр	м ²	м ²	м ²
Объем	кубический метр	м ³	м ³	м ³
Частота	герц	Гц	Hz	с ⁻¹
Плотность (объемная масса)	килограмм на кубический метр	кг/м ³	kg/m ³	кг/м ³
	метр в секунду	м/с	m/s	м/с
Скорость	радиан в секунду	рад/с	rad/s	с ⁻¹
Угловая скорость	метр в секунду за секунду	м/с ²	m/s ²	м/с ²
Ускорение	радиан в секунду за секунду	рад/с ²	rad/s ²	с ⁻²
Угловое ускорение	ньютон	Н	N	кг · м/с ²
Сила	паскаль	Па	Pa	Н/м ² = кг/(м · с ²)
Давление (механическое напря- жение)				

Величина	Единица			Выражение единицы через основные еди- ницы СИ
	Наименование	Обозначение		
		русское	международ- ное	
Работа, энергия, количество теплоты	джоуль	Дж	J	$H \cdot m = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$
Мощность	ватт	Вт	W	$\text{Дж}/\text{с} = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^3$
Количество электричества, элек- трический заряд	кулон	Кл	C	A · c
Электрическое напряжение, раз- ность электрических потен- циалов, э. д. с.	вольт	В	V	$\text{Вт}/\text{A} = \text{кг} \cdot \text{м}^2/(\text{A} \cdot \text{с}^3)$
Напряженность электрического поля	вольт на метр	В/м	V/м	$\text{В}/\text{м} = \text{кг} \cdot \text{м}/(\text{A} \cdot \text{с}^3)$
Электрическое сопротивление	ом	Ом	Ω	$\text{В}/\text{A} = \text{кг} \cdot \text{м}^2/(\text{A} \cdot \text{с}^3)$
Электрическая проводимость	сименс	См	S	$\text{A}/\text{В} = \text{A}^2 \cdot \text{с}^3/(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$
Электрическая емкость	фарада	Ф	F	$\text{Кл}/\text{В} = \text{A}^2 \cdot \text{с}^4/(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$
Магнитный поток	вебер	Вб	Wb	$\text{В} \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м}^2/(\text{A} \cdot \text{с}^2)$
Индуктивность	генри	Г	H	$\text{Вб}/\text{A} = \text{кг} \cdot \text{м}^2/(\text{A}^2 \cdot \text{с}^2)$
Магнитная индукция	тесла	Т	T	$\text{Вб}/\text{м}^2 = \text{кг}/(\text{A} \cdot \text{с}^2)$
Напряженность магнитного поля	ампер на метр	А/м	A/м	A/м
Намагничивающая (магнито- движущая) сила	ампер	A	A	A

силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ ньютона (единица силы Международной системы) на каждый метр длины.

Кельвин — $1/273,16$ часть термодинамической температуры тройной точки воды.

Кандела — сила света, испускаемого с площади $1/600\,000 \text{ м}^2$ сечения полного излучателя, в перпендикулярном этому сечению направлении, при температуре излучателя, равной температуре затвердевания платины при давлении $101\,325 \text{ Па}$.

Кроме единиц, приведенных в табл. П-1, устанавливаются единицы Международной системы, указанные в табл. П-2.

Для дополнительных единиц установлены следующие определения.

Радян — угол между двумя радиусами окружности, дуга между которыми по длине равна радиусу: $1 \text{ рад} = 57^\circ 17' 44,8''$.

Стерadian — телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, по длине равной радиусу сферы.

Таблица П-3

Приставки к единицам

Наименование приставок	Отношение к главной единице	Обозначения		Наименование приставок	Отношение к главной единице	Обозначения	
		русским шрифтом	латинским или греческим шрифтом			русским шрифтом	латинским или греческим шрифтом
Атто	10^{-18}	а	<i>a</i>	Деци	10^{-1}	д	<i>d</i>
Фемто	10^{-15}	ф	<i>f</i>	Дека	10	дк	<i>da</i>
Пико	10^{-12}	п	<i>p</i>	Гекто	10^2	г	<i>h</i>
Нано	10^{-9}	н	<i>n</i>	Кило	10^3	к	<i>k</i>
Микро	10^{-6}	мк	<i>μ</i>	Мега	10^6	мг	<i>M</i>
Милли	10^{-3}	м	<i>m</i>	Гига	10^9	Г	<i>G</i>
Сантн	10^{-2}	с	<i>s</i>	Тера	10^{12}	Т	<i>T</i>

Список литературы

1. Евдокимов Ф. Е. Теоретические основы электротехники. М., «Высшая школа», 1971, 544 с.
2. Мансуров Н. Н., Попов В. С. Теоретическая электротехника. М., «Энергия», 1968, 576 с.
3. Сборник задач по теоретической электротехнике. М., «Энергия», 1970, 216 с. Авт.: В. И. Константинов, Н. Н. Мансуров, А. Г. Симон, А. А. Федоров-Королев.
4. Зайчик М. Ю. Сборник задач и упражнений по теоретической электротехнике. М., «Энергия», 1968, 472 с.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автотрансформатор 519
Аккумулятор 38
Активная мощность 313
Активное напряжение 325
— сопротивление 314
Активный ток (составляющая) 355
Акцепторные примеси 128
Алюминисвые провода 27, 30
Ампер 16, 169
Амперметр 103
Амплитуда 287
Аналитический расчет нелинейных цепей 139
Анизотропия 178
Анод 35, 110
Анодно-сеточная характеристика 286
Анодный ток 111
Асинхронный двигатель 456
Батарея солнечная 132
Бифилярная обмотка 236
Близости эффект 320
Вакуум 108
Вариконд 269
Вариометр 235
Ватт 47
Ваттметр 380
Вебер 158
Векторная диаграмма 295
— — трансформатора 517
Векторы 294
Вентили 130
Ветви электрической цепи 61
Взаимная индуктивность 232
Взаимодействие проводов 168
Вихревые токи 216
Включение встречное 233
— — согласное 233
Внешний фотоэффект 115
Внутреннее сопротивление 46
Внутренний фотоэффект 115
Воздушный трансформатор 412
Волновое сопротивление 281
Вольт 10
Вольт-амперная характеристика 107, 112
Вращающееся магнитное поле 451
Вторичная обмотка 412, 516
— эмиссия 110
Выпрямитель 495
Выпрямление переменного тока 493
Высшие гармоники 464
Газосветная лампа 122
Газотрон 124, 125
Гальванические элементы 35
Гаусс 153

Гаусса теорема 243
Генри 152
Генератор ламповый 284
— постоянного тока 213
— электромашинный 210
Герц 287
Гистерезисный цикл 182
ГОЭЛРО 4
Графические обозначения 31
Двигатель постоянного тока 214
Двухполупериодное выпрямление 302
Действующее значение напряжения; тока и э.
Джоуль 10, 49
Диаграмма топографическая 405
Диод 110
Дифференциальная емкость 269
Диэлектрики 13, 248
Диэлектрическая проницаемость 240, 252
Добавочное сопротивление 104
Доливо-Добровольский М. О. 417
Домены 177
Добротность контура 348
Дуговой разряд (дуга) 123
Дырочная проводимость 126
Емкость 261
— аккумулятора 39
Емкостная проводимость 359
Емкостное сопротивление 322
Железо техническое 183
Закон Био — Савара 155
— Джоуля — Ленца 48
— коммутации 521
— Кулона 240
— Ленца 208
— Ома для магнитной цепи 191
— — — электрической цепи 19, 52
— полного тока 150
— электромагнитной индукции 203, 204, 207
Запирающий слой 129
Измерительный механизм 175, 237
Индуктивность 221
— взаимная 232
— дифференциальная 229
— статическая 229
Ионизация 118
Катод 108
Кенотрон 112
Колебательный контур 279
Комплексное напряжение 394
— сопротивление 393
Комплексный потенциал 405
Конденсатор 261
— плоский 266
— цилиндрический 271
— электролитический 262, 263

Контактная э. д. с. 42
 Козрцитивная сила 182
 Коэффициент амплитуды 306
 — полезного действия 39, 55, 56
 — связи 234
 — температурный 25
 — трансформации 518
 — формы кривой 306
 Кривая намагничивания 179, 183
 Кулон 10
 Кулон-вольтная характеристика 268
 Кулоновские силы 34, 241
 Ламповый генератор 284
 Линии магнитной индукции 152
 — напряженности электрического поля 8
 Линейная цепь 107
 Люминесцентная лампа 121
 Магнитная индукция 152
 — постоянная 152
 — проницаемость 152
 — цепь 189
 Магнитное напряжение 149
 — насыщение 178
 — сопротивление 191
 Магнитный гистерезис 181
 — диполь 176
 — поток 154
 — усилитель 513
 Магнитогидродинамический генератор 239
 Магнитодвижущая сила 147
 Магнитодиэлектрики 186
 Магнитоэлектрический измерительный механизм 175
 Магнитно-мягкий материал 183
 Магнитно-твердый материал 186
 Мгновенные значения мощности, напряжения, тока и
 Международная система единиц СИ 546
 Метод контурных токов 91
 — наложения 86
 — преобразования 79
 — узлового напряжения 83
 — узловых и контурных уравнений 88
 — эквивалентного генератора 93
 Многофазные системы 417
 Мощность активная 313, 342
 — комплексная 398
 — мгновенная 312, 316, 329
 — полная 331
 — реактивная 324, 330, 342
 — трехфазной цепи 446
 Намагничивающая сила 147
 Напряжение активное 325
 — зажигания 119
 — линейное 420
 — магнитное 149
 — реактивное 336

- Напряжение фазное 420
- электрическое 9
- Напряженность магнитного поля 147
- электрического поля 8
- Нейтральный (нулевой) провод 420
- Нелинейные цепи 107
- Несимметричная система 418
- Нулевая последовательность фаз 460
- Ньютон 10
- Объемный отрицательный заряд 111
- Однородное поле 9, 146
- Ом 20
- Отклоняющие пластины 114
- Падение напряжения 46, 57
- Параллельное соединение 67
- Пассивный двухполюсник 62
- четырехполюсник 97
- Переходные процессы 521
- Период 287
- Плотность тока 17
- Поверхность равного потенциала 11
- Поверхностный эффект 318
- Поле магнитное 8
- электрическое 8
- электромагнитное 7
- электростатическое 8
- Полный ток 150
- Полоса пропускания частот 350
- Поляризация диэлектрика 249
- элемента 36
- Последовательность фаз 457
- Постоянная времени цепи 226, 275
- магнитная 152
- электрическая 242
- Постоянные магниты 200
- Потенциал 11
- ионизации 120
- возбуждения 120
- выхода 108
- Потери от вихревых токов 217
- — гистерезиса 183
- Потокосцепление 209
- Правило буравчика 144, 146
- левой руки 166
- правой руки 204
- Преобразование треугольника в эквивалентную звезду 80, 81
- Принужденный режим 522
- Принцип наложения 86
- Пробивное напряжение 255
- Проводимость активная 355
- емкостная 359, 360
- индуктивная 359
- полная 352, 360
- реактивная 356
- эквивалентная 67, 68

- Пусковой реостат 215
- Работа выхода 42
- Разность потенциалов 10
- Разряд дуговой 123
 - искровой 122
 - конденсатора 276
- Разряд самостоятельный 119
 - тихий 120
- Резистор 22
- Резонанс напряжений 346
 - токов 367
- Резонансные кривые 349
- Самоиндукция 224
- Сверхпроводимость 26
- Световая характеристика фотоэлемента 117
- Сегнетоэлектрики 270
- Сеточное напряжение 286
- Симметричные составляющие трехфазной системы 459
- Смещение нейтрали 429
- Согласованная нагрузка 55
- Соединение звездой 80, 419, 424
 - параллельное 67
 - последовательное 64
 - смешанное 69
 - треугольником 80, 422, 435
- Солнечные батареи 132
- Сопротивление 20
 - активное 313, 314
 - волновое 281
 - дифференциальное 139
 - емкостное 322
 - индуктивное 316
 - общее 65
 - полное 337
 - реактивное 316, 322
 - статическое 139
 - эквивалентное 65
- Средние значения напряжения, тока и э. д. с. 300, 301
- Статическая емкость 269
- Статическое сопротивление 139
- Столетов А. Г. 180
- Схема электрической цепи 32
- Темный разряд 120
- Термопара 44
- Термоэлектронная эмиссия 108
- Тлеющий разряд 121
- Тиратрон 125
- Ток 14
 - активный 354, 355
 - накала 109
 - насыщения 118
 - реактивный 354
- Ток смещения 277
- Токи вихревые 216
- Топографическая диаграмма 405, 432

Трансформатор 516
Треугольник мощностей 331
— напряжений 326
— проводимостей 357
— сопротивлений 327
— токов 356
Трехфазная система 417
Триод 113
Угловая частота 288
Угол потерь в конденсаторе 364
Ударная ионизация 119
Удельная проводимость 19
Удельное сопротивление 21
Узловое напряжение 83
Узлы электрической цепи 61
Управляемый дроссель 513
Фаза начальная 292
Фазные напряжения, токи, э. д. с. 417, 420
Фарада 262
Фарадей М. 203
Фильтры 485
Фоторезистор 132
Фотоэлемент 115
Цепи индуктивные связанные 231
— линейные 61, 107
— магнитные 189
— нелинейные 107
— электрические 30
Частота 287
— угловая 288
Частотомер 309
Четырехполюсник активный 97
— пассивный 97
Четырехпроводная система 420
Электрическая дуга 123
— прочность 255
Электрический диполь 249
— разряд в газе 118
Электрическое смещение 251
Электродвижущая сила 33
— — взаимной индукции 231
— — контактная 42
— — самоиндукции 224
— — электромагнитной индукции 203
Электромагнит 236
Электромагнитный измерительный механизма
Электронная лампа 110
Эмиссия вторичная 110
— термоэлектронная 108
— фотоэлектронная 110
— электростатическая 110
Энергия магнитного поля 229
— электрического поля 278
Эрстед 148
Яблочков П. Н. 124

Оглавление

Предисловие	3
Введение	4
Глава первая. Физические процессы в электрических цепях постоянного тока	7
1-1. Основные понятия, относящиеся к электрическому полю	7
1-2. Проводники, изоляторы, полупроводники	11
1-3. Электрический ток	14
1-4. Плотность тока	17
1-5. Закон Ома	19
1-6. Сопротивление	20
1-7. Зависимость сопротивления от температуры	24
1-8. Проводниковые материалы	27
1-9. Электропроводность и энергетические уровни	28
1-10. Электрическая цепь и ее основные элементы	30
1-11. Электродвижущая сила	33
1-12. Источники электрической энергии	35
1-13. Электрическая энергия и мощность	45
1-14. Преобразование электрической энергии в тепловую	48
1-15. Электрическая цепь с одним источником	52
1-16. Электрическая цепь с двумя источниками	56
1-17. Потенциальная диаграмма	58
Глава вторая. Расчет линейных цепей постоянного тока	61
2-1. Элементы схем электрических цепей. Два закона Кирхгофа	61
2-2. Последовательное соединение резисторов	64
2-3. Параллельное соединение резисторов	67
2-4. Смешанное соединение резисторов	69
2-5. Способы соединения химических источников питания	71
2-6. Потеря напряжения в проводах. Определение сечения проводов	74
2-7. Эквивалентные схемы источников энергии	77
2-8. Расчет цепей методом преобразования	79
2-9. Метод узлового напряжения	83
2-10. Метод наложения (суперпозиции) токов	86
2-11. Расчет цепей методом узловых и контурных уравнений	88
2-12. Метод контурных токов	91
2-13. Метод эквивалентного генератора	93

2-14. Четырехполосник	97
2-15. Измерение силы тока и напряжения	103
2-16. Измерение сопротивлений	105
Глава третья. Нелинейные цепи постоянного тока и их элементы	107
3-1. Нелинейные элементы и их характеристики	107
3-2. Вакуумный промежуток	108
3-3. Электронно-лучевая трубка	113
3-4. Фотоэлемент	115
3-5. Газоразрядный или газовый промежуток	117
3-6. Полупроводниковый вентиль	125
3-7. Полупроводниковые фотоэлементы	131
3-8. Терморезистор	133
3-9. Графический расчет нелинейных цепей	134
3-10. Аналитический расчет нелинейных цепей	139
3-11. Стабилизаторы тока и напряжения	141
3-12. Балластное сопротивление	143
Глава четвертая. Магнитное поле	144
4-1. Магнитное поле тока	144
4-2. Намагничивающая сила, напряженность магнитного поля, магнитное напряжение	147
4-3. Закон полного тока	150
4-4. Магнитная индукция, магнитная проницаемость, магнитный поток	151
4-5. Закон Био-Савара	155
4-6. Магнитное поле провода с током	158
4-7. Магнитное поле трубчатого провода и коаксиального кабеля	161
4-8. Магнитное поле катушки	163
4-9. Электромагнитные силы	165
4-10. Работа электромагнитных сил	170
4-11. Магнитоэлектрический измерительный механизм	175
Глава пятая. Магнитная цепь	176
5-1. Намагничивание ферромагнетиков	176
5-2. Циклическое перемагничивание	181
5-3. Ферромагнитные материалы	183
5-4. Магнитное поле на границе двух сред	187
5-5. Магнитные цепи	189
5-6. Расчет магнитных цепей	193
5-7. Постоянные магниты	200
Глава шестая. Электромагнитная индукция	203
6-1. Электродвижущая сила электромагнитной индукции	203
6-2. Преобразование механической энергии в электрическую. Электрические генераторы	209
6-3. Преобразование электрической энергии в механическую. Электродвигатели	214
6-4. Вихревые токи	216
6-5. Измерение магнитного потока, магнитной индукции и магнитного напряжения	218
6-6. Индуктивность	221
6-7. Электродвижущая сила самоиндукции	224

6-8. Индуктивность катушки с ферромагнитным сердечником	228
6-9. Энергия магнитного поля	229
6-10. Взаимная индукция	231
6-11. Электромагниты	236
6-12. Магнитогидродинамический генератор	239
Глава седьмая. Электрическое поле	240
7-1. Закон Кулона	240
7-2. Теорема Остроградского—Гаусса	243
7-3. Однородное электрическое поле	245
7-4. Диэлектрики в электрическом поле	248
7-5. Электрическое смещение	251
7-6. Электрическая прочность диэлектрика	255
7-7. Электрическая изоляция и электроизоляционные материалы	257
7-8. Емкость. Конденсаторы	261
7-9. Соединение конденсаторов	263
7-10. Плоский конденсатор	266
7-11. Нелинейные конденсаторы-вариконды	268
7-12. Цилиндрический конденсатор	271
7-13. Емкость двухпроводной линии	272
7-14. Заряд и разряд конденсатора	274
7-15. Энергия электрического поля	278
7-16. Колебательный контур	279
Глава восьмая. Основные понятия, относящиеся к переменным токам.	286
8-1. Период и частота переменного тока	286
8-2. Фаза. Сдвиг фаз	291
8-3. Графическое изображение синусоидальных величин	294
8-4. Средние значения тока, напряжения и э. д. с.	300
8-5. Действующие значения тока, напряжения и э. д. с.	303
8-6. Коэффициенты формы и амплитуды	306
8-7. Измерение переменных токов, напряжений и частоты	307
Глава девятая. Неразветвленные цепи переменного тока	310
9-1. Особенности цепей переменного тока	310
9-2. Цепь с сопротивлением	310
9-3. Цепь с индуктивностью	314
9-4. Поверхностный эффект и эффект близости	318
9-5. Цепь с емкостью	321
9-6. Цепь с активным сопротивлением и индуктивностью	325
9-7. Цепь с активным сопротивлением и емкостью	332
9-8. Цепь с активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью	336
9-9. Общий случай неразветвленной цепи	343
9-10. Резонанс в неразветвленной цепи (резонанс напряжений).	346
Глава десятая. Разветвленные цепи переменного тока	352
10-1. Простейший расчет цепи с двумя ветвями	352
10-2. Расчет разветвленных цепей методом проводимостей	354
10-3. Общий случай цепи с параллельными ветвями	359
10-4. Расчет цепи со смешанным соединением сопротивлений	361

10-5. Эквивалентные схемы конденсатора с потерями и катушки	364
10-6. Резонанс в разветвленной цепи (резонанс токов)	367
10-7. Значение коэффициента мощности для энергетики	376
10-8. Активная и реактивная энергия	379
10-9. Измерение мощности	380
10-10. Измерение угла сдвига фаз	382

Глава одиннадцатая. Расчет цепей синусоидального тока с применением комплексных чисел 383

11-1. Основные понятия	383
11-2. Сложение и вычитание комплексных чисел	387
11-3. Умножение и деление комплексных чисел	388
11-4. Закон Ома в комплексной форме	391
11-5. Мощность	398
11-6. Законы Кирхгофа	399
11-7. Расчет цепей с последовательно и параллельно соединенными сопротивлениями	401
11-8. Расчет последовательно-параллельных и сложных цепей	403
11-9. Топографическая диаграмма	405
11-10. Получение угла сдвига фаз между напряжением и током в 90°	407
11-11. Индуктивно-связанные цепи	408
11-12. Измерение взаимной индуктивности	416

Глава двенадцатая. Трехфазные цепи 417

12-1. Трехфазные системы	417
12-2. Соединение обмоток генератора звездой	419
12-3. Соединение обмоток генератора треугольником	422
12-4. Соединение приемников энергии звездой	424
12-5. Соединение приемников энергии треугольником	435
12-6. Преобразование схем трехфазных цепей	440
12-7. Мощность трехфазной цепи	446
12-8. Измерение мощности	448
12-9. Вращающееся магнитное поле трехфазной системы	451
12-10. Принцип действия асинхронных электродвигателей	456
12-11. Вращающееся магнитное поле двухфазной системы	456
12-12. Определение последовательности фаз	457
12-13. Симметричные составляющие несимметричной трехфазной системы	459

Глава тринадцатая. Несинусоидальные токи 464

13-1. Основные понятия	464
13-2. Виды периодических кривых	467
13-3. Разложение периодических кривых на гармоники	470
13-4. Действующие значения несинусоидальных тока и напряжения	475
13-5. Несинусоидальные токи и напряжения в линейных электрических цепях	478
13-6. Мощность при несинусоидальном токе	482
13-7. Фильтры	485
13-8. Высшие гармоники в трехфазной цепи	487

Глава четырнадцатая. Нелинейные цепи переменного тока	492
14-1. Общие замечания	492
14-2. Токи в цепях с вентилями	493
14-3. Напряжение, ток и магнитный поток в катушке со стальным сердечником	496
14-4. Влияние гистерезиса на ток в катушке со стальным сердечником и ее вольт-амперная характеристика	501
14-5. Потери энергии в стали	504
14-6. Векторная диаграмма катушки со стальным сердечником и схема ее замещения	507
14-7. Феррорезонанс и феррорезонансный стабилизатор напряжения	511
14-8. Управляемый дроссель. Магнитный усилитель	513
14-9. Трансформатор и автотрансформатор	516
14-10. Устроитель частоты	520
Глава пятнадцатая. Переходные процессы в электрических цепях	521
15-1. Законы коммутации	521
15-2. Включение цепи с индуктивностью и сопротивлением на постоянное напряжение	524
15-3. Короткое замыкание цепи с индуктивностью и сопротивлением	527
15-4. Отключение цепи с индуктивностью и сопротивлением	528
15-5. Включение цепи с емкостью и сопротивлением на постоянное напряжение	530
15-6. Короткое замыкание цепи с емкостью и сопротивлением	532
15-7. Включение цепи с индуктивностью и сопротивлением на синусоидальное напряжение	534
15-8. Включение цепи с емкостью и сопротивлением на синусоидальное напряжение	538
15-9. Включение катушки со стальным сердечником на синусоидальное напряжение	542
Приложение	546
Список литературы	549
Алфавитный указатель	550